GEOMETRIA
FOGLIO 6

Esercizio 1(a) Per dimostrare che V è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ dobbiamo mostrare per definizione che

1) se $v, w \in V$, allora $v+w \in V$

2) se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $v \in V$ allora $\lambda v \in V$

Controlliamo il punto 1. Prendiamo

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \quad \text{con} \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$w = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \quad \text{con} \quad y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0$$

Per definizione di somma in $\mathbb{R}^4$ abbiamo

$$v + w = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \\ x_4+y_4 \end{pmatrix}$$

In generale $v+w \in \mathbb{R}^4$. Per mostrare che $v+w \in V$ dobbiamo verificare che la somma delle sue coordinate è nulla.

$$\underbrace{(x_1+y_1)}_{1^\circ \text{ coord } v+w} + \underbrace{(x_2+y_2)}_{2^\circ \text{ coord } v+w} + \underbrace{(x_3+y_3)}_{\dots} + \underbrace{(x_4+y_4)}_{\dots} =$$

$$\underset{\text{somma in } \mathbb{R}}{=} x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + x_3 + y_3 + x_4 + y_4$$

$$= \underbrace{(x_1+x_2+x_3+x_4)}_{0 \text{ per hp}} + \underbrace{(y_1+y_2+y_3+y_4)}_{0 \text{ per hp}}$$

$$= 0$$

Analogamente per verificare il punto 2, prendiamo $\lambda \in \mathbb{R}$ e

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \quad \text{tale che} \quad x_1+x_2+x_3+x_4=0$$

Allora per definizione di moltiplicazione per scalare in $\mathbb{R}^4$ ho

$$\lambda v = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \\ \lambda x_4 \end{pmatrix}$$

Anche in questo caso dobbiamo verificare che λv stia in V sommandone le coordinate:

$$(\lambda x_1) + (\lambda x_2) + (\lambda x_3) + (\lambda x_4) = \lambda x_1 + \lambda x_2 + \lambda x_3 + \lambda x_4$$

$$= \lambda \underbrace{(x_1+x_2+x_3+x_4)}_{0 \text{ per hp}}$$

$$= 0$$

Allora V è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.

Per determinare la dimensione di V dobbiamo determinarne una base (vai a rivedere la definizione di dimensione !).

Il metodo più semplice consiste in questa osservazi
Il sottospazio V è determinato da 1 sola equaz.
con 4 incognite. Il numero di parametri liberi da scegliere è

$$\#\text{incognite} - \text{rango} = 4 - 1 = 3$$

dove il rango è il numero di righe non nulle del sistema lineare alla fine del procedimento di Gauss (questo è un caso particolare in cui il sistema lineare è costituito da 1 sola equazione).

~~Il parametri~~ Il precedente conto mi serve a dire che posso esprimere un numero di variabili pari al rango (ossia uno) in termini di altre tre: questo è un lungo conto solo per notare che

$$x_1 = -x_2 - x_3 - x_4$$

Questo però è fondamentale perché mi dice che un vettore $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ appartiene a V se e

solo se $x_1 = -x_2 - x_3 - x_4$, ossia

che tutti e soli i vettori di V sono della forma

$$\begin{pmatrix} -x_2-x_3-x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Per variabili $x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$.

L'idea ora è spezzare questo vettore in ~~termini~~ vettori che contengono ognuno una sola variabile: ovviamente

$$\begin{pmatrix} -x_2-x_3-x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_3 \\ 0 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_4 \\ 0 \\ 0 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Ricordando com'è definita la moltiplicaz. per scalare in $\mathbb{R}^4$ abbiamo

$$\begin{pmatrix} -x_2-x_3-x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ricordando ora la definizione di Span abbiamo che un vettore $v \in \mathbb{R}^4$ appartiene a V

se e solo se $\quad v \in \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Ricordando che le uguaglianze tra insiemi si verificano per doppia inclusione, il precedente conto ci mostra che

$$V = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

e quindi questi tre vettori generano V (ricontrolla la definizione di generare!).

Per avere una base tuttavia abbiamo ~~da~~ bisogno di vettori anche linearmente indipend. ~~In generale~~ In generale un sistema di generatori <u>contiene</u> e basta vettori linearm. indip. ma in questo caso lo sono tutti e 3. Supponiamo infatti che esistano $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{vettore nullo in } \mathbb{R}^4}$$

Per definizione di somma e moltiplic per scalare abbiamo

$$\begin{pmatrix} -\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che equivale al sistema lineare

$$\begin{cases} -\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

La soluzione da trovare è molto facile ed è

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Questo dimostra che i tre vettori sono linearm. indipendenti e quindi sono una base.
Allora la dimensione di V è 3
(come il numero di vettori della base).

