ESERCIZI DI GEOMETRIA 1, FOGLIO 4

Trieste, 6 novembre 2017

1. Si consideri il sistema lineare a coefficienti in $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 3x_4 + x_5 & = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 + x_5 & = 0 \\ -x_1 + x_3 - x_4 + x_5 & = 1 \\ x_1 - x_3 + 5x_4 + 3x_5 & = 3. \end{cases}$$

Scrivere la matrice A dei coefficienti e la matrice completa A'. Applicare l'algoritmo di Gauss per trasformarle in matrici a gradini, indicando i gradini e i pivot. Scrivere poi il nuovo sistema lineare a gradini, i ndicare i parametri liberi, trovare lo spazio delle soluzioni W del sistema omogeneo associato, una base di W e una soluzione particolare del sistema generale.

2. Applicare l'algoritmo di Gauss al seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 3x_4 & = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 & = 8 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_4 & = b \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 & = 2. \end{cases}$$

Indicare i pivot, dire per quali valori di b il sistema è compatibile, determinare la dimensione dello spazio W delle soluzioni del sistema omogeneo associato.

3. Sia $f : V \to W$ un'applicazione e $G = \{(v, f(v) : v \in V\} \subset V \times W$ il grafico di f. Dimostrare che f è lineare se e solo se G è un sottospazio vettoriale di $V \times W$.

4. Si consideri il sistema lineare omogeneo avente M come matrice associata:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a+2 \\ 2a+1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Discutere e risolvere il sistema al variare di $a \in \mathbb{R}$.