Applicazioni lineari

Def. V, W sp. vett. su K. Un'applicazione $f: V \to W$ è detta lineare se

1) $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V$

f conserva la somma o è compatibile con la somma

2) $f(\lambda v) = \lambda f(v), \quad \forall v \in V, \forall \lambda \in K$

f conserva il prodotto esterno.

Oss. f è lineare $\Leftrightarrow f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in K, \forall v_1, v_2 \in V$.

Prop. Sia f lineare.

1) $f(0_V) = 0_W$
2) $f(-v) = -f(v)$.

Dim.

1) $f(0) = f(\underset{\in K}{0} \cdot \underset{\in V}{0}) = 0\, f(0) \underset{\text{per la 2)}}{=} 0$

2) $f(-v) = f((-1)(v)) = (-1) f(v) = -f(v)$.

Oss. Se $f(0) \neq 0 \Rightarrow f$ non è lineare.

Un'appl. lin. è costante $\Leftrightarrow f(v) = 0 \ \forall v$: appl. lineare nulla.

Esempi

1) $f : \mathbb{R} \xrightarrow{\cdot a} \mathbb{R}$ def. da

$f(x) = ax$, con $a \in \mathbb{R}$ fissato.

$$f(\lambda x + \mu y) = a(\lambda x + \mu y) = \lambda(ax) + \mu(ay) =$$
$$= \lambda f(x) + \mu f(y).$$

2) $f(x) = 2x + 1$ non è lin. $f(0) \neq 0$

3) $f(x) = x^2$ non è lin.

$$f(1+1) = f(2) = 4$$
$$f(1) + f(1) = 1 + 1 = 2$$
($4 \neq 2$)

4) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 \\ x_1 \\ 4x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$ è lineare (verif.)

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$ prod. di matrici

5) $$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + 1 \\ x_2 \\ 4x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$ non è lineare

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Def. Sia $A \in M(m \times n, K)$.

Def. $L(A) : K^n \longrightarrow K^m$

$$L(A)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum a_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum a_{mj} x_j \end{pmatrix}$$

$L(A)$ è un' appl. lineare:

$$L(A)\left(\lambda\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\right)=$$

$$\overset{\text{def.}}{=} A\left(\lambda\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\right)=$$

$$\overset{\text{distr.}}{=} A\left(\lambda\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\right)+A\left(\mu\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\right)=$$

$$\overset{\text{prop d) del prod.}}{=} \lambda A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}+\mu A\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=$$

$$\overset{\text{def.}}{=} \lambda L(A)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}+\mu L(A)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

$\blacksquare$

A matrice $m \times n$ a entrate in K

$L(A): K^n \longrightarrow K^m$ applicaz. lineare associata ad A

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{= x} \longrightarrow \underbrace{A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{= Ax} \in K^m$$

$L(A)(x) = Ax$ $\qquad x$ = vettore colonna

Oss. Sia $e_1, \dots, e_n$ la base canonica di K^n.

$$L(A)(e_1) = Ae_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{m \times n} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{n \times 1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} = a^1$$

$$L(A)(e_i) = a^i$$

Le colonne di A sono i corrispondenti dei vettori della base canonica.

Prop. $f: V \longrightarrow W$ appl. lineare

Allora

(i) Se $V' \subset V$ è un sottosp. vettoriale, allora $f(V') \subset W$ è un sottosp. vett.

(ii) Se $W' \subset W$ è un sottosp. vett. allora $f^{-1}(W') \subset V$ è un sottosp.

Ossia l'immagine di un sottosp. è sottosp. e la controimm.

In particolare $f(V) = \operatorname{Im} f$ = l'immagine di V.

Dim.

(i) Siano $w_1, w_2 \in f(V')$: allora $w_1 = f(v_1)$, $w_2 = f(v_2)$ per opportuni $v_1, v_2 \in V'$

Siano $\lambda_1, \lambda_2 \in K$, considero

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) \overset{f \text{ conserva prod.}}{=}$$
$$= f(\lambda_1 v_1) + f(\lambda_2 v_2) \overset{f \text{ " somma}}{=}$$
$$= f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \in f(V).$$

Ma siccome V' è sottosp. e $v_1, v_2 \in V' \Rightarrow$ $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in V'$ e dunque $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \in f(V')$.

