CORSO DI GEOMETRIA
DETERMINANTE
A.A. 2018/2019
PROF. VALENTINA BEORCHIA

INDICE

1. DEFINIZIONE INDUTTIVA DI DETERMINANTE

In questo capitolo definiamo il determinante di una matrice quadrata $A \in M_n(\mathbb{K})$ e ne studiamo le principali proprietà, vedremo anche alcune applicazioni al calcolo delle soluzioni dei sistemi di equazioni lineari ed al calcolo della matrice inversa.

Per iniziare consideriamo i casi più semplici $n = 1$ e $n = 2$.

Se $A \in M_1(\mathbb{K})$, una matrice di ordine 1. Allora A è del tipo $A = (a)$ con $a \in \mathbb{K}$ e poniamo il suo determinante per definizione

$$\det A = a.$$

Passando alle matrici di ordine 2, se

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

definiamo

$$\det A := a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}.$$

Osserviamo che $A \in M_2(\mathbb{K})$ è invertibile se e solo se

$$\det\ A \neq 0.$$

Infatti, consideriamo la matrice

$$B := \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

e osserviamo che vale

(1.1)
$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21} & 0 \\ 0 & a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det\ A & 0 \\ 0 & \det\ A \end{pmatrix} = (\det\ A) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se $\det\ A \neq 0$, la matrice $M := \frac{1}{\det\ A} \cdot B$ verifica

$$A \cdot M = I_2,$$

quindi A è invertibile per definizione e si ha $M = A^{-1}$.

Se $\det\ A = 0$ e A è la matrice nulla, si verifica facilmente che A non è invertibile. Se $\det\ A = 0$ e A non è la matrice nulla, allora anche B non è la matrice nulla e per la relazione (1.1) si ha

$$A \cdot B = 0.$$

quindi le colonne di B sono due soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$A \cdot X = 0$$

(verificare!), ed essendoci almeno una soluzione non banale, per il Teorema di Rouchè - Capelli, il rango di A verifica

$$\text{rg } A = 1.$$

Siccome una matrice di ordine 2 è invertibile se e solo se il suo rango 2̀ per un risultato del capitolo precedente, deduciamo che A non ìnvertibile.

Osservazione 1.1. *Interpretazione geometrica del determinante di matrici di ordine 2 Supponiamo pe semplicità che i coefficienti a_{ij} della matrice di ordine 2 che consideriamo siano tutti positivi:*

$$a_{ij} > 0,$$

e poniamo $\vec{v} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$. Allora si può verificare che il modulo

$$|\det\ A| = \text{Area}(P),$$

dove P è il parallelogramma determinato da $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

Vogliamo ora definire il determinante di una matrice quadrata qualunque che ne determini l'invertibilità. Abbiamo bisogno di premettere la seguente:

Definizione 1.2. *Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$ una matrice quadrata di ordine n. Denoteremo con*

$$A_{ij} \in M_{n-1}(\mathbb{K})$$

la matrice quadrata di ordine $n-1$ ottenuta cancellando la riga i e la colonna j dalla matrice A. Chiameremo A_{ij} minore di A.

Definizione 1.3. *Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$. Definiamo il determinante di A in modo induttivo:*

- *se $n = 1$, poniamo $\det\ (a_{11}) = a_{11}$;*
- *se $n > 1$, poniamo*

$$\det\ A := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}\, a_{i1} \det\ A_{i1}. \tag{1.2}$$

Esercizio 1.4. *Si verifichi che nel caso $n = 2$ la definizione appena data coincide con la definizione dell'introduzione.*

Esempi 1.5. *Per la definizione (1.2) il determinante di una matrice*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

di ordine 3 *è uguale a*

$$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{21} \det A_{21} + a_{31} \det A_{31} =$$
$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}).$$

Enunciamo un importante risultato che riguarda le proprietà del determinante, di cui non daremo la dimostrazione.

