CORSO DI GEOMETRIA
BASI DI SPAZI VETTORIALI E DIMENSIONE
A.A. 2018/2019
PROF. VALENTINA BEORCHIA

INDICE

1. Generatori di uno spazio vettoriale

Definizione 1.1. *Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ e siano*

$$v_1, \dots, v_k \in V$$

vettori di V. Diremo che $v_1, \dots, v_k$ generano V se

$$V = \text{Span}\ (v_1, \dots, v_k),$$

e quindi per ogni vettore $v \in V$ esistono dei coefficienti$\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tali che

$$v = \lambda_1\, v_1 + \cdots + \lambda_k\, v_k.$$

In questo caso V si dirá finitamente generato.

Esempi 1.2.

- Consideriamo i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Osserviamo che il vettore $w = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ si puó scrivere come combinazione lineare di v_1 e v_2:

$$w = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = v_1 - 2v_2,$$

quindi $w \in \text{Span}\,(v_1, v_2)$.

Sia ora $v \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ un vettore qualunque. Ci chiediamo se $v \in \text{Span}\,(v_1, v_2)$, cioé se esistano due coefficienti λ_1 e λ_2 tali che

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 2\lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\lambda_2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Per determinare l'esistenza di λ_1 e λ_2 dobbiamo risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 & = c \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 & = d. \end{cases}$$

La matrice completa $(A|b)$ associata al sistema lineare é

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & | & c \\ 2 & 1 & | & d \end{pmatrix}.$$

Con l' operazione elementare $(A|b)_{(2)} - 2(A|b)_{(1)}$ riduciamo la matrice a scala e otteniamo:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & | & c \\ 0 & 3 & | & d-2c \end{pmatrix}.$$

Il sistema lineare ha (un'unica) soluzione

$$\lambda_1 = \frac{d+c}{3}, \qquad \lambda_2 = \frac{d-2c}{3}.$$

Osserviamo che nel caso particolare di prima $c = 3$ e $d = 0$ si ottiene effettivamente $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -2$.

Come conseguenza abbiamo che ogni vettore $v \in \mathbb{R}^2$ verifica $v \in \mathrm{Span}\,(v_1, v_2)$, quindi

$$\mathbb{R}^2 = \mathrm{Span}\,(v_1, v_2),$$

cioé v_1 e v_2 sono dei generatori per $\mathbb{R}^2$.

- Consideriamo i due vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

In questo caso abbiamo che

$$\mathbb{R}^3 \neq \mathrm{Span}\,(v_1, v_2).$$

Infatti, il vettore

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \mathrm{Span}\,(v_1, v_2).$$

Infatti, verifichiamo che non esistono λ_1 e λ_2 tali che

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

La matrice completa associata al sistema lineare é

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 1 \\ 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}.$$

Con l' operazione elementare $(A|b)_{(2)} - (A|b)_{(1)}$ otteniamo

$$(A'|b') = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

e ora con $(A'|b')_{(3)} - (A'|b')_{(2)}$ abbiamo la seguente matrice a scala:

$$(A''|b'') = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

che corrisponde a un sistema lineare incompatibile (senza soluzioni), perché l'ultima riga corrisponde ad un'equazione del tipo $0 = 1$.

2. Vettori linearmente dipendenti e linearmente indipendenti

Definizione 2.1. *I vettori $v_1, \ldots, v_k \in V$ si dicono linearmente dipendendenti se esistono k scalari $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ non tutti nulli tali che*

$$\alpha_1\, v_1 + \cdots + \alpha_k\, v_k = 0,$$

cioé una loro combinazione lineare a coefficienti non tutti nulli dá luogo al vettore nullo.

I vettori $v_1, \ldots, v_k$ si dicono linearmente indipendenti se essi non sono linearmente dipendenti.

Osservazione 2.2.

(1) Un vettore é linearmente dipendente se e solo se é il vettore nullo $v = 0$.
Infatti, $\alpha v = 0$ per un coefficiente non nullo se e solo se il vettore v é nullo.

