Corso di GEOMETRIA
Dipartimento di Ingegneria ed Architettura
Università degli Studi di Trieste
Prof. Fabio Perroni

ESERCIZI: SOTTOSPAZI, COMBINAZIONI LINEARI, BASI - II

1. Sia
$$V = \{ {}^t \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \} .$$

(a) Si dimostri che V è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ e se ne determini la dimensione.

(b) Siano
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \in V .$$

Si trovi un sottoinsieme $\mathcal{B} \subseteq \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ che sia una base di V.

(c) Si estenda $\mathcal{B}$ a base di $\mathbb{R}^4$.

2. Nello spazio $M_{2,2}(\mathbb{R})$ delle matrici 2×2 a coefficienti reali, si considerino le matrici
$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$
Sia $U = \mathrm{Span}(M_1, M_2, M_3)$ il sottospazio vettoriale di $M_{2,2}(\mathbb{R})$ generato da M_1, M_2, M_3.

(a) Determinare la dimensione di U ed esibirne una base $\mathcal{B}$.

(b) Estendere la base $\mathcal{B}$ del punto (a) ad una base di $M_{2,2}(\mathbb{R})$.

3. Si dica se il seguente sistema di equazioni lineari nelle incognite x_1, x_2, x_3 a coefficienti in $\mathbb{R}$ è compatibile (cioè se ha soluzioni), e nel caso affermativo se ne determini l'insieme delle soluzioni:
$$\text{(SL)} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 & = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 & = 2 . \end{cases}$$

i) Si determini la dimensione ed una base $\mathcal{B}$ del sottospazio vettoriale W di $\mathbb{R}^3$ formato dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato ad (SL).

ii) Si completi $\mathcal{B}$ ad una base $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^3$.

iii) Sia $V = \text{Span}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \subset \mathbb{R}^3$. Si dica se la somma $W + V$ è diretta.

4. Trovare una base per la somma ed una per l'intersezione dei seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$:

$$U = \text{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\\-1\end{pmatrix}\right),$$

$$W = \text{Span}\left(\begin{pmatrix}0\\4\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right).$$

Trovare un sottospazio supplementare V ad U in $\mathbb{R}^4$, cioè tale che $U \oplus V = \mathbb{R}^4$.

5. In $\mathbb{R}^4$, sia $U = \text{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\2\end{pmatrix}\right)$ e sia V il sottospazio delle soluzioni del seguente sistema lineare omogeneo $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 & = 0 \\ 2x_2 - x_4 & = 0\,. \end{cases}$

1. Si determini la dimensione ed una base di $U + V$.
2. Si determini la dimensione ed una base di $U \cap V$.
3. Si completi la base di $U \cap V$, trovata al punto (ii), ad una base di U.

6. Si considerino i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix}4\\1\\1\\0\\-2\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\4\\-1\\2\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}4\\3\\9\\-2\\2\end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\ v_5 = \begin{pmatrix}0\\-2\\0\\2\\4\end{pmatrix} \subset \mathbb{R}^5\,.$$

a) Si determini una base di $V = \text{Span}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$.

b) Si determinino tutte le basi $\mathcal{B}$ di V, tali che $\mathcal{B} \subset \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$.

7. Si dimostri che $\mathbb{C}$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione 2.