Equazione del calore

Sia $R = (0,\pi)\times(0,T)$, si considera il problema

$$(*)\quad \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & (x,t)\in R \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t\in[0,T] \\ u(x,0) = f(x) & x\in[0,\pi] \end{cases}$$

Qui $f \in C([0,\pi])$, $f(0)=f(\pi)$ è assegnata e u si ricerca nella classe

$$C(\overline{R})\cap C^2(R).$$

<u>Teor</u> (Principio di massimo) ~~Nelle condizioni~~
Sia

$$\partial_p R = ([0,\pi]\times\{0\})\cup(\{0,\pi\}\times[0,T])$$

Sia $u\in C(\overline{R})\cap C^2(R)$ soluzione dell'equazione del calore. Allora

$$(1)\quad \max_{\overline{R}} u = \max_{\partial_p R} u$$

<u>Dim.</u> Sia $\tau\in(0,T)$, e $R_\tau = (0,\pi)\times(0,\tau)$

Proviamo intanto

$$(2)\quad \max_{\overline{R_\tau}} u = \max_{\partial_p R_\tau} u$$

Per ogni $\varepsilon > 0$, poniamo $u_\varepsilon(x,t) = u(x,t) + \varepsilon x^2$

Avremo $u_{\varepsilon,t} - u_{\varepsilon,xx} = -2\varepsilon$ in R.

Supp. per assurdo che $\max_{\overline{R_\tau}} u$ sia assunto in un punto interno di R_τ, diciamo (x_0, t_0), $0 < x_0 < \pi$, $0 < t_0 < \tau$.

Allora ~~...~~ $u_{\varepsilon,t}(x_0,t_0) = 0$ e

$u_{\varepsilon,xx}(x_0,t_0) \leq 0$. Quindi

$$-2\varepsilon = (u_{\varepsilon,t} - u_{\varepsilon,xx})(x_0,t_0) \geq 0 \quad \text{ASSURDO.}$$

Supp. ora che il massimo sia assunto in un punto (x_0, τ), $0 < x_0 < \pi$.

Avremo

$$u_{\varepsilon,t}(x_0,\tau) \geq 0, \quad u_{\varepsilon,xx}(x_0,\tau) \leq 0$$

quindi anche in questo caso si ha l'assurdo. Ne segue

$$\max_{\overline{R_\tau}} u_\varepsilon = \max_{\partial_p R_\tau} u_\varepsilon .$$

Ora

$$\max_{\overline{R_\tau}} u \leq \max_{\overline{R_\tau}} u_\varepsilon = \max_{\partial_p R_\tau} (u + \varepsilon x^2) \leq$$

$$\leq \max_{\partial_p R_\tau} u + \varepsilon \pi^2$$

Per l'arbitrarietà di ε, segue (2).

Ora

$$\max_{\overline{R}} u = \max_{\tau \leq T} \max_{\overline{R_\tau}} u =$$

$$= \max_{\tau \leq T} \max_{\partial_p R_\tau} u \leq \max_{\partial_p R} u$$

da cui segue (1). $\square$

<u>Oss.</u> se u è soluzione dell'equaz. del calore anche $-u$ lo è quindi vale anche

$$\min_{\overline{R}} u = \min_{\partial_p R} u$$

e di conseguenza

$$\max_{\overline{R}} |u| = \max_{\partial_p R} |u|$$

Quindi se $u|_{\partial_p R} = 0$ segue $u \equiv 0$.

Pertanto se esiste una soluzione di (*) questa è unica.

Costruiamo ora una soluzione di $(*)$.

<u>Teorema</u>. Sia $f \in C([0,\pi])$ t.c. $f(0) = f(\pi) = 0$ e f' è continua a tratti. Esiste una soluzione di $(*)$ ed è data da

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n e^{-n^2 t} \sin nx$$

dove

$$f_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx \, f(x) \, dx .$$

<u>Dim.</u> Dalla disug. di Bessel applicata a f' sappiamo che

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 f_n^2 < \infty$$

Scriviamo formalmente la soluzione di $(*)$ in serie di F.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx .$$

Sempre formalmente, imponiamo

$$0 = u_t - u_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n' + n^2 u_n) \sin nx$$

Cerchiamo $u_n(t)$ tale che

$$\begin{cases} u_n' + n^2 u_n = 0 & t \in (0,T) \\ u_n(0) = f_n \end{cases}$$

Risulta

$$u_n(t) = e^{-n^2 t} f_n$$

Poniamo

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} f_n \sin nx$$

la serie a destra converge unif. in $[0,\pi] \times [0,T]$, inoltre per ogni $t>0$ converge unif risp a $x \in [0,\pi]$ anche la serie delle derivate di ogni ordine

Quindi $u \in C(\bar{R}) \cap C^2(R)$ e verifica l'eq. del calore, dato che ogni addendo ne è soluzione.

Inoltre le condiz al contorno

$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ sono soddisfatte.

Per verificare che è soddisfatta la condiz. iniziale $u(x,0) = f(x)$ osserviamo che

$$\lim_{t\to 0+} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} f_n \sin nx = f(x) \text{ unif. rish. a } x.$$

Ovvero

$$\lim_{t\to 0+} \sum_{n=1}^{\infty} (1-e^{-n^2 t}) f_n \sin nx = 0$$

uniform. su $[0,\pi]$.

Per la dis. di Schwarz

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} (1-e^{-n^2 t}) f_n \sin nx\right| \leq$$

$$\leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} n^2 f_n^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (1-e^{-n^2 t})^2 \frac{1}{n^2}}$$

Qui il primo fattore è limitato, proviamo che il secondo tende a 0.

$\forall \varepsilon > 0$ sia N t.c. $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \varepsilon$.

Allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1-e^{-n^2 t})^2 \frac{1}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{N} (1-e^{-n^2 t})^2 \frac{1}{n^2} + \varepsilon \leq$$

$$\leq (1-e^{-N^2 t})^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \varepsilon$$

Ora $(1-e^{-N^2 t}) \to 0$ per $t \searrow 0$

quindi $\exists\ \vartheta > 0$ t.c. se $0 < t < \vartheta$

$$(1-e^{-N^2 t}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \varepsilon$$

Ovvero, se $0 < t < \vartheta$ si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1-e^{-N^2 t})^2 \frac{1}{n^2} \leq 2\varepsilon$$

$\square$