(ii) Siano $v_1, v_2 \in f^{-1}(W')$ ossia $f(v_1) \in W'$, $f(v_2) \in W'$.

Consid. $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$; devo verif. che $f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \in W'$.

Ma $f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) \in W'$, perché W' è sottospazio e dunque $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in f^{-1}(W')$.

— . —

Era stato visto negli esercizi che se V è un K-sp. vett. e X un insieme, allora $\mathrm{Appl}(X, V) = \{ f: X \to V \}$ è un K-sp. vett. definendo le operaz. punto per punto.

<u>Def.</u> V, W K-spazi vettoriali.
$\mathrm{Hom}(V, W) = \{ f: V \to W \mid f$ <u>lineare</u> $\}$
f lineare: sinonimo <u>omomorfismo</u>

$\mathrm{Hom}(V, W)$ è un K-sp. vettoriale.

Dim:

- f, g lineari $\Rightarrow f+g$ lineare
- f lineare, $\lambda \in K \Rightarrow \lambda f$ lineare
- 0 è lineare: appl. nulla
- altre prop. già verif. per $\mathrm{Appl}(V, W)$.

Oss. $\mathrm{Hom}(V, W) \subset \mathrm{Appl}(V, W)$ è un sottosp. vett.

In particolare $V^* \overset{def}{=} \mathrm{Hom}(V, K)$: spazio vettoriale duale.

Terminologia

Sia $f: V \to W$ appl. lineare = omomorfismo

- epimorfismo = suriettiva
- monomorfismo = iniettiva
- isomorfismo = biettiva
- endomorfismo se $V = W$
- automorfismo se $V = W$ e f è isomorfismo

Queste def. estendono quelle di omomorfismo di gruppi.

Prop. Sia $f: V \to W$ un isomorfismo. Allora $\exists f^{-1}: W \to V$ l'applicazione inversa.

Si ha che anche f^{-1} è lineare e dunque è un isom.

Dim. Poniamo $f^{-1} = g$ (per semplif. la scrittura).
Siano $w_1, w_2 \in W$, $\lambda_1, \lambda_2 \in K$.
Dobbiamo verif. che $g(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = \lambda_1 g(w_1) + \lambda_2 g(w_2)$.

~~Poniamo~~ Esistono unici v_1 t.c. $w_1 = f(v_1)$ e $w_2 = f(v_2)$, e dunque $g(w_1) = v_1$ e $g(w_2) = v_2$.
Allora $g(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = g(\lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2)) \underset{f \text{ lin.}}{=}$

$$= g(f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)) \underset{g = f^{-1}}{=} \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 =$$

$$= \lambda_1 g(w_1) + \lambda_2 g(w_2).$$

Nucleo di un'applicazione lineare

Sia $f: V \longrightarrow W$ lineare

Def. nucleo di f, denotato $\ker f$, il sottospazio di V

$$\ker f = f^{-1}(0) = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$$

controimmagine del sottospazio nullo.

Prop. f è iniettiva (monomorfismo) $\iff$ $\ker f = (0)$ sottosp. nullo

Dim. Se f è iniettiva $f^{-1}(0)$ è formato da un unico elemento, necessariamente nullo.
Vicev., se $\ker f = (0)$, siano $v_1, v_2 \in V$ t.c. $f(v_1) = f(v_2)$; allora $\underbrace{f(v_1) - f(v_2)}_{= f(v_1 - v_2)} = 0$

$\Rightarrow v_1 - v_2 \in \ker f = (0) \Rightarrow v_1 - v_2 = 0.$ ■

Teorema della dimensione

Sia $f: V \to W$ appl. lineare
dim V finita

Allora dim V = dim$(\ker f)$ + dim $\mathrm{Im} f$

($\mathrm{Im} f = f(V)$ è sottospazio di W)
dim $\mathrm{Im} f$ è detto <u>rango di f</u> : $rg(f)$)

<u>Dim</u>. Sia $u_1, \dots, u_k$ una base di $\ker f$.
Completo a una base di V: $u_1 \dots u_k \, v_{k+1}, \dots, v_n$.

