Corso di GEOMETRIA
Dipartimento di Ingegneria ed Architettura
Università degli Studi di Trieste
Prof. Fabio Perroni

2. MATRICI

Siano $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sia K un campo. Una **matrice** $m \times n$ **a coefficienti in** K è una tabella rettangolare di $m \cdot n$ elementi di K,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} ,$$

dove $a_{ij} \in K$, per ogni $i \in \{1, \dots, m\}$ e $j \in \{1, \dots, n\}$. Verranno usate anche le seguenti notazioni per denotare una matrice, $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ o semplicemente $A = (a_{ij})$. Per ogni $i = 1, \dots, m$, la **riga** i**-ma di** A è la matrice $1 \times n$,

$$A_{(i)} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} .$$

Mentre, per ogni $j = 1, \dots, n$, la **colonna** j**-ma di** A è la seguente matrice $m \times 1$,

$$A^{(j)} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} .$$

Per ogni $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$, a_{ij} è detto l'**elemento di posto** i, j **di** A; i è l'indice di riga, j è l'indice di colonna. L'elemento di posto i, j di una matrice A verrà indicato anche con $(A)_{ij}$.

Se $m = n$, la matrice A si dice **matrice quadrata di ordine** n.

L'insieme di tutte le matrici $m \times n$ a coefficienti in K si denota con $M_{m,n}(K)$. L'insieme delle matrici quadrate di ordine n a coefficienti in K si denota con $M_n(K)$.

Esempio 1. $K = \mathbb{R}$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \pi & 3 \\ -1 & 4 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R}) .$$

Le righe di A sono le seguenti matrici 1×3:

$$A_{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & \pi & 3 \end{pmatrix} , \quad A_{(2)} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & \sqrt{2} \end{pmatrix} .$$

Le colonne di A sono le seguenti matrici 2×1:

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} , \quad A^{(2)} = \begin{pmatrix} \pi \\ 4 \end{pmatrix} , \quad A^{(3)} = \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} .$$

Proposizione 1. *Siano* $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{m,n}(K)$*, sia* $\lambda \in K$*.*

La **somma** *di* A *e* B *si definisce come la matrice* $A + B \in M_{m,n}(K)$ *il cui elemento di posto* i, j *è* $a_{ij} + b_{ij}$*, per ogni* $i \in \{1, \dots, m\}$ *e* $j \in \{1, \dots, n\}$*.*

Il **prodotto** *di* A *per lo scalare* λ *è la matrice* $\lambda A \in M_{m,n}(K)$ *il cui elemento di posto* i, j *è dato da* λa_{ij}*, per ogni* $i \in \{1, \dots, m\}$ *e* $j \in \{1, \dots, n\}$*.*

$M_{m,n}(K)$*, con le operazioni di somma e prodotto per scalari così definite, è uno spazio vettoriale sul campo* K*. Il vettore nullo è la matrice nulla, cioè la matrice con* $0 \in K$ *al posto* i, j*, per ogni* $i \in \{1, \dots, m\}$ *e* $j \in \{1, \dots, n\}$*.*

Dim. (Esercizio.) □

Osservazione 1. Possiamo vedere gli elementi di K^n come matrici $n \times 1$ a coefficienti in K. Sotto questa identificazione le operazioni di somma e prodotto per scalari definite in K^n coincidono con quelle di $M_{n,1}(K)$, quindi possiamo identificare $K^n = M_{n,1}(K)$ come spazi vettoriali.

Definizione 1. *Sia* $A \in M_{m,n}(K)$*. La* **trasposta** *di* A *è la matrice* ${}^tA \in M_{n,m}(K)$ *il cui elemento di posto* i, j *è l'elemento di posto* j, i *di* A*, per ogni* $i \in \{1, \dots, n\}$ *e* $j \in \{1, \dots, m\}$*.*

Esempio 2. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \pi & 3 \\ -1 & 4 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R}),$$

allora

$${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \pi & 4 \\ 3 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{R}).$$

Se $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_{1,3}(K)$, allora ${}^tB = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in M_{3,1}(K)$.

