

## 5. Rango

**Definizione 1.** Sia  $A \in M_{m,n}(K)$  una matrice  $m \times n$  a coefficienti nel campo  $K$ . Il **rango** di  $A$  è la dimensione del sottospazio vettoriale di  $K^m$  generato dalle colonne di  $A$ ,

$$\text{rg}(A) := \dim \left( \text{Span} \left( A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)} \right) \right) \subset K^m.$$

In diversi libri di testo, il rango definito qui sopra viene chiamato “rango per colonne” di  $A$ , mentre il “rango per righe” si definisce come la dimensione del sottospazio vettoriale di  $M_{1,n}(K)$  generato dalle righe di  $A$ , cioè

$$\dim \left( \text{Span} \left( A_{(1)}, A_{(2)}, \dots, A_{(m)} \right) \right) \subset M_{1,n}(K).$$

Osserviamo che il rango per righe di  $A$  coincide con il rango della matrice trasposta di  $A$ . In seguito vedremo che  $\text{rg}(A) = \text{rg}({}^t A)$ , quindi il rango per righe di  $A$  è uguale al rango per colonne di  $A$ .

**Osservazione 1. 1.**  $\text{rg}(A)$  è uguale al massimo numero di colonne linearmente indipendenti di  $A$ .

**2.** Chiaramente vale:  $\text{rg}(A) \leq m, n$ . Quindi  $\text{rg}(A) \leq \min\{m, n\}$ .

**Esempio 1. 1.** Se  $A$  è la matrice nulla,  $A = 0$ , allora  $\text{rg}(A) = 0$ . Viceversa, se  $\text{rg}(A) = 0$ , allora  $A = 0$ .

**2.**  $\text{rg}(I_n) = n$ . Infatti le colonne della matrice unità sono i vettori della base canonica di  $K^n$ ,  $(I_n)^{(1)} = e_1, \dots, (I_n)^{(n)} = e_n$ .

**3.** Calcoliamo il rango della matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R})$ . Per definizione,

$$\text{rg}(A) = \dim \text{Span} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Per calcolare tale dimensione, usiamo il procedimento del capitolo precedente per trovare una base  $\mathcal{B}$  di  $\text{Span} (A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}, A^{(4)})$  costituita da colonne di  $A$ .

Siccome  $A^{(1)} \neq 0$ , abbiamo che  $A^{(1)} \in \mathcal{B}$ . Ora consideriamo  $A^{(2)}$ , ed osserviamo che  $A^{(2)} \notin \text{Span} (A^{(1)})$ , perché ogni vettore appartenente a  $\text{Span} (A^{(1)})$  deve

necessariamente avere come seconda componente 0. Quindi  $A^{(2)} \in \mathcal{B}$ . Osserviamo che  $A^{(3)}, A^{(4)} \in \text{Span}(A^{(1)}, A^{(2)})$ , poiché  $A^{(3)} = A^{(1)} + A^{(2)}$  ed  $A^{(4)} = -2A^{(1)}$ . Quindi  $A^{(3)}, A^{(4)} \notin \mathcal{B}$ , da cui segue che  $\mathcal{B} = \{A^{(1)}, A^{(2)}\}$  e  $\text{rg}(A) = 2$ .

Osserviamo che anche  $A^{(1)}, A^{(3)}$  sono linearmente indipendenti, così come  $A^{(3)}, A^{(4)}$  sono linearmente indipendenti. Infatti il rango di una matrice  $A$  è il massimo numero di colonne linearmente indipendenti, ma ci possono essere più collezioni formate da  $\text{rg}(A)$  colonne di  $A$  linearmente indipendenti.

**Proposizione 1.** *Sia  $A \in M_{m,n}(K)$ , e sia  $\tilde{A}$  una matrice ottenuta da  $A$  tramite una sequenza di operazioni elementari. Allora valgono le seguenti affermazioni:*

1.  $\text{rg}(A) = \text{rg}(\tilde{A})$ ;
2. se  $\tilde{A}$  è a scala,  $\text{rg}(\tilde{A})$  è uguale al numero  $r$  delle righe non nulle di  $\tilde{A}$ , ed inoltre  $\tilde{A}^{(j_1)}, \dots, \tilde{A}^{(j_r)}$  sono linearmente indipendenti, dove  $\tilde{a}_{1,j_1}, \dots, \tilde{a}_{r,j_r}$  sono i pivot di  $\tilde{A}$ .
3.  $\text{rg}({}^t A) = \text{rg}({}^t \tilde{A})$ .