(b) Consideriamo i vettori v_1, v_2, v_3, v_4 che appartengono a V poiché per ognuno di loro la somma delle coordinate è 0. Dobbiamo trovare una base di V (che per il punto prima deve necessariamente essere costituita da 3 vettori) tra questi quattro. Per definizione i tre vettori che stiamo cercando devono essere generatori e linearmente indipendenti.
In questo caso però si può usare un trucco (ossia un teorema visto in classe): siccome sappiamo già che $\dim V = 3$, allora

- se troviamo 3 vettori tra $v_1, \dots, v_4$ che sono linearmente indipendenti, allora questi necessariamente generano V e sono una base di V.

- Se troviamo 3 vettori tra $v_1, \dots, v_4$ che generano V, questi sono necessariamente linearmente indipendenti e allora sono una base di V

(Sapendo la cardinalità della base, conoscere una proprietà tra GENERANO e LIN. INDIP automaticamente implica l'altra risparmia dati un sacco di conti).

I due metodi descritti dai puntini sono ugualmente validi ma io personalmente preferisco il primo poiché è più algoritmico e meno concettuale.

Usiamo il metodo di Gauss (i vettori linearm indip ~~...~~ corrispondono alle righe non nulle alla fine dell'algoritmo)

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{matrix}$$

scambio 2° e 3° riga

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 1 & -6 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

questi vettori sono linearm. indip.

Tuttavia questi non sono quelli originari: devo prendere i vettori originali $v_1, \dots, v_4$ che corrispondono a queste righe facendo attenzione al fatto che a un certo punto ho scambiato le righe.

per questo motivo a lezione vi ho detto di non scambiare le righe: non è un divieto assoluto ma un consiglio che deriva da aver visto per anni dimenticarsi e sbagliarsi su questa sottigliezza.

Nello specifico i nostri vettori ~~[illegible]~~ sono v_1, v_2, v_3

(c) Dobbiamo trovare un quarto vettore che sia linearmente indipendente con i 3 primi. Una scelta sicura è $(0,0,0,1)$: infatti, siccome ha tre zeri come prime cifre, questo vettore non viene mai modificato dall'algoritmo di Gauss. Ripetendo i passi ottengo allora

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

4 righe non nulle

Per ~~lo~~ stesso principio che ho enunciato prima quattro vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}$ (che è spazio vett. di dim = 4) sono una base.

■

Esercizio 3 Prendiamo il sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{Scambio righe}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauss}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \end{array}\right)$$

Il sistema è compatibile allora ha soluzioni non banali. Dalla teoria sappiamo che una soluzione di questo sistema è data da una soluzione particolare più una soluzione del sistema lineare omogeneo (che è identico ma con la colonna a DX fatta di zeri).

Sappiamo che il numero di parametri liberi è

$$\#\text{incognite} - \text{rango} = 3 - 2 = 1$$

e possiamo scegliere x_3 come param libero.

Se per esempio scegliamo $x_3 = 0$ allora

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ x_2 &= -3 \end{aligned} \longrightarrow x_1 = 5$$

quindi una soluzione particolare del sistema NON OMOGENEO è

$(5,-3,0)$

Passiamo ora al sistema omogeneo

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \end{array}$$

Preso $x_3=\lambda$ come parametro libero ho

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=0 \\ x_2-5x_3=0 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} x_2=5\lambda \\ x_1=-x_2-2x_3=-5\lambda-2\lambda=-7\lambda \end{cases}$$

Allora la generica soluzione (x_1,x_2,x_3) del sistema lineare omogeneo è

$$(-7\lambda,5\lambda,\lambda)=\lambda(-7,5,1)$$

Il vettore $(-7,5,1)$ è base dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo (che allora ha dim 1)

Se il sistema non è omogeneo, allora lo spazio delle sue soluzioni non è uno spazio vettoriale e quindi non ha senso cercarne una base.

La soluzione generalissima di (SL) è allora

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) Completiamo $\begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ a una base di $\mathbb{R}^3$.

Se scegliamo $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ abbiamo

che $\begin{matrix} -7 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$. Questo ci dice che abbiamo tre vettori linearm indipend. in $\mathbb{R}^3$ e quindi sono una base.

(c) Per definizione $W = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$V = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La somma $W+V$ è diretta se e solo se $W \cap V$ è lo spazio vett banale.

Supponiamo che esista un vettore $v \in W \cap V$ e stabiliamo se è nullo o no. Per definizione

- $v \in W \cap V \subseteq W \longrightarrow \exists\, \lambda \mid v = \lambda \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $v \in W \cap V \subseteq V \longrightarrow \exists\, \mu \mid v = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Allora

$$\lambda \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -7\lambda \\ 5\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \\ \mu \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} -7\lambda - \mu = 0 \\ 5\lambda = 0 \\ \lambda - \mu = 0 \end{cases}$$

sistema lineare nelle 2 variabili μ e λ

Chiaramente da questo sistema viene fuori che $\lambda = 0$ e allora $v = 0$.

