Vale il Teorema Data una matrice A:
Il rango per righe coincide con il rango per colonne.
Dim. più avanti.

Esempi ① Matrice identica $I_n = (\delta_{ij})_{i,j=1,\dots}$

②
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

③
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

rango per righe e per colonne è 2

④
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & \frac{1}{2} & 1 & -1 \\ 4 & 0 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$ rg è 2

SISTEMI LINEARI

$A = (a_{ij})$ matrice $m \times n$ a entrate in K

$b_1, \dots, b_m \in K$

$$(*) \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

con $x_1, \dots, x_n$ incognite è un sistema lineare di m equazioni in n incognite

A è la matrice del sistema o matrice dei coefficienti

$(A|b)$ è la matrice completa, dove $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

Una soluzione di $(*)$ è un vettore $v \in K^n$,

$v = (v_1, \dots, v_n)$ t.c. $\begin{cases} a_{11}v_1 + \dots + a_{1n}v_n = b_1 \\ \vdots \end{cases}$

Se $b_1 = \dots = b_m = 0$ sistema omogeneo

$$(**)\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n} = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots = 0 \end{cases}$$

è il sistema omogeneo associato al sistema (*).

Un sistema omogeneo ha sempre la soluzione nulla $(0, \dots, 0)$
Se un sistema lineare ha almeno una soluzione si dice compatibile. Un sistema lineare omogeneo è sempre compatibile.
Un sistema lin. non omogeneo può essere o no compatibile; se lo è può avere una o più soluzioni.

$n = m = 1$ $\qquad ax = b$

se $a \neq 0$ $\qquad x = \frac{b}{a}$ $\qquad$ 1! soluzione

se $a = 0$, $b \neq 0$ non compatibile.

se $a = b = 0$, ogni $v \in K$ è soluzione.

OSSERVAZIONE IMPORTANTE

Il sistema lineare (*) si può scrivere anche nella forma

$$x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + x_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

ossia $x_1 a^1 + x_2 a^2 + \dots + x_n a^n = b$.

Quindi: il sistema è compatibile $\iff$ il vettore b è combinazione lineare dei vettori $a^1, \dots, a^n$, cioè se $b \in \langle a^1, \dots, a^n \rangle$: spazio delle colonne di A.

In tal caso una soluzione è data dai coefficienti di una comb. lin. di $a^1, \dots, a^n$ uguale a b. Se $a^1, \dots, a^n$ sono in più linearmente indipendenti, la soluzione è unica.

Esempi di conseguenze di questa osservazione

Es. Sistema omogeneo: se le colonne di A sono lin. dipendenti, ci sono soluzioni non nulle.
Ogni colonna è un vettore di K^m; le colonne sono n: se $\boxed{n > m}$ certamente il sistema ha soluzioni non banali.

Es. Caso $m = n$.
Ho tante equazioni quante incognite. Se le colonne sono lin. indip., costituiscono una base di K^n. Allora, qualunque sia b, il sistema ha 1! soluzione.

Primo metodo di risoluzione dei sistemi lineari: algoritmo di eliminazione di Gauss.
Si trasforma il sistema di partenza $(*)$ in un sistema lineare equivalente, mediante trasformazioni elementari nella

matrice completa $(A \vdots b)$.

Due sistemi lineari si dicono equivalenti se hanno le stesse soluzioni.

Trasformazioni elementari di matrici.

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

I tipo: moltiplicazione di una riga per uno scalare $\lambda \neq 0$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{I}} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_i \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

II tipo: addizione della j-esima riga alla i-esima

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II}} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i + a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

III tipo: addizione alla i-esima riga di un multiplo della j-esima

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i + \lambda a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \qquad \text{III} = \text{I}_j \to \text{II} \to \text{I}_j.$$

IV tipo: scambio di 2 righe

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix}$$

si può ottenere applicando I e II (Fischer, pag. 94)

Prop. Lo spazio delle righe di A non cambia applicando trasformaz. elementari.

Prop. Dato il sistema lineare $(*)$, consideriamo la matrice completa $(A \mid b)$. Se si applicano ad $(A \mid b)$ trasformaz. elementari, si ottiene un sistema lineare equivalente.