*Dim.* 1. Per dimostrare questa affermazione usiamo un risultato che vedremo più avanti, il *teorema della dimensione*. Questo teorema afferma che

$$\text{rg}(A) = n - \dim(W), \quad (1)$$

dove  $W = \{s \in K^n \mid A \cdot s = 0\}$  è il sottospazio vettoriale di  $K^n$  formato dalle soluzioni del sistema omogeneo di equazioni lineari  $A \cdot x = 0$ . Se  $\tilde{A}$  si ottiene da  $A$  per mezzo di operazioni elementari, allora il sistema di equazioni lineari  $\tilde{A} \cdot x = 0$  è equivalente ad  $A \cdot x = 0$ , cioè  $\tilde{W} = W$ , dove  $\tilde{W} = \{s \in K^n \mid \tilde{A} \cdot s = 0\}$  è il sottospazio di  $K^n$  delle soluzioni di  $\tilde{A} \cdot x = 0$ . Usando la formula (1) abbiamo quindi:

$$\text{rg}(A) = n - \dim(W) = n - \dim(\tilde{W}) = \text{rg}(\tilde{A}).$$

2. Supponiamo ora che  $\tilde{A}$  sia a scala, e sia  $r$  il numero delle righe non nulle di  $\tilde{A}$ . Sia  $\tilde{a}_{ij}$  l'elemento di posto  $i, j$  di  $\tilde{A}$ . Siccome  $\tilde{A}$  è a scala, si ha che  $\tilde{a}_{ij} = 0$ , se  $i > r$ , quindi  $\tilde{A}^{(j)} \in \text{Span}(e_1, \dots, e_r)$  per ogni  $j = 1, \dots, n$ , dove  $\tilde{A}^{(j)}$  è la colonna  $j$ -ma di  $\tilde{A}$  ed  $e_1, \dots, e_r$  sono i primi  $r$  vettori della base canonica di  $K^n$ . Da questo segue che  $\text{Span}(\tilde{A}^{(1)}, \dots, \tilde{A}^{(n)}) \subseteq \text{Span}(e_1, \dots, e_r)$ , quindi

$$\text{rg}(\tilde{A}) = \dim \text{Span}(\tilde{A}^{(1)}, \dots, \tilde{A}^{(n)}) \leq \dim \text{Span}(e_1, \dots, e_r) = r.$$

Per dimostrare che  $\text{rg}(\tilde{A}) = r$ , è sufficiente dimostrare che le colonne  $\tilde{A}^{(j_1)}, \tilde{A}^{(j_2)}, \dots, \tilde{A}^{(j_r)}$  sono linearmente indipendenti, dove  $\tilde{a}_{1,j_1}, \tilde{a}_{2,j_2}, \dots, \tilde{a}_{r,j_r}$  sono i pivot di  $\tilde{A}$ . A tale scopo, consideriamo una combinazione lineare

$$\lambda_1 \tilde{A}^{(j_1)} + \lambda_2 \tilde{A}^{(j_2)} + \dots + \lambda_r \tilde{A}^{(j_r)} \in K^m \quad (2)$$

e supponiamo che essa sia  $= 0$ . Osserviamo che (2) è un vettore della forma seguente:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \tilde{a}_{1j_1} + \lambda_2 \tilde{a}_{1j_2} + \dots + \lambda_r \tilde{a}_{1j_r} \\ \lambda_2 \tilde{a}_{2j_2} + \dots + \lambda_r \tilde{a}_{2j_r} \\ \vdots \\ \lambda_r \tilde{a}_{rj_r} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Siccome  $\tilde{a}_{1j_1}, \tilde{a}_{2j_2}, \dots, \tilde{a}_{rj_r} \neq 0$ , il vettore (3) è 0 se e solo se  $\lambda_r = \lambda_{r-1} = \dots = \lambda_1 = 0$ . Concludiamo quindi che le colonne  $\tilde{A}^{(j_1)}, \tilde{A}^{(j_2)}, \dots, \tilde{A}^{(j_r)}$  sono linearmente indipendenti e  $\text{rg}(\tilde{A}) = r$ .

