ESERCIZI DI GEOMETRIA 1, FOGLIO 3

Trieste, 23 ottobre 2018

1. Il prodotto cartesiano $V \times W$ di due K-spazi vettoriali è un K-spazio vettoriale, con le seguenti operazioni:

$$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2), \quad \lambda(v, w) = (\lambda v, \lambda w).$$

Dimostrare che, se $v_1, \ldots, v_n$ formano una base di V e $w_1, \ldots, w_m$ una base di W, allora $(v_1, 0), \ldots, (v_n, 0), (0, w_1), \ldots, (0, w_m)$ è una base di $V \times W$.

2. Sia $w_1, \ldots, w_m$ una base del sottospazio W di V, e sia $w_1, \ldots, w_m, v_{m+1}, \ldots, v_n$ un suo prolungamento a una base di V. Dimostrare che le classi d'equivalenza $[v_{m+1}], \ldots, [v_n]$ costituiscono una base dello spazio quoziente V/W (introdotto nel foglio 2, esercizio 3).

3. Una matrice quadrata $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ è detta simmetrica se A coincide con la sua trasposta ${}^tA$, e antisimmetrica se $A = -{}^tA$.

(i) Dimostrare che le matrici simmetriche formano un sottospazio vettoriale, detto $Sym(n \times n, \mathbb{R})$, di $M(n \times n, \mathbb{R})$; trovare una base e la dimensione di questo sottospazio.

(ii) La stessa cosa per le matrici antisimmetriche $Alt(n \times n, \mathbb{R})$.

(iii) Dimostrare che $M(n \times n, \mathbb{R}) = Sym(n \times n, \mathbb{R}) \oplus Alt(n \times n, \mathbb{R})$ (somma diretta).

4. Dire, motivando la risposta, se in $\mathbb{R}^3$ il vettore w è o meno combinazione lineare di v_1, v_2, v_3 nei seguenti casi:

(i) $w = (6, 2, 1), v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (7, 3, 1), v_3 = (2, 5, 8)$;

(ii)$w = (2, 1, 1), v_1 = (1, 5, 1), v_2 = (0, 9, 1), v_3 = (3, -3, 1)$.

5. Siano W_1, W_2 sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V. Dimostrare che $W_1 \cup W_2$ è un sottospazio se e solo $W_1 \subset W_2$ o $W_2 \subset W_1$.