Vogliamo dim che $f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)$ è una base di $f(V)$.

a) Sono un sistema di generatori:
sia $w = f(v) \in f(V)$. Allora
$v = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k + \lambda_{k+1} v_{k+1} + \dots + \lambda_n v_n$

$w = f(v) = f(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n v_n) =$
$= \lambda_1 \underset{0}{\underset{\|}{f(u_1)}} + \dots + \lambda_k \underset{0}{\underset{\|}{f(u_k)}} + \lambda_{k+1} f(v_{k+1}) + \dots + \lambda_n f(v_n) =$
$= \lambda_{k+1} f(v_{k+1}) + \dots + \lambda_n f(v_n)$.

b) Sono lin. indip.
Se $\mu_{k+1} f(v_{k+1}) + \dots + \mu_n f(v_n) = 0$
$\|$
$f(\mu_{k+1} v_{k+1} + \dots + \mu_n v_n) \Rightarrow$

$\mu_{k+1} v_{k+1} + \dots + \mu_n v_n \in \ker f$
$\|$
$\mu_1 u_1 + \dots + \mu_k u_k$ perché $u_1, \dots, u_k$ è base di $\ker f$ $\Rightarrow$

$\mu_1 u_1 + \dots + \mu_k u_k - \mu_{k+1} v_{k+1} - \dots - \mu_n v_n = 0$

$\Rightarrow \mu_1 = \dots = \mu_k = \mu_{k+1} = \dots = \mu_n = 0$. ∎

$\boxed{\text{Oss: } v_1, \dots, v_n \text{ base di } V \Rightarrow f(v_1), \dots, f(v_n) \text{ generano } \mathrm{Im}\, f.}$

Corollario (importante)

Sia $f: V \longrightarrow W$ lineare con $\dim V = \dim W$ finita (per es. $V = W$).

Allora

f è iniettiva $\Leftrightarrow$ f è suriettiva $\Leftrightarrow$ f è biiettiva.

Dim.

f iniett. $\Leftrightarrow \ker f = (0) \overset{\text{teor. della dim.}}{\Leftrightarrow}$ ~~Alll~~ $\dim V (= \dim W) = \dim \mathrm{Im}(f)$.

Ma $\mathrm{Im}(f) \subset W$ è sottospazio;

$\dim \mathrm{Im}(f) = \dim W \Leftrightarrow \mathrm{Im}\, f = W \Leftrightarrow$ f è suriettiva. ∎

Nel caso di endomorfismi di V, con $\dim V$ finita, ~~[illegible]~~

automorfismo $\Leftrightarrow$ endom. iniett. $\Leftrightarrow$ endom. suriettivo.

Esempio

V K-sp. vett. di dim finita

$\cup|$

W sottosp. vettoriale

V/W sp. quoziente

$\pi: V \longrightarrow V/W$ proiezione canonica.

$v \longrightarrow [v]$

Si ha:

- π è suriettiva per def.
- π è lineare perché le operaz. di + e · sono compatibili con la relaz. d'equivalenza modulo W

$$\pi(\lambda v+\mu v') = [\lambda v+\mu v'] = \lambda[v]+\mu[v'] = \lambda\pi(v)+\mu\pi(v').$$

- $\operatorname{Ker}\pi = \{ v\in V \mid [v] = 0 = W \} = W$

Allora per il teor. della dim.:

$$\dim V = \dim \operatorname{Ker}\pi + \dim \operatorname{Im}\pi = \dim W + \dim V/W$$

ovvia $\dim V/W = \dim V - \dim W$.