Dimostriamo ora che le colonne  $A^{(j_1)}, A^{(j_2)}, \dots, A^{(j_r)}$ , di  $A$ , sono linearmente indipendenti, dove  $j_1, j_2, \dots, j_r$  sono gli indici di colonna dei pivot  $\tilde{a}_{1j_1}, \tilde{a}_{2j_2}, \dots, \tilde{a}_{rj_r}$  di  $\tilde{A}$ . A tale scopo, consideriamo una combinazione lineare

$$\lambda_1 A^{(j_1)} + \lambda_2 A^{(j_2)} + \dots + \lambda_r A^{(j_r)} \in K^m \quad (4)$$

e supponiamo che essa sia  $= 0$ . Consideriamo il vettore  $s \in K^n$  definito come

segue:  $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$ , dove

$$s_i = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j_1, \dots, j_r, \\ \lambda_k, & \text{se } i = j_k, \text{ per } k = 1, \dots, r. \end{cases}$$

Quindi

$$A \cdot s = \lambda_1 A^{(j_1)} + \lambda_2 A^{(j_2)} + \dots + \lambda_r A^{(j_r)} = 0.$$

Siccome  $\tilde{A}$  è ottenuta da  $A$  per mezzo di operazioni elementari, abbiamo che  $\tilde{A} \cdot s = 0$ . Osserviamo che

$$\tilde{A} \cdot s = \lambda_1 \tilde{A}^{(j_1)} + \lambda_2 \tilde{A}^{(j_2)} + \dots + \lambda_r \tilde{A}^{(j_r)},$$

e siccome  $\tilde{A}^{(j_1)}, \tilde{A}^{(j_2)}, \dots, \tilde{A}^{(j_r)}$  sono linearmente indipendenti, concludiamo che  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_r = 0$ , quindi  $A^{(j_1)}, A^{(j_2)}, \dots, A^{(j_r)}$  sono linearmente indipendenti.

3. È sufficiente dimostrare l'enunciato nel caso in cui  $\tilde{A}$  si ottiene da  $A$  per mezzo di una operazione elementare di tipo 1, rispettivamente di tipo 2 o 3. Supponiamo dapprima che  $\tilde{A}$  sia ottenuta da  $A$  scambiando la riga  $i$ -ma con quella  $j$ -ma, per qualche  $i \neq j, i, j \in \{1, \dots, m\}$ . Questo corrisponde allo scambio

della colonna  $i$ -ma con la  $j$ -ma di  ${}^tA$ , quindi

$$({}^t\tilde{A})^{(k)} = \begin{cases} ({}^tA)^{(k)}, & \text{se } k \neq i, j, \\ ({}^tA)^{(j)}, & \text{se } k = i, \\ ({}^tA)^{(i)}, & \text{se } k = j. \end{cases}$$

Da questo segue immediatamente che

$$\text{Span}(({}^tA)^{(1)}, \dots, ({}^tA)^{(m)}) = \text{Span}(({}^t\tilde{A})^{(1)}, \dots, ({}^t\tilde{A})^{(m)}),$$

perciò  $\text{rg}({}^tA) = \text{rg}({}^t\tilde{A})$ .

Supponiamo ora che  $\tilde{A}$  si ottenga da  $A$  per mezzo di una operazione elementare di tipo 3, precisamente sostituendo la riga  $j$ -ma con  $A_{(j)} + cA_{(i)}$ , per qualche  $i \neq j$ ,  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ , e  $c \in K$ . Allora

$$({}^t\tilde{A})^{(k)} = \begin{cases} ({}^tA)^{(k)}, & \text{se } k \neq j, \\ ({}^tA)^{(j)} + c({}^tA)^{(i)}, & \text{se } k = j, \end{cases}$$

ed in questo caso abbiamo:

$$\begin{aligned} \text{Span}(({}^tA)^{(1)}, \dots, ({}^tA)^{(m)}) &= \text{Span}(({}^tA)^{(1)}, \dots, ({}^tA)^{(j-1)}, ({}^tA)^{(j)} + c({}^tA)^{(i)}, ({}^tA)^{(j+1)}, \dots, ({}^tA)^{(m)}) \\ &= \text{Span}(({}^t\tilde{A})^{(1)}, \dots, ({}^t\tilde{A})^{(m)}), \end{aligned}$$

perciò  $\text{rg}({}^tA) = \text{rg}({}^t\tilde{A})$ .

