Richiamo sui numeri complessi

$\mathbb{C} = \{ z = x + iy \quad , x, y \in \mathbb{R} \}$

Somma su $\mathbb{C}$: $(x+iy) + (p+iq) = (x+p) + i(y+q)$

Prodotto su $\mathbb{C}$: $(x+iy)(p+iq) = [(xp - yq) + i(yp + xq)]$

Se $z \neq 0$ $\quad \frac{1}{z} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$

<u>Def</u> Preso $z = x + iy$, si pone $\bar{z} = x - iy$

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = z\bar{z}$$

~~Def~~ <u>Convergenza su $\mathbb{C}$</u> Se $\{z_n\} \subset \mathbb{C}$, si dice che $z_n \to z$ se $\lim_{n\to\infty} |z - z_n| = 0$

<u>Serie di potenze su $\mathbb{C}$</u>

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad a_n \in \mathbb{C} \ , \ z \in \mathbb{C}$$

<u>Teorema</u> Se $\exists \ z_0 \in \mathbb{C}$ t.c. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ converge allora la serie

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge su $B_r(0)$, $r = |z_0|$

e converge unif sui compatti di $B_r(0)$.

Qui $\quad B_r(0) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < r \}$.

Esempio Serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$

$\forall\, t \in (0,1)$ la serie converge in $z_0 = t$

quindi la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \text{converge in } B_1(0).$$

$$(1-z)\sum_{n=0}^{N} z^n = \sum_{n=0}^{N} (z^n - z^{n+1}) = 1 - z^{N+1}$$

Quindi $\forall\, z \in B_1(0)$

$$\sum_{n=0}^{N} z^n = \frac{1-z^{N+1}}{1-z} \longrightarrow \frac{1}{1-z} \quad \text{per } N \to \infty$$

Cioè

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad \forall\, z \in B_1(0).$$

Altro esempio.

$$e^z \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$\sum \frac{t^n}{n!}$ converge $\forall\, t \in \mathbb{R}$ e ha

somma $e^t = \exp(t)$.

Quindi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ converge su tutto $\mathbb{C}$.

NB $\quad e^{z+w} = e^z e^w \quad$ (Regola del binomio ....)

Oss. $$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k} x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k+1} x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= \cos x + i \sin x$$

$$\cos x = \operatorname{Re} e^{ix} = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \operatorname{Im} e^{ix} = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$e^{inx} = \cos nx + i \sin nx$$

Se $f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{C}$ ha serie di F.

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - i b_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + i b_n}{2} e^{-inx} \right)$$

Quindi posto

$$f_n = \begin{cases} \dfrac{a_n - i b_n}{2} & n > 0 \\ \dfrac{a_0}{2} & n = 0 \\ \dfrac{a_{-n} + i b_{-n}}{2} & n < 0 \end{cases}$$

si ottiene

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{inx}$$

Ove per $n>0$

$$f_n = \frac{a_n - i b_n}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos nx - i \operatorname{sen} nx) f(x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x)\, dx$$

Idem per gli altri indici.

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x)\, dx$$

si chiamano coeff. di F. nella rappr. esponenziale.

<u>Esercizio</u> Preso $r \in (0,1)$ provare che

$$P_r(\vartheta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} e^{in\vartheta} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\vartheta + r^2}$$

<u>Prop.</u> $\frac{1}{2\pi} P_r(\vartheta)$ è un buon nucleo per $r \to 1$.

1) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} P_r(\vartheta)\, d\vartheta = 1$

2) $P_r \geq 0 \quad \forall \vartheta.$

3) $\forall \delta > 0 \quad \int_{[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]} P_r(\vartheta)\, d\vartheta \to 0 \quad r \to 1.$