

Prima prova scritta di Geometria 1, 26 gennaio 2018

1. Dimostrare che

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} : \text{Hom}(V, W) \rightarrow M(m \times n, K)$$

è un isomorfismo (lineare, iniettivo e suriettivo), dove $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ associa a un'applicazione lineare $f : V \rightarrow W$ la sua matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f)$ rispetto alle basi \mathcal{A} di V e \mathcal{B} di W .

2. i) Sia v_1, \dots, v_n una base di V e v_1^*, \dots, v_n^* la base duale di V^* . Dimostrare che, per ogni $v \in V$ e $\phi \in V^*$,

$$v = v_1^*(v)v_1 + \dots + v_n^*(v)v_n,$$

$$\phi = \phi(v_1)v_1^* + \dots + \phi(v_n)v_n^*.$$

ii) Dimostrare che una famiglia ortonormale $(v_i)_{i \in I}$ di vettori in uno spazio unitario è linearmente indipendente.

3. Trovare se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile o triangolarizzabile sui campi $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_7$ e \mathbb{Z}_{13} . Se A è triangolarizzabile, indicare la forma normale di Jordan di A .

4. In dipendenza dai parametri a, b, c e d , trovare la forma normale di Jordan della matrice reale

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & b & c \\ 0 & 2 & 1 & d \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

e trovare in ogni caso una base di Jordan e una matrice S tale che $S^{-1}AS$ sia in forma normale di Jordan.

5. i) Definire il polinomio caratteristico $p_A(x)$ di una matrice quadrata A . Dimostrare che $\lambda \in K$ è autovalore di A se e solo se λ è radice del polinomio caratteristico di A .

ii) Dimostrare che matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico (e allora gli stessi autovalori).

iii) Sia $A \in M(m \times n, K)$, $S \in GL(m, K)$ e $T \in GL(n, K)$; dimostrare che le matrici A e SAT hanno lo stesso rango.

iv) Siano A e B matrici simili con autovalore λ ; dimostrare che le molteplicità geometriche di λ coincidono per le matrici A e B .

6. Sia V uno spazio vettoriale unitario di dimensione finita e $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo unitario. Dimostrare che:

- i) ogni autovalore di f ha valore assoluto 1;
- ii) autovettori di autovalori distinti sono ortogonali;
- iii) esiste una base ortonormale di autovettori di f .

Seconda prova scritta di Geometria 1, 16 febbraio 2018

1. i) Dato un elemento $\bar{a} \neq \bar{0}$ in \mathbb{Z}_p , per un numero primo p , dimostrare che l'applicazione $\phi : \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p$, $\phi(\bar{x}) = \bar{a}\bar{x}$, è iniettiva (dimostrazione diretta, cioè senza usare il fatto che \mathbb{Z}_p è un campo).

ii) Dedurre da i) che ogni elemento $\bar{a} \neq \bar{0}$ in \mathbb{Z}_p ha un elemento inverso rispetto al prodotto.

2. Usando vettori e ortogonalità, dimostrare:

i) Le due diagonali di un rombo (parallelogramma equilatero) sono ortogonali.

ii) Il teorema di Talete che l'angolo opposto al diametro di un triangolo iscritto in una semicirconferenza è un angolo retto.

3. Sia V uno spazio vettoriale unitario di dimensione finita n e $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo anti-autoaggiunto, cioè

$$\langle v, f(w) \rangle = - \langle f(v), w \rangle,$$

per tutti i vettori $v, w \in V$. Dimostrare che:

i) ogni autovalore di f è in $i\mathbb{R}$ (un numero immaginario puro o 0);

ii) autovettori di autovalori distinti sono ortogonali;

iii) esiste una base ortonormale di autovettori di f .

4. i) Per la matrice simmetrica reale

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

trovare una base ortonormale \mathcal{B} di \mathbb{R}^3 di autovettori di A , e una matrice ortogonale S tale che $S^{-1}AS$ sia una matrice diagonale.

ii) Applicare il cambiamento di coordinate ortogonale $x = Sy$ di \mathbb{R}^3 alla forma quadratica $q(x) = {}^t xAx = 2x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 + 6x_1x_3$: quale forma quadratica diagonale $\bar{q}(y)$ si ottiene ("assi principali per q ")? In queste coordinate, fare un disegno qualitativo del sottoinsieme $\{y \in \mathbb{R}^3 : \bar{q}(y) = c\}$ di \mathbb{R}^3 , per $c = 1, -1, 0$ (indicare gli assi y_1, y_2 e y_3 ; quali oggetti geometrici si ottengono?).