Si verifica analogamente che, se  $\tilde{A}$  si ottiene da  $A$  per mezzo di una operazione elementare di tipo 2, allora  $\text{rg}({}^tA) = \text{rg}({}^t\tilde{A})$ . Questo conclude la dimostrazione del punto 3.  $\square$

**Teorema 1.** *Sia  $A \in M_{m,n}(K)$ . Allora  $\text{rg}(A) = \text{rg}({}^tA)$ .*

*Dim.* Per i punti 1 e 3 della precedente proposizione, è sufficiente dimostrare che  $\text{rg}(\tilde{A}) = \text{rg}({}^t\tilde{A})$ , dove  $\tilde{A}$  è una matrice ottenuta da  $A$  per mezzo di operazioni elementari. Sia dunque  $\tilde{A}$  una matrice a scala ottenuta da  $A$  per mezzo di operazioni elementari. Per il punto 2 della Proposizione 1 abbiamo che  $\text{rg}(\tilde{A}) = r$ , dove  $r$  è il numero delle righe non nulle di  $\tilde{A}$ . Dimostriamo quindi che  $\text{rg}({}^t\tilde{A}) = r$ . A tale scopo, sia

$$\lambda_1({}^t\tilde{A})^{(1)} + \dots + \lambda_r({}^t\tilde{A})^{(r)} \in K^n \quad (5)$$

una combinazione lineare delle colonne di  $\tilde{A}$ , e supponiamo che sia uguale al vettore 0. Osserviamo che  $({}^t\tilde{A})^{(r+1)} = \dots = ({}^t\tilde{A})^{(m)} = 0$ , quindi omettiamo queste colonne nella combinazione lineare. Inoltre si ha che la combinazione

lineare (5) ha la seguente forma

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_1 \tilde{a}_{1j_1} \\ \vdots \\ \lambda_1 \tilde{a}_{1j_2} + \lambda_2 \tilde{a}_{2j_2} \\ \vdots \\ \lambda_1 \tilde{a}_{1j_r} + \dots + \lambda_r \tilde{a}_{rj_r} \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Siccome  $\tilde{a}_{1j_1}, \dots, \tilde{a}_{rj_r} \neq 0$ , segue che  $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$ . Da questo segue che  $(\tilde{A})^{(1)}, \dots, (\tilde{A})^{(r)}$  sono linearmente indipendenti, quindi  $\text{rg}(\tilde{A}) = r$ .  $\square$

**Esempio 2. 1.** Determiniamo il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R}).$$

A tale scopo trasformiamo  $A$  in una matrice a scala tramite una sequenza di operazioni elementari.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \tilde{A}.$$

Osserviamo che  $\tilde{A}$  è a scala,  $r = 2$ , ed i pivot sono  $\tilde{a}_{11}, \tilde{a}_{22}$ , quindi  $j_1 = 1$  e  $j_2 = 2$ . Dalla Proposizione 1 segue che  $\text{rg}(A) = 2$  ed  $\{A^{(1)}, A^{(2)}\}$  è una base di  $\text{Span}(A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}, A^{(4)})$ .

**2.** Determiniamo il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 8 & 0 \\ 8 & 2 & 0 & 10 & 2 \\ 6 & 3 & 2 & 9 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4,5}(\mathbb{R}).$$

A tale scopo trasformiamo  $A$  in una matrice  $\tilde{A}$  a scala per mezzo di una sequenza

di operazioni elementari.

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 8 & 0 \\ 8 & 2 & 0 & 10 & 2 \\ 6 & 3 & 2 & 9 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 8 & 2 & 0 & 10 & 2 \\ 6 & 3 & 2 & 9 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & -6 & -8 & -6 & 2 \\ 0 & -3 & -4 & -3 & 1 \end{pmatrix} \\
 &\rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \tilde{A}.
 \end{aligned}$$

Per la Proposizione 1 abbiamo che  $\text{rg}(A) = 3$  ed  $A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}$  formano una base di  $\text{Span}(A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}, A^{(4)}, A^{(5)})$ .