Vale la seguente proposizione.

Proposizione 2. Siano $A, B \in M_{m,n}(K)$, e sia $\lambda \in K$, allora valgono le seguenti uguaglianze:

$${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB, \quad {}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA.$$

Dim. Per ogni $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$, l'elemento di posto i, j di ${}^t(A + B)$ coincide con l'elemento di posto i, j di ${}^tA + {}^tB$, come si vede dalla seguente catena di uguaglianze:

$$[{}^t(A + B)]_{ij} = (A + B)_{ji} = a_{ji} + b_{ji} = ({}^tA)_{ij} + ({}^tB)_{ij} = ({}^tA + {}^tB)_{ij},$$

dove $A = (a_{k\ell})$, $B = (b_{k\ell})$.

La dimostrazione della seconda uguaglianza è lasciata per esercizio. □

Definizione 2. *Sia $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ una matrice quadrata. La* **diagonale principale** *di A è quella parte di A composta dagli elementi di posto i, i, per ogni $i = 1, \ldots, n$.*

A è detta **diagonale***, se $a_{ij} = 0$, per ogni $i \neq j$.*

A è **simmetrica***, se $A = {}^tA$.*

La **matrice unità** *$n \times n$ è la matrice $I_n \in M_n(K)$ il cui elemento di posto i, j è dato da*

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1\,, & \text{se}\, i = j\,, \\ 0\,, & \text{se}\, i \neq j\,. \end{cases}$$

Esempio 3. 1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \neq {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}\,,$$

quindi A non è simmetrica. La diagonale principale di A è costituita dagli elementi $1, 5, 9$. Evidentemente A non è diagonale.

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ è una matrice diagonale di ordine 3.

3. $I_1 = (1) \in M_1(K)$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(K)$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(K)$.

1 Il prodotto righe per colonne

Siano date $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix} \in M_{1,n}(K)$ e $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(K)$, il loro prodotto $A \cdot B$ è lo scalare definito come segue:

$$A \cdot B = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n \in K\,.$$

Più in generale, se $A \in M_{m,n}(K)$ e $B \in M_{n,p}(K)$, il **prodotto righe per colonne** $A \cdot B \in M_{m,p}(K)$ è quella matrice $m \times p$ il cui elemento di posto i, j è dato dalla seguente espressione:

$$(A \cdot B)_{ij} = A_{(i)} \cdot B^{(j)} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{in} b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\,,$$

per ogni $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, p$. Notiamo che, nel prodotto righe per colonne, il numero delle colonne della matrice a sinistra (A) deve coincidere con il numero delle righe della matrice a destra (B).

Esempio 4. Nella pratica, il prodotto righe per colonne tra matrici, può essere usato, ad esempio, per organizzare le spese di produzione di un'azienda. Consideriamo in questo esempio un'industria dolciaria, che per avere un quadro dei costi di produzione dei propri prodotti può procedere come segue. Supponiamo che gli ingredienti con i relativi costi (riferiti all'anno 2017) siano dati come nella seguente tabella:

ingrediente	costo
uova	$0,20$ €/ unità
farina	$0,50$ €/Kg
zucchero	$0,55$ €/Kg
marmellata	$3,00$ €/Kg
lievito	$0,0002$ €/Kg
cannella	...
noci	...
burro	...
latte	...
...	...

Si elencano i costi in un vettore colonna,

$$B = \begin{pmatrix} 0,20 \\ 0,50 \\ 0,55 \\ 3,00 \\ 0,0002 \\ \dots \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R})\,.$$

Notiamo che l'ordine in cui vengono elencati i costi è importante (al primo posto si trova il costo delle uova, al secondo della farina, e così via), per questo i vettori colonna sono n-uple ordinate di scalari.

