1. Si calcoli il determinante ed il rango di ognuna delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & \pi \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Per ogni campo $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, si determini i valori di $\lambda \in K$ tali che le seguenti matrici sono invertibili:

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 5\lambda & \lambda+3 \\ \lambda-1 & \lambda \end{pmatrix}, \ B_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda+1 \\ \lambda-1 & \lambda \end{pmatrix} \in M_2(K).$$

Per ogni tale $\lambda \in K$, si determini $(A_\lambda)^{-1}$ e $(B_\lambda)^{-1}$.

3. Sia $A \in M_n(K)$. Si dimostri le seguenti affermazioni.

(a) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A), \quad \forall \lambda \in K.$

(b) Se A è antisimmetrica, cioè $A = -({}^t A)$, ed n è dispari, allora $\det(A) = 0$.

4. Si determini l'inversa, se esiste, di ognuna delle seguenti matrici usando la matrice dei cofattori.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C}), \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q}),$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}), \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$