**Teorema 2** (Rouché-Capelli). *Un sistema di  $m$  equazioni lineari di ordine  $n$ ,  $A \cdot x = b$ , è compatibile  $\iff \text{rg}(A|b) = \text{rg}(A)$ . In tal caso esso possiede  $\infty^{n-r}$  soluzioni, dove  $r = \text{rg}(A)$ .*

*Dim.* Per la Proposizione 3 del capitolo 4,  $A \cdot x = b$  è compatibile se e solo se  $b \in \text{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$ . Per il Lemma 1 del capitolo 4,  $b \in \text{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$  se e solo se  $\text{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) = \text{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}, b)$ . Quindi il sistema di equazioni lineari è compatibile se e solo se

$$\text{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) = \text{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}, b).$$

Siccome  $\text{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) \subseteq \text{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}, b)$ , i due spazi vettoriali sono uguali se e solo se hanno la stessa dimensione, cioè se e solo se  $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b)$ .

Supponiamo ora che  $A \cdot x = b$  sia compatibile. Il teorema di struttura per le soluzioni dei sistemi di equazioni lineari afferma che

$$S = \tilde{s} + W,$$

dove  $S = \{s \in K^n \mid A \cdot s = b\}$  è l'insieme delle soluzioni,  $\tilde{s}$  è una soluzione particolare, e  $W = \{s \in K^n \mid A \cdot s = 0\}$  è il sottospazio vettoriale di  $K^n$  delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato. Per il teorema della dimensione (che vedremo nel capitolo 8),  $\dim(W) = n - \text{rg}(A) = n - r$ . Fissiamo una base  $\{v_1, \dots, v_{n-r}\}$  di  $W$ , allora ogni soluzione si scrive nella forma seguente

$$s = \tilde{s} + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n-r} v_{n-r},$$

al variare dei parametri  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-r} \in K$ . Quindi le soluzioni di  $A \cdot x = b$  dipendono da  $n-r$  parametri, questo significa che  $A \cdot x = b$  ha  $\infty^{n-r}$  soluzioni.  $\square$

**Esempio 3. 1.** Vogliamo determinare per quali valori del parametro  $a \in \mathbb{R}$  il seguente sistema di 3 equazioni lineari di ordine 4 è compatibile, e per ogni tale  $a$  l'insieme delle soluzioni.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 & = 1 \\ x_2 + x_3 & = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_4 & = a. \end{cases}$$

La matrice completa del sistema lineare è

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & a \end{pmatrix}.$$

Trasformiamo  $(A|b)$  per mezzo di operazioni elementari in modo tale da ottenere una matrice  $(\tilde{A}|\tilde{b})$ , con  $\tilde{A}$  matrice a scala:

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & a \end{pmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix} = (\tilde{A}|\tilde{b}).$$

Osserviamo che  $\text{rg}(\tilde{A}) = 2$ , per ogni  $a \in \mathbb{R}$ , mentre

$$\text{rg}(\tilde{A}|\tilde{b}) = \begin{cases} 3, & \text{se } a \neq -1, \\ 2, & \text{se } a = -1. \end{cases}$$

Quindi il sistema di equazioni lineari è compatibile se e solo se  $a = -1$ , ed in tal caso ha  $\infty^2$  soluzioni. Per  $a = -1$ , risolvendo il sistema lineare con il metodo di Gauß otteniamo

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 - s_3 + 2s_4 \\ -s_3 \\ s_3 \\ s_4 \end{pmatrix} : s_3, s_4 \in K \right\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Span} \left( \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Il seguente teorema afferma che una matrice quadrata è invertibile se e solo se ha rango massimo.

**Teorema 3.** Sia  $A \in M_n(K)$ . Allora  $A$  è invertibile  $\iff \text{rg}(A) = n$ .

*Dim.* Come vedremo nel capitolo 8,  $A$  è invertibile, se e solo se la funzione lineare associata ad  $A$ ,  $L_A: K^n \rightarrow K^n$ ,  $L_A(s) = A \cdot s$ , è un isomorfismo  $\iff n = \text{rg}(L_A) = \text{rg}(A)$ .  $\square$

**Osservazione 2.** È possibile dimostrare direttamente che, se  $A$  è invertibile, allora  $\text{rg}(A) = n$ , come segue. Sia  $M \in M_n(K)$  la matrice inversa di  $A$ , quindi  $A \cdot M = I_n$ . Osserviamo che quest'ultima equazione si può riscrivere come segue:  $A \cdot M^{(i)} = e_i$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ , dove  $e_i$  è l' $i$ -mo vettore della base canonica di  $K^n$ . Come visto nel capitolo 4, questo implica che  $e_1, \dots, e_n \in \text{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$ , quindi  $\text{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) = K^n$ , e  $\text{rg}(A) = n$ .