5. i) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. Dimostrare la formula di dimensione per applicazioni lineari:

$$\dim(V) = \dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f).$$

ii) Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare di spazi vettoriali di dimensioni finite. Dimostrare che esistono basi \mathcal{A} di V e \mathcal{B} di W tali che la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f)$ di f rispetto a queste basi sia della forma $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

6. i) Dimostrare che ogni funzione multilineare, alternante $D : V \times \dots \times V = V^m \rightarrow K$ è banale se $m > n = \dim(V)$.

ii) Sia v_1, \dots, v_n una base di uno spazio vettoriale V su un campo K . Dimostrare che una funzione determinante (multilineare, alternante) $D : V \times \dots \times V = V^n \rightarrow K$, con $D(v_1, \dots, v_n) = 1$, è unica (solo unicità, non esistenza: dedurre la formula di Leibniz).

Terza prova scritta di Geometria 1, 19 giugno 2018

1. Per la matrice ortogonale e unitaria

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix},$$

trovare una matrice unitaria S e la sua inversa, tali che $S^{-1}AS$ sia diagonale (quale matrice diagonale?).

2. i) Siano $f, g : V \rightarrow V$ endomorfismi di uno spazio vettoriale V che commutano ($f \circ g = g \circ f$). Sia $\operatorname{Aut}_f(\lambda)$ un autospazio di f . Dimostrare che $g(\operatorname{Aut}_f(\lambda)) \subset \operatorname{Aut}_f(\lambda)$.

ii) Siano $f, g : V \rightarrow V$ automorfismi unitari di uno spazio unitario V di dimensione finita che commutano. Utilizzando il teorema sulla forma normale per automorfismi unitari, dimostrare che esiste una base ortonormale di V che consiste di autovettori sia di f sia di g (cioè, f e g sono diagonalizzabili simultaneamente).

3. Sia w_1, \dots, w_m una base del sottospazio W di V e $w_1, \dots, w_m, v_1, \dots, v_r$ un prolungamento a una base di V . Dimostrare che $[v_1], \dots, [v_r]$ è una base dello spazio quoziente V/W

4. Sia $(v_i)_{i \in I}$ una base di uno spazio vettoriale V , per un insieme di indici I arbitrario, e siano $v_i^* \in V^*$ forme lineari tali che $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$ (simbolo di Kronecker).

i) Dimostrare che i vettori v_i^* sono linearmente indipendenti.

ii) Dimostrare che i vettori v_i^* generano V^* se e solo se V ha dimensione finita.

5. Trovare la forma normale di Jordan della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

in dipendenza dai parametri a e b , e trovare una base di Jordan e la matrice del cambiamento di base in ogni caso.

6. i) Dimostrare che ogni funzione multilineare, alternante $D : V \times \dots \times V = V^m \rightarrow K$ è banale se $m > n = \dim(V)$.

ii) Sia v_1, \dots, v_n una base di uno spazio vettoriale V su un campo K . Dimostrare che una funzione determinante (multilineare, alternante) $D : V \times \dots \times V = V^n \rightarrow K$, con $D(v_1, \dots, v_n) = 1$, è unica (solo unicità, non esistenza: dedurre la formula di Leibniz).

QUARTA PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA 1

11 luglio 2018

1. i) Sia $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo autoaggiunto di uno spazio unitario di dimensione finita. Dimostrare che esiste una base ortonormale di V di autovettori di f .

ii) Dimostrare che i) vale anche nel caso reale di uno spazio euclideo V .

2. Applicare l'algoritmo di Gauss alla matrice completa del seguente sistema lineare (sul campo $K = \mathbb{R}$, indicando gli elementi pivot e i gradini in ogni passo); dire quale condizione devono soddisfare i parametri a, b, c e d affinché il sistema abbia una soluzione. Poi trovare una base dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato.

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 3x_4 = a \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = b \\ 3x_1 - x_2 - 3x_4 = c \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 = d \end{cases}$$

3. i) Dimostrare che autovettori v_1, \dots, v_n di autovalori distinti $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ di un endomorfismo $f : V \rightarrow V$ sono linearmente indipendenti.

ii) Dimostrare che ogni famiglia ortonormale $(v_i)_{i \in I}$ in uno spazio euclideo o unitario è linearmente indipendente (si consideri I un insieme di indici arbitrario).

4. i) Trovare la forma normale di Jordan della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & b \\ 0 & 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poi trovare una base di Jordan e una matrice S tale che $S^{-1}AS$ sia una matrice di Jordan.

ii) Per $1 \leq m \leq n$, dare un esempio di una matrice $n \times n$ che ha un autovalore λ di molteplicità algebrica n e molteplicità geometrica m .

5. i) Sia V uno spazio vettoriale euclideo; dedurre la formula di polarizzazione che esprime il prodotto scalare in termini della norma associata.

ii) Sia $f : V \rightarrow V$ un'applicazione lineare che preserva la norma associata al prodotto scalare ($\|f(v)\| = \|v\|$, per ogni $v \in V$). Dimostrare che f è ortogonale (f preserva il prodotto scalare).