(2) Due vettori v_1 e v_2 sono linearmente dipendenti se e solo se sono proporzionali.
Infatti, si ha $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0$ con α_1, α_2 non entrambi nulli se e solo se vale

$$v_2 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} v_1, \quad \text{oppure } v_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2.$$

(3) Se tra i vettori $v_1, \ldots, v_k$ c'é un vettore nullo

$$v_i = 0,$$

allora $v_1, \ldots, v_k$ sono linearmente dipendenti; infatti, la combinazione lineare

$$0 \cdot v_1 + \cdots + 1 \cdot v_i + \cdots + 0 \cdot v_k =$$

$$= 0 \cdot v_1 + \cdots + 1 \cdot 0 + \cdots + 0 \cdot v_k = 0$$

dá luogo al vettore nullo e non tutti i coefficienti sono nulli.

(4) Se tra i vettori $v_1, \dots, v_k$ ce ne sono due uguali
$$v_i = v_j,$$
allora $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente dipendenti; infatti, la combinazione lineare
$$0 \cdot v_1 + \cdots + 1 \cdot v_i + \cdots + (-1)v_j + \cdots + 0 \cdot v_k =$$
$$= 0 \cdot v_1 + \cdots + 1 \cdot v_i + \cdots + (-1)v_i + \dots 0 \cdot v_k = 0$$
dá luogo al vettore nullo e non tutti i coefficienti sono nulli.

(5) Nel caso in cui $V = \mathbb{K}^n$, possiamo stabilire se k vettori $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente dipendenti studiando un sistema omogeneo di equazioni lineari. Piú precisamente, se esprimiamo i vettori $v_1, \dots, v_k$ in componenti:
$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \qquad \dots, \qquad v_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix},$$
allora una loro combinazione lineare si puó scrivere come
$$\alpha_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + \alpha_k \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} + \cdots + \alpha_k a_{1k} \\ \alpha_1 a_{21} + \alpha_2 a_{22} + \cdots + \alpha_k a_{2k} \\ \vdots \\ \alpha_1 a_{n1} + \alpha_2 a_{n2} + \cdots + \alpha_k a_{nk} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix}.$$
Se poniamo
$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix},$$
abbiamo che $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente dipendenti se e solo se il sistema lineare omogeneo
$$A\,X = 0$$
ammette una soluzione non banale $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix}$.

3. Basi di spazi vettoriali

Definizione 3.1. *Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$. Un sottoinsieme di vettori*
$$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$$
si dice base di V (finita) se valgono le seguenti:

(1) (B1) $v_1, \dots, v_n$ generano V;
(2) (B2) $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti.

Proposizione 3.2. *Un sottoinsieme $\{v_1, \dots, v_n\}$ di V é una base di V se e solo se per ogni ettore $v \in V$, esistono e sono unici dei coefficienti $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tali che*
$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n.$$
In tal caso gli scalari $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ si chiamano coordinate di v nella base $\{v_1, \dots, v_n\}$.

Dimostrazione. Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V. Poiché sono dei generatori di V, ogni vettore $v \in V$ si puó scrivere come combinazione lineare
$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n.$$
Supponiamo che si abbia anche
$$v = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n.$$
Sottraendo la seconda equazione alla prima otteniamo
$$0 = (\lambda_1 - \mu_1)v_1 + \cdots + (\lambda_n - \mu_n)v_n.$$
Essendo $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base, i vettori sono anche linearmente indipendenti, quindi si ha
$$\lambda_1 = \mu_1, \dots, \lambda_n = \mu_n,$$
da cui la tesi.

Viceversa, supponiamo che ogni vettore di V si possa esprimere in modo unico nella forma
$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n.$$
Da ció segue, in particolare, che i vettori $\{v_1, \dots, v_n\}$ formano un insieme di generatori di V.

Mostriamo infine che sono linearmenet indipendenti. Consideriamo una loro combinazione lineare che dia il vettore nullo:
$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0.$$
Siccome il vettore nullo ammette la rappresentazione
$$0 = 0 \cdot v_1 + \cdots + 0 \cdot v_n,$$
per l'ipotesi di unicitá della rappresentazione di ogni vettore come combinazione lineare dei vettori $\{v_1, \dots, v_n\}$, si ha che necessariamente
$$\alpha_1 = 0, \dots, \alpha_n = 0,$$
quindi $v_1, \dots, v_n$ sono anche linearmente indipendenti, e formano una base. $\square$

Esempi 3.3.

Sia $V = \mathbb{K}^n$. Allora si ha una base naturale, detta base canonica di $\mathbb{K}^n$:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Teorema 3.4. *Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$, e siano $v_1, \ldots, v_k$ dei generatori per V. Allora esiste una base $\mathcal{B} \subseteq \{v_1, \ldots, v_k\}$.*

Continua ...