L'algoritmo di eliminazione di Gauss fa passare da un sistema lineare $(*)$ ad un sistema lui equivalente, mediante trasformazioni elementari che è "facile" da risolvere.
La matrice completa viene trasformata in una matrice a gradini o a scala.

Def. Matrice a gradini è una matrice della forma:

$$B=\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & p_1 & * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * \\
\vdots & & \vdots & 0 & \cdots & 0 & p_2 & * & \cdots & * \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & 0 & & p_r\ * & \cdots\ * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & & & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

$\uparrow j_1 \qquad \uparrow j_2 \qquad \uparrow j_r$

dove $p_1, p_2, \ldots, p_r$ sono $\neq 0$.
Sotto la "scala" è tutto 0.
Gli elementi $p_1, \ldots, p_r$ sono i pivot della matrice. Sono nelle colonne $j_1, j_2, \ldots, j_r$.
Un sistema lineare è a gradini se lo è la sua matrice completa.

p_1 è il primo elem. non nullo della matrice: primo pivot. Sotto è tutto 0; p_2 è il primo elem. non nullo della 2ª riga ecc.

Proposizione: sia B la matrice a gradini della pagina precedente, di righe b_1, b_2,...

Le righe $b_1, b_2, \ldots, b_r$ sono lin. indip., e le successive sono nulle, allora $b_1, \ldots, b_r$ formano una base dello spazio delle righe di B, e $r = rg(B)$ (per righe).

Dim.

Se $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_r b_r = 0$, si ha:

$$\lambda_1(0\ldots 0\, p_1 * \ldots) + \lambda_2(0\ldots 0\, p_2 * \ldots) + \ldots + \lambda_r(0\ldots p_r * \ldots) =$$

$$= (0\ldots 0\, \lambda_1 p_1, \lambda_1 *, \lambda_1 * + \lambda_2 p_2, \ldots)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0$, rimane $\lambda_2(0\ldots 0\, p_2 * \ldots) + \ldots$

$\Rightarrow \lambda_2 = 0$ ecc.

ALGORITMO DI GAUSS PER RIDURRE A GRADINI UNA MATRICE

Parto da una matrice $A \in M(m \times n, K)$ e la trasformiamo in una matrice B a scala. Se A è nulla abbiamo finito. Altrimenti sia a^{j_1} la prima colonna non nulla. Scambiando eventualmente la prima riga con una successiva, possiamo supp. che $a_{1j_1} \neq 0$ e poniamo $p_1 = a_{1j_1}$. Ora sommiamo alla riga h-esima, $\forall h \geq 2$, un opportuno multiplo della prima, in modo da annullare tutti gli elementi sotto a_{1j_1}. D'ora in poi la prima riga resta fina. Consideriamo le righe dalla seconda in poi: se sono tutte nulle abbiamo finito, (oppure se la matrice ha una sola riga); altrimenti ~~scambiando~~ sia j_2 la prima colonna che contiene un elem. non nullo, e supponiamo, eventualmente scambiando la seconda con una riga successiva, che sia nella seconda riga: $p_2 = a_{2j_2}$. Ora annulliamo tutti gli elem. sotto p_2 sommando alla riga h-esima, con $h \geq 3$, un multiplo della seconda. E così via, finché si arriva ad avere le ultime righe tutte nulle, oppure l'ultimo pivot nell'ultima riga.

<u>Esempio</u> $K = \mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$

primo pivot

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{IV} \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

colonna nulla

colonna non nulla

$$\xrightarrow{III} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{IV} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

colonna nulla sotto il primo elem.

meglio avere 1 come pivot

$$\xrightarrow{IV}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

posso farlo diventare 1 con la I

Il rango è 3; i pivot sono nelle colonne $j_1 = 2$, $j_2 = 4$, $j_3 = 5$.
b_1, b_2, b_3 sono lin. indip.

RISOLUZIONE DI UN SISTEMA LINEARE

Se un sistema lineare ha la matrice completa a gradini, lo si risolve con il metodo di sostituzione all'indietro.

Esempio

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{III}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & +1 & +1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

a gradini: Parto dall'ultima:

$$\begin{cases} 2x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \end{cases} \qquad \begin{aligned} & x_3 = \frac{1}{2} \\ & x_2 = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \\ & x_1 = +3 - \frac{1}{2} - 1 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

sostituisco

Il sistema ha 1! soluzione.