6. i) Dare la definizione della matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f) = (a_{ij})$ di un'applicazione lineare $f : V \rightarrow W$, rispetto alle basi $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$ di V e $\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_m)$ di W .

ii) Dimostrare che

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} : \text{Hom}(V, W) \rightarrow M(m \times n, K)$$

è un isomorfismo (lineare, iniettivo e suriettivo), dove $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ associa a un'applicazione lineare $f : V \rightarrow W$ la sua matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f)$ rispetto alle basi \mathcal{A} di V e \mathcal{B} di W .

QUINTA PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA 1

5 settembre 2018

1. i) Enunciare e poi dimostrare il teorema della determinazione di un'applicazione lineare su una base (unicità e esistenza).

ii) Sia $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ un'applicazione lineare. Dimostrare che esiste un'unica matrice A (matrice $m \times n$) tale che $f = L(A) : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ (unicità e esistenza, usando i)).

2. i) Per uno spazio vettoriale euclideo o unitario V , enunciare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

ii) Per la norma associata al prodotto scalare di V , dimostrare la disuguaglianza triangolare $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

3. Applicare l'algoritmo di Gauss alla matrice del seguente sistema lineare reale, indicando gli elementi pivot e i gradini in ogni passo. Poi dire per quali valori dei parametri a e b il sistema ha soluzione, e per questi valori trovare tutte le soluzioni del sistema.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = b \\ x_1 + x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

4. i) Sia v_1, \dots, v_n una base di V . Dimostrare che un'applicazione lineare $f : V \rightarrow W$ è iniettiva se e solo se $f(v_1), \dots, f(v_n)$ sono linearmente indipendenti.

ii) Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare iniettiva di spazi vettoriali V e W di dimensioni finite. Dimostrare che esiste un'applicazione lineare $g : W \rightarrow V$ tale che $g \circ f = \text{id}_V$.

5. i) Sia A una matrice 5×5 con un unico autovalore λ di molteplicità algebrica 5. A meno di similitudine, enumerare tutte le forme normali di Jordan possibili per A : quante ce ne sono, e qual è la molteplicità geometrica di λ in ogni caso?

ii) Dati due interi positivi m, n con $1 \leq m \leq n$, dare un esempio di una matrice di Jordan $n \times n$ con un unico autovalore λ di molteplicità algebrica n e molteplicità geometrica m .

6. i) Sia V uno spazio vettoriale unitario di dimensione finita e \mathcal{B} una base ortonormale di V . Dimostrare che un endomorfismo $f : V \rightarrow V$ è autoaggiunto se e solo se la matrice $A = M_{\mathcal{B}}(f)$ è hermitiana.

ii) Per una matrice quadrata A , dimostrare che l'endomorfismo $L(A) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ è autoaggiunto se e solo se A è una matrice hermitiana.

iii) Dimostrare che un endomorfismo autoaggiunto $f : V \rightarrow V$ di uno spazio vettoriale reale euclideo di dimensione finita ha almeno un autovalore.

Sesta prova scritta di Geometria 1, 19 settembre 2018

1. i) Dare la definizione della matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f) = (a_{ij})$ di un'applicazione lineare $f : V \rightarrow W$, rispetto a basi $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$ di V e $\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_m)$ di W .

ii) Dimostrare che

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} : \text{Hom}(V, W) \rightarrow M(m \times n, K)$$

è un isomorfismo (lineare, iniettivo e suriettivo), dove $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ associa a un'applicazione lineare $f : V \rightarrow W$ la sua matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f)$ rispetto alle basi \mathcal{A} di V e \mathcal{B} di W .

2. i) Determinare il numero di elementi (l'ordine) del gruppo generale lineare $\text{GL}(n, \mathbb{Z}_p)$ (le matrici invertibili $n \times n$ con coefficienti nel campo finito $K = \mathbb{Z}_p$, per un numero primo p).

ii) Elencare tutti gli elementi del gruppo $\text{GL}(2, \mathbb{Z}_2)$ (quanti sono?), e verificare che il gruppo non è abeliano.

3. i) Sia $A = (a_{ij})$ una matrice quadrata $n \times n$. Enunciare la formula di Leibniz per il determinante di A , poi definire la matrice trasposta tA di A e dimostrare che $\det(A) = \det({}^tA)$.

ii) Elencare tutti gli elementi del gruppo simmetrico S_3 e del gruppo alternante A_4 (usando cicli disgiunti per rappresentare permutazioni), e verificare che i gruppi non sono abeliani.

4. Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare di spazi vettoriali di dimensioni finite. Dimostrare che esistono basi \mathcal{A} di V e \mathcal{B} di W tale che la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f)$ di f rispetto a queste basi è della forma $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Usando vettori e ortogonalità, dimostrare che le tre altezze di un triangolo si intersecano in un punto.

6. i) Dimostrare che la matrice ortogonale (riflessione)

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile. Fare un disegno della retta di riflessione nel piano (indicando l'angolo con la retta della prima coordinata), dei vettori della base standard e_1, e_2 e delle loro immagini.

ii) Per la matrice ortogonale e unitaria (rotazione)

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix},$$

trovare una matrice unitaria S e la sua inversa tale che $S^{-1}AS$ sia diagonale.