Teorema 1.6. *Sia $n \geq 1$ e sia $A \in M_n(\mathbb{K})$. Valgono le seguenti proprietà del determinante:*

- (D1) Multilinearità del determinante *per ogni i, $1 \leq i \leq n$, se la riga i è somma di due righe:*
$$A_{(i)} = R_1 + R_2,$$
allora
$$\det A = \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ \vdots \\ R_1 + R_2 \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ \vdots \\ R_1 \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ \vdots \\ R_2 \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}.$$
Inoltre, se la riga i è prodotto di una riga R per uno scalare $c \in \mathbb{K}$:
$$A_{(i)} = c\, R,$$
allora
$$\det A = \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ \vdots \\ c\, R \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} = c\ \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ \vdots \\ R \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}.$$
- (D2) Alternanza del determinante *Scambiando due righe di A il determinante cambia segno:*
$$\det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ \vdots \\ A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$$
- (D3) Normalizzazione del determinante *Se I_n indica la matrice unità, si ha*
$$\det I_n = 1.$$

Teorema 1.7. *Teorema di caratterizzazione del determinante Il determinante è l'unica funzione $M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ che verifichi le proprietà (D1), (D2) e (D3).*

Corollario 1.8. *Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$. Valgono le seguenti affermazioni:*

(1) Se A ha due righe uguali, allora $\det A = 0$.

(2) Se A ha una riga nulla, allora $\det A = 0$.

(3) (a) Se $\widetilde{A}$ è ottenuta da A mediante un numero finito σ di operazioni elementari di tipo OE1 (cioè σ scambi), allora

$$\det \widetilde{A} = (-1)^{\sigma} \det A.$$

(b) Se $\widetilde{A}$ è ottenuta da A mediante una operazione elementare di tipo OE2, cioè una riga è moltiplicata per uno scalare $c \in \mathbb{K}$, allora

$$\det \widetilde{A} = c \det A.$$

(c) Se $\widetilde{A}$ è ottenuta da A mediante una operazione elementare di tipo OE3, cioè una riga è dalla somma della riga stessa con un'altra riga, allora

$$\det \widetilde{A} = \det A.$$

(4) Se A è una matrice triangolare superiore, cioè tale che

$$a_{ij} = 0 \quad \forall\, i > j, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\;n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2\;n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{3\;n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix},$$

allora il determinante è uguale al prodotto degli elementi sulla diagonale:

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}.$$

In particolare, ciò vale se A è a scala oppure diagonale.

Dimostrazione. (1) Supponiamo che sia $A_{(i)} = A_{(j)}$ per qualche coppia di indici i e j. Allora scambiando la riga i di A con la riga j, la matrice A non cambia. D'altra parte, per la proprietà (D2), uno scambio comporta un cambio di segno nel determinante, quindi

$$\det A = -\det A,$$

da cui segue $\det A = 0$ (se la caratteristica del campo è diversa da 2, ad esempio se $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_3$ ... non vale se $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$).

(2) Se $A_{(i)} = (0\ 0\ \dots\ 0)$, allora possiamo scrivere

$$A_{(i)} = 0 \cdot (1\ 1\ \dots\ 1),$$

e dalla (D1) si ha $\det A = 0 \cdot \det A' = 0$.

(3) I tre enunciati segueno direttamente dalle (D1) e (D2) e dalla proprietà 1) dimostrata sopra.

(4) Dimostriamo l'enunciato per induzione su n, l'ordine della matrice.

Per $n = 1$ l'enunciato è vero.

Supponiamo che valga per n e dimostriamo che allora vale anche per tutte le matrici triangolari superiori di ordine $n + 1$.

Sia $A \in M_{n+1}$ triangolare superiore. In particolare abbiamo

$$a_{21} = a_{31} = \cdots = an1 = 0,$$

quindi la formula per il determinante (1.2) diventa semplicemente

$$\det A = a_{11} \ \det A_{11}. \tag{1.3}$$

Osservaimo ora che anche A_{11} è una matrice triangolare superiore, infatti è data da

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & \dots & a_{2\ n} & a_{2\ n+1} \\ 0 & \dots & a_{3\ n} & a_{3\ n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 & a_{n+1\ n+1} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K}).$$

Quindi possiamo applicare l'ipotesi induttiva a A_{11} che ci fornisce

$$\det A_{11} = a_{22} \cdot a_{33} \cdot \dots \cdot a_{n+1\ n+1},$$

e sostituendo nell'espressione (1.3) troviamo l'enunciato.

□

2. Caratterizzazione delle matrici quadrate di rango massimo

Vedremo ora che per le matrici di ordine n qualunque il determinante ci fornisce un criterio per stabilire quando una matrice ha rango massimo, e risulta quindi invertibile.