**Osservazione 3.** Se  $A \in M_n(K)$  è invertibile, per calcolare la sua inversa  $A^{-1}$  si può procedere come segue. Ricordiamo che  $A^{-1}$  è quella matrice  $M \in M_n(K)$  tale che  $A \cdot M = I_n$ . Quindi, per ogni  $i = 1, \dots, n$ , la colonna  $i$ -ma di  $M$  è l'unica soluzione del sistema di equazioni lineari

$$A \cdot x = e_i,$$

dove  $e_i \in K^n$  è l' $i$ -mo vettore della base canonica di  $K^n$  (l'unicità segue dal teorema di Rouché-Capelli perché  $\text{rg}(A) = n$ ). Notiamo che è possibile risolvere questi sistemi lineari, per  $i = 1, \dots, n$ , "simultaneamente" nel seguente modo. Consideriamo la matrice  $(A \ I_n) \in M_{n,2n}(K)$ . Siccome  $A$  è invertibile,  $\text{rg}(A) = n$ , quindi è possibile trasformare  $(A \ I_n)$  tramite una sequenza di operazioni elementari OE1, OE2, OE3, nella matrice  $(I_n \ M)$ . Siccome le operazioni elementari trasformano un sistema di equazioni lineari in uno equivalente, segue che la soluzione di  $A \cdot x = e_i$  coincide con la soluzione di  $I_n \cdot x = M^{(i)}$ , che è  $M^{(i)}$ , quindi  $M = A^{-1}$ .

**Esempio 4. 1.** Consideriamo la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ . Osserviamo che  $\text{rg}(A) = 2$ , quindi  $A$  è invertibile. Per calcolare  $A^{-1}$ , consideriamo la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2,4}(\mathbb{R})$ , ed usiamo le operazioni elementari per trasformare la matrice  $2 \times 2$  a sinistra in  $I_2$ :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Allora  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ .

**2.** Sia  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 6 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ . Osserviamo che  $\text{rg}(A) = 3$ , quindi  $A$  è

invertibile. Per calcolare  $A^{-1}$  procediamo come sopra.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 13 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 7 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 13 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{25}{2} & 3 & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \\
&\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 13 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{6}{25} & \frac{3}{25} & -\frac{2}{25} \end{pmatrix} \\
&\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \frac{7}{25} & \frac{9}{25} & -\frac{6}{25} \\ 0 & -2 & 0 & -\frac{22}{25} & -\frac{14}{25} & \frac{26}{25} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{6}{25} & \frac{3}{25} & -\frac{2}{25} \end{pmatrix} \\
&\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{11}{25} & \frac{7}{25} & -\frac{13}{25} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{6}{25} & \frac{3}{25} & -\frac{2}{25} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Quindi

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{11}{25} & \frac{7}{25} & -\frac{13}{25} \\ -\frac{6}{25} & \frac{3}{25} & -\frac{2}{25} \end{pmatrix}.$$

**Definizione 2.** Sia  $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ , e siano  $p \in \{1, \dots, m\}$ ,  $q \in \{1, \dots, n\}$ . Siano  $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq m$ ,  $1 \leq j_1 < \dots < j_q \leq n$ . Con  $A(i_1, \dots, i_p | j_1, \dots, j_q)$  denotiamo la matrice  $p \times q$  a coefficienti in  $K$  il cui elemento di posto  $k, \ell$  è dato da  $a_{i_k, j_\ell}$ , per ogni  $k = 1, \dots, p$  ed  $\ell = 1, \dots, q$ .  $A(i_1, \dots, i_p | j_1, \dots, j_q)$  si chiama **sottomatrice**  $p \times q$  di  $A$ .

