

Esercizi di Geometria
Ingegneria Industriale e Navale 2018/2019
settimo foglio

October 30, 2018

1. Siano $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ e $B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. Si dimostri che

$$\text{rg}(A \cdot B) \leq \min\{\text{rg}A, \text{rg}B\}.$$

Si fornisca un esempio di matrici in cui vale il minore stretto ed un esempio in cui vale l'uguaglianza.

2. Si determini il rango r di ciascuna delle seguenti matrici e si individuino in tutti i casi r vettori colonna linearmente indipendenti:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Si determini l'inversa, se esiste, di ognuna delle seguenti matrici.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C}), \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q}),$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Per ogni valore del parametro $t \in \mathbb{R}$ si calcoli il rango della seguente matrice:

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & t & 1 \\ 0 & 1 & t \end{pmatrix}.$$

Per ogni $t \in \mathbb{R}$ tale che A_t è invertibile, si calcoli la matrice inversa A_t^{-1} di A_t .