ESERCIZI DI GEOMETRIA 1, FOGLIO 5

Trieste, 6 novembre 2018

1. Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare, e $v_1, \dots, v_n$ una una base di V. Dimostrare che

(i) f è iniettiva se e solo se $f(v_1), \dots, f(v_n)$ sono linearmente indipendenti;

(ii) f è suriettiva se e solo se $f(v_1), \dots, f(v_n)$ generano W.

2. Siano V, W K-spazi vettoriali di dimensione finita, $f : V \to W$ un'applicazione lineare.

Dimostrare che, se f è iniettiva, esiste un'applicazione lineare $g : W \to V$ tale che $g \circ f = id_V$, mentre se f è suriettiva, esiste un'applicazione lineare $g : W \to V$ tale che $f \circ g = id_W$. (Suggerimento: usare i teoremi di completamento a una base e della determinazione di un'applicazione lineare.)

3. Siano W_1, W_2 sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V di dimensione finita. Sia $f : W_1 \times W_2 \to V$ l'applicazione definita da $f(w_1, w_2) = w_1 + w_2$ (dove $W_1 \times W_2$ denota il prodotto definito nel foglio 3).

(i) Dimostrare che f è un'applicazione lineare.

(ii) Determinare l'immagine di f: qual è la sua dimensione?

(iii) Descrivere gli elementi del nucleo di f ricordando che $Kerf \subset W_1 \times W_2$. Costruire una base per $Kerf$, a partire da una base di $W_1 \cap W_2$. Calcolare la dimensione di $Kerf$.

(iv) Dare una dimostrazione della relazione di Grassmann come conseguenza del teorema della dimensione per l'applicazione f appena considerata.

4. Sia $V = \mathbb{R}[x]_3$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 3 nella indeterminata x, e $\mathcal{B}$ la sua base $(1, x, x^2, x^3)$.

(1) Sia $T : V \to V$ l'applicazione definita da $T(p(x)) = p'(x)(x-1)$, dove p' denota la derivata di p. Verificare che T è lineare e scrivere la sua matrice rispetto alla base $\mathcal{B}$;
(2) descrivere $\mathrm{Ker}(T)$, $\mathrm{Im}(T)$ e calcolare le loro dimensioni;
(3) verificare che $V = Ker(T) \oplus Im(T)$.