Formiamo ora la seguente matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, le cui righe corrispondono ai vari prodotti (supponiamo che in totale ne siano m), e dove riportiamo su ogni riga le quantità degli ingredienti relativi a quel prodotto. Ad esempio, nella prima riga $A_{(1)}$ riportiamo le quantità degli ingredienti necessari per una ciambella:

$$A_{(1)} = \begin{pmatrix} 5 & 0,5 & 0,33 & 0,4 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix} \in M_{1,n}\,.$$

La seconda riga corrisponde alla crostata, la terza al Pan di Spagna, e così via. Otteniamo quindi una matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0,5 & 0,33 & 0,4 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 2 & 0,5 & 0,2 & 0,4 & 0 & 0 & 0,2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{R})\,.$$

Il prodotto righe per colonne $A \cdot B$ è un vettore colonna, $A \cdot B \in M_{m,1}(\mathbb{R})$, le cui coordinate corrispondono ai costi per produrre i singoli prodotti. Ad esempio al primo posto troviamo il costo della ciambella, al secondo quello della crostata, al terzo del Pan di Spagna, ... Se si vuole tenere conto delle quantità di ogni singolo prodotto, basta organizzare tali quantità in una matrice diagonale $m \times m$, $C = (c_{ij})$, dove c_{11} è il numero di ciambelle che si producono, c_{22} è il numero di crostate, c_{33} quello di Pan di Spagna, ... Allora il costo totale per ogni prodotto è dato da $C \cdot A \cdot B \in M_{m,1}(\mathbb{R})$.

Se si vogliono fare previsioni per gli anni successivi, basta aumentare il numero delle colonne della matrice B, ottenendo una matrice $B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$. Per ogni $k = 1, \dots, p$, riportiamo lungo la colonna k-ma, $B^{(k)}$, i costi previsti dei singoli ingredienti per quell'anno. In questo modo, $C \cdot A \cdot B \in M_{m,p}(\mathbb{R})$.

Esempio 5. Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R})$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{R})$. Allora

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$$

In questo caso, è possibile svolgere anche il prodotto

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 2 & 6 & 5 \\ -3 & -4 & -10 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})\,.$$

Osserviamo che, se A e B sono matrici quadrate dello stesso ordine, $A, B \in M_n(K)$, è sempre possibile moltiplicare $A \cdot B$, ma in generale

$$A \cdot B \neq B \cdot A\,.$$

Ad esempio, se $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, allora

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = B \cdot A\,.$$

Proposizione 3. *1) Siano $A, B \in M_{m,n}(K)$, $C, D \in M_{n,p}(K)$, $\lambda \in K$. Allora valgono le seguenti uguaglianze:*

$$\begin{aligned} (A+B) \cdot C &= A \cdot C + B \cdot C\,, \\ A \cdot (C+D) &= A \cdot C + A \cdot D\,, \\ A \cdot (\lambda C) &= \lambda(A \cdot C) = (\lambda A) \cdot C\,, \\ A \cdot I_n &= I_m \cdot A = A\,. \end{aligned}$$

2) Siano $A \in M_{m,n}(K)$, $B \in M_{n,p}(K)$, $C \in M_{p,q}(K)$. Allora vale la seguente uguaglianza:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)\,.$$

3) Siano $A \in M_{m,n}(K)$, $B \in M_{n,p}(K)$. Allora vale la seguente uguaglianza:

$$^{t}(A \cdot B) = {}^{t}B \cdot {}^{t}A\,.$$

Dim. 1) Per ogni $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, p$, l'elemento di posto i, j di $(A+B) \cdot C$ coincide con l'elemento di posto i, j di $A \cdot C + B \cdot C$, come segue dalle seguenti uguaglianze

$$\begin{aligned}
((A+B)\cdot C)_{ij} &= (A+B)_{(i)} \cdot C^{(j)} \\
&= (a_{i1}+b_{i1})c_{1j} + (a_{i2}+b_{i2})c_{2j} + \ldots + (a_{in}+b_{in})c_{nj} \\
&= (a_{i1}c_{1j} + a_{i2}c_{2j} + \ldots + a_{in}c_{nj}) + (b_{i1}c_{1j} + b_{i2}c_{2j} + \ldots + b_{in}c_{nj}) \\
&= A_{(i)} \cdot C^{(j)} + B_{(i)} \cdot C^{(j)} \\
&= (A \cdot C)_{ij} + (B \cdot C)_{ij} = (A \cdot C + B \cdot C)_{ij}\,.
\end{aligned}$$

La seconda e la terza uguaglianza si dimostrano analogamente e la verifica è lasciata per esercizio.