Esempio

A $m\times n$ $\qquad A\in M(m\times n, K)$

$$L(A): K^n \longrightarrow K^m$$
$$e_1 \longrightarrow a^1$$
$$\vdots$$
$$e_n \longrightarrow a^n$$

colonne di A

Allora $\operatorname{Im} L(A)$ è generata da $a^1, -, a^n$, e perciò $\operatorname{rg} L(A) = \dim\langle a^1, -, a^n\rangle$ = rango per colonne di A.

Teorema della dim $\Rightarrow$

$\dim \operatorname{Ker} L(A) = n - \operatorname{rg}$ per colonne di A

$\operatorname{Ker} L(A) = \{ x \in K^n \mid L(A)(x) = 0 \}$

$= \{ x \in K^n \mid A x = 0 \} = W$

spazio delle soluzioni del sistema omog.

Ma $\dim W = n - r$ dove r è il rango per righe di A

Conseguenza: rango per righe è uguale a rango per colonne.

Teorema di determinazione di un'appl. lineare.

V, W K-spazi vettoriali.

Fissata una base di V, $v_1, \dots, v_n$, e n vettori qualunque di W $w_1, \dots, w_n$,

esiste una e una sola appl. lineare $f: V \to W$ tale che $f(v_1) = w_1, \dots, f(v_n) = w_n$.

Dim.

Unicità.

Supp. che f esista e sia $v \in V$ un vettore qualunque. Allora v ha un'unica espressione

$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$.

Allora $f(v) = f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) \underset{L}{=} \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n) =$

$= \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n$: unica. f lineare

Esistenza:

Prendiamo la precedente come def. di f, ponendo

$f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n)$.

f è ben def.; basta dim. che f è lineare.

$f(\alpha v + \beta v') = ?$

Sia $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$

$v' = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n$

perciò $\alpha v + \beta v' = \alpha\lambda_1 v_1 + \dots + \alpha\lambda_n v_n +$

$+ \beta\mu_1 v_1 + \dots + \beta\mu_n v_n =$

$= (\alpha\lambda_1 + \beta\mu_1) v_1 + \dots + (\alpha\lambda_n + \beta\mu_n) v_n$ e

perciò

$f(\alpha v + \beta v') = (\alpha\lambda_1 + \beta\mu_1) w_1 + \dots + (\alpha\lambda_n + \beta\mu_n) w_n =$

$= \alpha(\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n) + \beta(\mu_1 w_1 + \dots + \mu_n w_n) =$

$= \alpha f(v) + \beta f(w)$. ∎

<u>Oss. 1.</u> ~~...~~ la prop. precedente vale anche per sp. vett. di dim ∞.

<u>Oss. 2</u> Siano $v_1, \dots, v_n$ base di V

$w_1, \dots, w_n$ " " W

Allora $\exists!$ $f: V \longrightarrow W$ e $\exists!$

$v_1 \longrightarrow w_1$

$\vdots$

$v_n \longrightarrow w_n$

$g: W \longrightarrow V$.

$w_1 \longrightarrow v_1$

$\vdots$

$w_n \longrightarrow v_n$

Allora $(g \circ f)(v_i) = g(f(v_i)) = g(w_i) = v_i \; \forall i$.

Dunque $(g \circ f)(v_i) = id_V(v_i) \quad \forall i$

$\Rightarrow g \circ f = id_V$.

Analogam. $f \circ g = id_W$. Perciò f, g sono isomorfismi inversi uno dell'altro.

Cor. Se $\dim V = \dim W = n$, V e W sono isomorfi; cioè $\exists$ $f: V \longrightarrow W$ isomorfismo $V \simeq W$. Basta fissare 2 basi.

In partic. $\dim V = n \Rightarrow V \simeq K^n$; ma isomorfismo non canonico, dipende dalla scelta di una base di V.

Fissata una base di V $(v_1, \dots, v_n) = \mathcal{B}$, si def. $K_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow K^n$ t.c. $v_i \longrightarrow e_i$.

Allora $\underset{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n}{\overset{v}{\shortparallel}} \longrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$, n-upla delle coordinate di v risp. a $\mathcal{B}$.

È un isomorfismo di spazi vettoriali: associa a ogni vettore le sue coordinate rispetto a $\mathcal{B}$.