Quindi $W \cap V = \{0\}$ e $W + V$ è somma diretta.

<u>Esercizio 4</u> Iniziamo determinando una base per l'intersezione di $U \cap V$. Supponiamo esiste $v \in U \cap V$. Per definizione

- $v \in U \cap V \subseteq U \rightarrow \exists\, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \mid v = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

- $v \in U \cap V \subseteq V \rightarrow \exists\, \mu_1, \mu_2 \mid v = \mu_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Allora

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \mu_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 2\lambda_1 \\ \lambda_1 \\ -\lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\lambda_2 \\ \lambda_2 \\ 0 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\lambda_3 \\ 2\lambda_3 \\ \lambda_3 \\ -\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4\mu_1 \\ \mu_1 \\ 3\mu_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_2 \\ 0 \\ \mu_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \\ \lambda_1 + \lambda_3 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_2 \\ 4\mu_1 \\ \mu_1 + \mu_2 \\ 3\mu_1 \end{pmatrix}$$

che è

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 - \mu_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 - 4\mu_1 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 - \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - 3\mu_1 = 0 \end{cases}$$

Per chiarezza (che è diversa dalla semplicità) scriviamo

$$\lambda_1 = x_1 \quad \lambda_2 = x_2 \quad \lambda_3 = x_3 \quad -\mu_1 = x_4 \quad -\mu_2 = x_5$$

così che otteniamo il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Risolviamolo con Gauss.

nota che le colonne sono i vettori che spannano U e W

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 0 & +1 \\ 2 & 1 & 2 & +4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & +1 & +1 \\ -1 & 1 & -1 & +3 & 0 \end{matrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 0 & +1 \\ 0 & -3 & -4 & +4 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & +1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & +3 & +1 \end{matrix}$$

$$\cancel{\rightsquigarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & +4 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & +1 & +1 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & +3 & -\frac{1}{2} \end{matrix}} \quad \cancel{\xrightarrow{\text{scambio}} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 1 & +1 & +1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & +4 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & +3 & -\frac{1}{2} \end{matrix}}$$

~~rango è 4~~
~~parametri liberi~~
~~5 - 4 = 1~~

~~Quindi scelgo come parametro libero x_2~~

~~$\begin{cases} x_3 = x_4 = x_5 = 0 \\ x_1 = -2x_2 \end{cases}$ è la soluzione.~~

~~Ma $x_4 = \mu_1$ $x_5 = \mu_2$ allora $V = \emptyset$ e lo scambio è diretto. Si poteva vedere~~ anche

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 2/3 & -5/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & -2 & 7 & -1 \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 7 & -1 \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{matrix}$$

rango 4
parametri liberi 1
scelgo x_5

Allora la generica soluzione è

$$x_5 = a$$

$$x_4 = -\frac{3}{2}a$$

I parametri x_3, x_2, x_1 non ci interessano, poiché dobbiamo determinare il vettore v iniziale

$$v = \mu_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - x_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{3}{2}a \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3/2 \\ 9/2 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= a \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 5/2 \\ 9/2 \end{pmatrix}$$

Allora un vettore v appartiene a $U \cap W$ se e solo se

$$v \in \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 5/2 \\ 9/2 \end{pmatrix}$$

Questo vettore è una base dell'intersezione (che quindi è un sottospazio di dim 1).

La somma ha dimensione

$$\dim U + W = \dim U + \dim W - \dim U \cap W$$

$$\overset{!}{=} 3 + 2 - 1 = 4$$

e quindi è tutto $\mathbb{R}^4$.

Per completare l'esercizio cerchiamo un $V \subseteq \mathbb{R}^4$ tale che $U \oplus V = \mathbb{R}^4$. Ciò significa che $U \cap V = \emptyset$ e allora

$$\dim V = \dim \underbrace{U+V}_{\mathbb{R}^4 \text{ poiché lo stiamo imponendo}} - \dim U - \dim \underbrace{U \cap V}_{\emptyset}$$

$$= 4 - 3 - 0 = 1$$

Ci basta allora trovare un vettore v che non appartenga a U. Tornando a pag 13 notiamo che

$$\underbrace{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{matrix}}_{\text{lo span di queste colonne}} \xrightarrow{\text{Gauss}} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{\text{lo span di queste colonne}}$$

lo span di queste colonne = lo span di queste colonne

Quindi è chiaro che basta prendere un vettore $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ che è linearmente indip dagli altri tre vettori

■