Proviamo che $A \cdot I_n = A$. Per ogni $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$, l'elemento di posto i, j di $A \cdot I_n$ è dato da $A_{(i)} \cdot (I_n)^{(j)} = a_{i1}\delta_{1j} + a_{i2}\delta_{2j} + \ldots + a_{in}\delta_{nj}$. Dalla definizione dei δ_{kj}, segue che $\delta_{kj} = 0$, se $k \neq j$, e $\delta_{jj} = 1$. Quindi $A_{(i)} \cdot (I_n)^{(j)} = a_{ij}$. In maniera analoga si dimostra che $I_m \cdot A = A$.

2) Per ogni $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, q$, l'elemento di posto i, j di $(A \cdot B) \cdot C$ è dato dalla seguente espressione

$$\begin{aligned}
((A\cdot B)\cdot C)_{ij} &= (A \cdot B)_{(i)} \cdot C^{(j)} \\
&= (A \cdot B)_{i1}c_{1j} + (A \cdot B)_{i2}c_{2j} + \ldots + (A \cdot B)_{ip}c_{pj} \\
&= (a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21} + \ldots + a_{in}b_{n1})c_{1j} + \\
&\quad\ (a_{i1}b_{12} + a_{i2}b_{22} + \ldots + a_{in}b_{n2})c_{2j} + \ldots + \\
&\quad\ (a_{i1}b_{1p} + a_{i2}b_{2p} + \ldots + a_{in}b_{np})c_{pj}\,.
\end{aligned}$$

Raccogliamo gli elementi $a_{i1}, \ldots, a_{in}$ nella precedente espressione ed otteniamo:

$$\begin{aligned}
((A\cdot B)\cdot C)_{ij} &= a_{i1}(b_{11}c_{1j} + b_{12}c_{2j} + \ldots + b_{1p}c_{pj}) + \\
&\quad\ a_{i2}(b_{21}c_{1j} + b_{22}c_{2j} + \ldots + b_{2p}c_{pj}) + \ldots + \\
&\quad\ a_{in}(b_{n1}c_{1j} + b_{n2}c_{2j} + \ldots + b_{np}c_{pj}) \\
&= a_{i1}B_{(1)} \cdot C^{(j)} + a_{i2}B_{(2)} \cdot C^{(j)} + \ldots + a_{in}B_{(n)} \cdot C^{(j)} \\
&= a_{i1}(B \cdot C)_{1j} + a_{i2}(B \cdot C)_{2j} + \ldots + a_{in}(B \cdot C)_{nj} \\
&= A_{(i)} \cdot (B \cdot C)^{(j)} = (A \cdot (B \cdot C))_{ij}\,.
\end{aligned}$$

L'uguaglianza 3) si verifica in modo analogo, i dettagli sono lasciati per esercizio. $\square$

Definizione 3. *Un* ***anello*** *è un insieme non vuoto A con due operazioni binarie, la somma $+\colon A \times A \to A$ ed il prodotto $\cdot\colon A \times A \to A$, che soddisfano le seguenti proprietà, $\forall\, a, b, c \in A$:*

- *$a+b=b+a$;*
- *$(a+b)+c=a+(b+c)$;*
- *$\exists 0 \in A$, t.c. $a+0=a$;*
- *$\exists -a \in A$, t.c. $a+(-a)=0$;*
- *$a(bc)=(ab)c$;*
- *$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$, $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$.*

Un anello si dice ***unitario****, se esiste l'elemento neutro per il prodotto, cioè $\exists 1 \in A$ tale che $a\cdot 1 = 1\cdot a = a$, $\forall a \in A$.*

Un anello si dice ***commutativo****, se il prodotto è commutativo, cioè se $a\cdot b = b\cdot a$, $\forall a,b \in A$.*

Esempio 6. 1. L'insieme delle matrici quadrate $M_n(K)$ con le operazioni di somma e prodotto righe per colonne è un anello unitario (l'unità è la matrice identità I_n). Tale anello è commutativo se e solo se $n=1$, in tal caso $M_n(K)$ coincide con il campo K.

