ESERCIZI DI GEOMETRIA 1, FOGLIO 2

Trieste, 16 ottobre 2018

1. (i) Sia V un K-spazio vettoriale. Siano u, v, w vettori linearmente indipendenti di V. Verificare che anche $u + v, v - w, u + 5w$ sono linearmente indipendenti.
   (ii) Per quali $t \in \mathbb{R}$ i seguenti tre vettori di $\mathbb{R}^3$ sono linearmente indipendenti: $(1, 3, 4), (3, t, 11), (-1, -4, 0)$?
   (iii) Dimostrare che due vettori $(a, b), (c, d)$ di K^2 sono linearmente indipendenti se e solo se $ad - bc \neq 0$.
   (iv) Nel $\mathbb{Q}$- spazio vettoriale $\mathbb{R}$, dimostrare che i vettori (numeri reali) $1, \sqrt{2}$ sono linearmente indipendenti. Stessa domanda per $\sqrt{2}, \sqrt{3}$.

2. Siano X un insieme, V un K-spazio vettoriale e $Hom(X, V)$ l'insieme delle applicazioni $f : X \to V$. Verificare che anche $Hom(X, V)$ è un K-spazio vettoriale con le operazioni di somma e prodotto definite punto per punto:
$$(f + g)(x) = f(x) + g(x);\ (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$
Considerando poi il caso di $Hom(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, dimostrare che ognuna delle seguenti famiglie di funzioni è linearmente indipendente in $Hom(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:
$\{\cos(x), \sin(x)\},\ \{e^x, e^{2x}\},\ \{\cos(x), \sin(x), e^x\}, \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$.

3. Siano V un K-spazio vettoriale e $W \subset V$ un suo sottospazio vettoriale. Introduciamo in V la relazione: $v_1 \sim v_2$ se $v_1 - v_2 \in W$.
   (i) Dimostrare che $\sim$ è una relazione d'equivalenza;
   (ii) detta $[v]$ la classe d'equivalenza di $v \in V$, dimostrare che $[v] = \{v + w | w \in W\}$, denotato anche simbolicamente $v + W$.
   (iii) Denotiamo V/W l'insieme quoziente. Dimostrare che le seguenti definizioni di somma e prodotto in V/W sono ben poste:
$$[v_1] + [v_2] = [v_1 + v_2];\ \lambda[v_1] = [\lambda v_1]$$
   e definiscono su V/W una struttura di K-spazio vettoriale.

4. (i) Trovare gli inversi di tutti gli elementi non nulli di $\mathbb{Z}_{13}$. Si ottiene così il gruppo moltiplicativo di 12 elementi $\mathbb{Z}_{13} \setminus \{0\}$: tale gruppo ha qualche analogia con il gruppo additivo $(\mathbb{Z}_{12}, +)$?
   (ii) Trovare gli inversi di tutti gli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_{12}$, e verificare che formano un gruppo di 4 elementi rispetto al prodotto.