Teorema 2.1. *Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$. Allora*

$$\text{rg } A < n \quad \Longleftrightarrow \quad \det A = 0.$$

Equivalentemente si ha:

$$\text{rg } A = n \quad \Longleftrightarrow \quad \det A \neq 0.$$

Dimostrazione. Supponiamo che sia $\text{rg } A < n$. Sia$\widetilde{A}$ una matrice a scala ottenuta di A con un numero finito di operazioni elementari. Allora si ha $\text{rg } A = \text{rg } \widetilde{A}$, ed è facile verificare che la condizione $\text{rg } A < n$ implica che $\widetilde{A}$ ha almeno una riga nulla. Allora per il Corollario 1.8,punto 2), si

$$\det \widetilde{A} = 0.$$

D'altra parte, per il Corollario 1.8, punti $3.a), b), c)$, abbiamo

$$\det \widetilde{A} = (-1)^\sigma c \cdot \det A, \tag{2.1}$$

quindi anche $\det A = 0$.

Viceversa, supponiamo $\det A = 0$. Per la formula (2.1) si ha che anche $\det \widetilde{A} = 0$. Supponiamo per assurdo che non sia $\text{rg } \widetilde{A} < n$, quindi che sia

$$\text{rg } \widetilde{A} = n.$$

Allora si verifica facilmente che i pivot di $\widetilde{A}$ sono esattamente gli elementi a_{ii} della diagonale. Siccome si ha

$$\det \widetilde{A} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$

per il Corollario 1.8, punto 4), essendo tutti gli $a_{ii} \neq 0$ perchè pivot, si avrebbe $\det \widetilde{A} \neq 0$, che è un assurdo.

□

Corollario 2.2. *Una matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$.*

Dimostrazione. Segue dal Teorema precedente e dal fatto che una matrice quadrata di ordine nè invertibile se e solo se $\operatorname{rg} A = n$.

□

3. Regole di Laplace

Il seguente risultato afferma che nell'espressione (1.2) per il determinante di una matrice A si può sostituire la prima colonna con una colonna qualsiasi $A^{(k)}$. Questo è particolarmente vantaggioso se A ha una colonna con molti zeri.

Teorema 3.1. *Sviluppo di Laplace del determinante per colonne Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$. Per ogni indice di colonna $k \in \{1, \dots, n\}$ il determinante di A si può esprimere nella seguente forma:*

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} \, a_{ik} \, \det A_{ik}.$$

Dimostrazione. Cenno: è possibile dimostrare che il termine

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} \, a_{ik} \, \det A_{ik}$$

soddisfa le proprietà (D1), (D2), (D3). Per il Teorema di caratterizzazione del determinante ciò implica che coincide con il determinante di$A$. □

Vediamo ora un altro Teorema di Laplace, che afferma che si può calcolare il determinante di una matrice anche a partire da una sua riga fissata.

Teorema 3.2. *Sviluppo di Laplace del determinante per righe*
Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$. Per ogni indice di riga $l \in \{1, \dots, n\}$ il determinante di A si può esprimere nella seguente forma:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{l+j} \, a_{lj} \, \det A_{lj}.$$

Corollario 3.3. *Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$. allora si ha*

$$\det A = \overset{t}{\det} A.$$

Dimostrazione. Siccome le colonne di ${}^tA$ corrispondono alle righe di$A$, l'enunciato segue dal Teorema di Sviluppo di Laplace del determinante per righe. □

4. Teorema di Binet

Riportiamo il seguente importante teorema, senza dimostrazione.

Teorema 4.1. *di Binet Siano $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Allora vale*

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

Corollario 4.2. *Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$. Si ha:*

- $\det(A^n) = (\det A)^n$.
- *Se $A \in M_n(\mathbb{K})$ è invertibile, allora si ha*

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.$$

Dimostrazione. Il primo punto si dimostra facilmente per induzione. Per il secondo punto, l'inversa di una matrice soddisfa per definizione

$$A^{-1} \cdot A = I_n,$$

da cui otteniamo

$$\det(A^{-1} \cdot A) = \det I_n = 1,$$

e per il Teorema di Binet abbiamo

$$\det(A^{-1} \cdot A) = \det(A^{-1}) \cdot \det A = 1.$$

□