2. Per ogni numero intero positivo $n \neq 0$, l'insieme $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dei resti modulo n con le operazioni $\oplus, \odot$ è un anello commutativo unitario.

Definizione 4. *Una matrice quadrata $A \in M_n(K)$ si dice* **invertibile***, se esiste una matrice quadrata dello stesso ordine $M \in M_n(K)$, tale che sono verificate le seguenti uguaglianze:*

$$A\cdot M = M\cdot A = I_n\,.$$

Proposizione 4. *Sia data una matrice quadrata $A \in M_n(K)$.*

1) Se A è invertibile, allora esiste un unica matrice $M \in M_n(K)$, tale che $A\cdot M = M\cdot A = I_n$. Tale M si dice matrice inversa di A e si indica con A^{-1}.

2) Se A è invertibile, ed $M \in M_n(K)$ è tale che $A\cdot M = I_n$, allora $M = A^{-1}$. Lo stesso vale se $M\cdot A = I_n$.

3) Se $A, B \in M_n(K)$ sono invertibili, allora anche $A\cdot B$ è invertibile, e

$$(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}\,.$$

Dim. 1) Se esistesse un'altra $N \in M_n(K)$ tale che $A\cdot N = N\cdot A = I_n$. Allora, sfruttando il fatto che $N\cdot I_n = N$, che $I_n = A\cdot M$, la proprietà associativa del prodotto righe per colonne, e che $I_n\cdot M = M$, abbiamo:

$$N = N\cdot I_n = N\cdot(A\cdot M) = (N\cdot A)\cdot M = I_n\cdot M = M\,.$$

Quindi un assurdo.

2) Dobbiamo dimostrare che anche $M\cdot A = I_n$. Ma siccome A è invertibile, esiste la sua inversa A^{-1}. Quindi

$$M\cdot A = I_n\cdot M\cdot A = (A^{-1}\cdot A)\cdot M\cdot A = A^{-1}\cdot(A\cdot M)\cdot A = A^{-1}\cdot I_n\cdot A = A^{-1}\cdot A = I_n\,.$$

3) È sufficiente osservare che $(A\cdot B)\cdot B^{-1}\cdot A^{-1} = A\cdot(B\cdot B^{-1})\cdot A^{-1} = A\cdot A^{-1} = I_n$, e che $B^{-1}\cdot A^{-1}\cdot(A\cdot B) = I_n$. □

Osservazione 2. Notiamo che $A \neq 0 \not\Rightarrow A$ invertibile. Si consideri ad esempio la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$, tuttavia essa non è invertibile. Infatti, se esistesse $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, tale che $A \cdot M = I_2$, allora si avrebbe

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

che è assurdo.

Definizione 5. *Un* ***gruppo*** *è un insieme non vuoto G con un'operazione binaria $\cdot : G \times G \to G$ che soddisfa le seguenti proprietà, $\forall a, b, c \in G$:*

- $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;
- $\exists e \in G$, *tale che* $a \cdot e = e \cdot a = a$;
- $\exists a^{-1} \in G$, *t.c.* $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$.

Un gruppo si dice ***commutativo*** *(o anche* ***abeliano****), se $a \cdot b = b \cdot a$, $\forall a, b \in G$.*

Esempio 7. L'insieme delle matrici quadrate $n \times n$ invertibili con il prodotto righe per colonne è un gruppo, si denota $GL_n(K)$. Tale gruppo è commutativo se e solo se $n = 1$.