ISTITUZIONI DI ANALISI E GEOMETRIA MOD A
AA 2018/19
ESERCIZI FOGLIO N. 1

(1) Sia $O \subset \mathbb{R}^n$ un aperto. Provare che $O \in \mathcal{F}_\sigma$.

(2) Sia

$$\mathcal{U} = \{U \subset \mathbb{R}^n | U = \text{ unione finita di intervalli } I_k\} \ .$$

a) Provare che $\mathcal{U}$ è un'algebra.

b) Se $U \in \mathcal{U}$ è unione finita di intervalli disgiunti $I_1, \dots, I_K$ si ponga

$$\nu(U) = \sum_{k=1}^{K} \lambda(I_k) \ ,$$

provare che ν è una misura sull'algebra $\mathcal{U}$.

(3) Siano dati $a_1, \dots, a_n > 0$ e sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la trasformazione lineare data da $Tx = (a_1 x_1, \dots, a_n x_n)$. Provare che se E è misurabile secondo Lebesgue, anche l'insieme

$$TE = \{x = Ty | y \in E\}$$

è misurabile e vale

$$\mu(TE) = \prod_{i=1}^{n} a_i \mu(E) \ .$$