**Esempio 5. 1.** Se  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ , e se  $i_1 = 1, i_2 = 3, j_1 = 2, j_2 = 4$ ,

allora

$$A(1, 3 | 2, 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mentre

$$A(2 | 2, 3) = (-2 \quad 4), \quad A(1, 2, 3 | 3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = A^{(3)}.$$

**Proposizione 2.** Sia  $A \in M_{m,n}(K)$ , e sia  $B$  una sottomatrice  $p \times q$  di  $A$ . Allora  $\text{rg}(B) \leq \text{rg}(A)$ .

*Dim.* Supponiamo che  $B = A(i_1, \dots, i_p | j_1, \dots, j_q)$ , per qualche  $i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, m\}$  con  $i_1 < \dots < i_p$  e  $j_1, \dots, j_q \in \{1, \dots, n\}$  con  $j_1 < \dots < j_q$ . Consideriamo la seguente sottomatrice di  $A$ ,  $C := A(1, \dots, m | j_1, \dots, j_q)$ , ed osserviamo

che  $C = (A^{(j_1)} \dots A^{(j_r)})$ . Chiaramente  $\text{rg}(C) \leq \text{rg}(A)$ . Inoltre,  $B = \begin{pmatrix} C_{(i_1)} \\ \vdots \\ C_{(i_r)} \end{pmatrix}$ , quindi, siccome il rango per righe coincide con il rango per colonne,  $\text{rg}(B) \leq \text{rg}(C)$ . Mettendo insieme le due disuguaglianze, abbiamo che  $\text{rg}(B) \leq \text{rg}(C) \leq \text{rg}(A)$ .  $\square$

**Teorema 4.** *Sia  $A \in M_{m,n}(K)$ . Allora*

$$\begin{aligned} \text{rg}(A) &= \max\{\text{rg}(B) \mid B \text{ è una sottomatrice quadrata di } A\} \\ &= \text{massimo degli ordini delle sottomatrici quadrate ed invertibili di } A. \end{aligned}$$

*Dim.* Indichiamo con  $r = \text{rg}(A)$ ,

$$r_1 := \max\{\text{rg}(B) \mid B \text{ è una sottomatrice quadrata di } A\},$$

e con

$$r_2 := \text{massimo degli ordini delle sottomatrici quadrate ed invertibili di } A.$$

Per la precedente proposizione  $r \geq r_1$ , e per il Teorema 3  $r_1 \geq r_2$ . Quindi è sufficiente dimostrare che  $r \leq r_2$ . A tale scopo, siano  $A^{(j_1)}, \dots, A^{(j_r)}$   $r$  colonne linearmente indipendenti di  $A$ , con  $j_1 < \dots < j_r$ . Consideriamo la sottomatrice  $C = A(1, \dots, m \mid j_1, \dots, j_r)$  ed osserviamo che  $\text{rg}(C) = r$ . Siccome il rango per righe coincide con il rango per colonne, esistono  $r$  righe  $C_{(i_1)}, \dots, C_{(i_r)}$  linearmente indipendenti. A meno di riordinare possiamo supporre che  $i_1 < \dots < i_r$ . Sia ora  $B := C(i_1, \dots, i_r \mid 1, \dots, r) = A(i_1, \dots, i_r \mid j_1, \dots, j_r)$ . Allora  $B$  è una sottomatrice quadrata di  $A$ , di ordine  $r$  e rango  $r$ . Quindi  $B$  è invertibile. Da questo segue che  $r_2 \geq r$ .  $\square$

**Esempio 6. 1.** Determiniamo il rango di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{5,3}(\mathbb{R}).$$

Poiché  $A$  è una matrice  $5 \times 3$ ,  $\text{rg}(A) \leq \min\{3, 5\} = 3$ . Osserviamo che  $A(1, 2, 3 \mid 1, 2, 3)$  è una sottomatrice quadrata di  $A$  di rango 3. Quindi per il teorema precedente, si ha che  $\text{rg}(A) \geq 3$ . Mettendo insieme le due disuguaglianze otteniamo

$$3 \leq \text{rg}(A) \leq 3,$$

di conseguenza  $\text{rg}(A) = 3$ .

2. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \in M_{6,4}(\mathbb{R}).$$

Si ha che  $\text{rg}(A) \leq \min\{6, 4\} = 4$ . Inoltre  $\text{rg}A(1, 2, 4, 5 | 1, 2, 3, 4) = 4$ , quindi  $\text{rg}(A) = 4$ .