Spazio vettoriale duale.

Dato V, spazio vettoriale di dim n, e fissata una sua base $\mathcal{B}=(v_1,\dots,v_n)$, consideriamo $V^* = \mathrm{Hom}(V,K) = \{ f: V \to K \mid f \text{ lineare} \}$.

I suoi elementi sono detti forme lineari su V o funzionali lineari su V.

<u>Def</u>. $v_i^*: V \to K$, per ogni $i=1,\dots,n$, <u>lineare</u>, ponendo $v_i^*(v_1)=0$, $v_i^*(v_2)=0,\dots, v_i^*(v_i)=1,\dots$

cioè $v_i^*(v_j)=\delta_{ij}$ simbolo di Kronecker

$$=\begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i\neq j. \end{cases}$$

Per il teor. di determinazione di un'appl. lineare, $\exists!$ appl. lineare v_i^* che opera in questo modo.

Dunque se $v = x_1v_1 + \dots + x_nv_n$, $v_i^*(v) = x_i$, i-esima coordinata di v rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Le forme lineari $v_1^*,\dots,v_n^*$ sono dette funzioni coordinate rispetto a $\mathcal{B}$.

<u>Prop.</u> $v_1^*,\dots,v_n^*$ formano una base di V^*, detta <u>base duale</u> di $\mathcal{B}$.

Dim. 1) linearmente indipendenti:

$\lambda_1 v_1^* + \dots + \lambda_n v_n^* = 0$ significa che $\forall v \in V$

$(\lambda_1 v_1^* + \dots + \lambda_n v_n^*)(v) = 0.$

Ma v si può scrivere in modo unico $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$, e $(\lambda_1 v_1^* + \dots + \lambda_n v_n^*)(v) = 0$

$\iff (\lambda_1 v_1^* + \dots + \lambda_n v_n^*)(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) =$

$= \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0.$

Dunque per ogni scelta di $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$ si ha $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0$. In particolare se $(x_1, \dots, x_n) = (1, 0, \dots, 0)$ si ottiene $\lambda_1 = 0, \dots$

se $(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0, \overset{j}{1}, \dots, 0)$ si ottiene $\lambda_j = 0$.

Perciò $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

2) generano V^*.

Sia $f : V \to K$ lineare. Cerchiamo coefficienti $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tali che $f = \lambda_1 v_1^* + \dots + \lambda_n v_n^*$.

Se vogliamo che questa uguaglianza valga, le due applicazioni devono coincidere sui vettori di B, cioè deve essere $f(v_1) = (\lambda_1 v_1^* + \dots + \lambda_n v_n^*)(v_1) = \lambda_1$,

$\vdots$

$f(v_n) = (\lambda_1 v_1^* + \dots + \lambda_n v_n^*)(v_n) = \lambda_n$.

Quindi si ha $f = f(v_1) v_1^* + \dots + f(v_n) v_n^*$, perché assumono lo stesso valore sui vettori della base $\mathcal{B}$. ∎

Oss. $\forall\, v \in V$ si ha anche

$$v = v_1^*(v)\, v_1 + \dots + v_n^*(v)\, v_n .$$

— · —

Esempio di spazi vettoriali isomorfi:
$\mathbb{C}$ è $\mathbb{R}$-spazio vettoriale con base $(1, i)$, di dimensione 2, dunque isomorfo a $\mathbb{R}^2$.
Un isomorfo è quello t.c.
$$1 \longrightarrow e_1 = (1,0)$$
$$i \longrightarrow e_2 = (0,1)$$

dunque
$$\underset{\mathbb{C}}{\underset{\cap}{a+ib}} \longleftrightarrow \underset{\mathbb{R}^2}{\underset{\cap}{(a,b)}}.$$

Tramite questo isomorfismo si può definire in $\mathbb{R}^2$ un prodotto interno.
Infatti $(a+ib)(c+id) = ac - bd + i(bc+ad)$,
e si può dunque def. in $\mathbb{R}^2$
$$(a,b)(c,d) = (ac-bd,\ bc+ad).$$
In tal modo si può dare a $\mathbb{R}^2$ struttura di campo.

Sia $z=a+ib$ un numero complesso di norma 1. Allora $a^2+b^2=1$, e si può scrivere $z=\cos\theta+i\sin\theta$, con $0\le\theta<2\pi$ univocamente determinato.

L'applicazione $\mathbb{C}\xrightarrow{\cdot z}\mathbb{C}$ opera così:

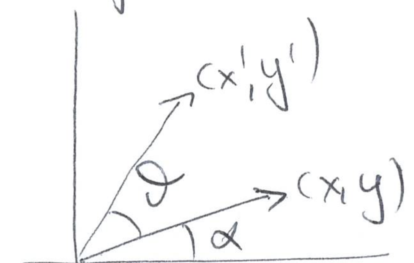
$$x+iy \longrightarrow (\cos\theta+i\sin\theta)(x+iy)=$$
$$=(x\cos\theta-y\sin\theta)+i(x\sin\theta+y\cos\theta)$$

In termini di $\mathbb{R}^2$ abbiamo

$$\mathbb{R}^2\xrightarrow{\cdot z}\mathbb{R}^2$$
$$(x,y)\longrightarrow(x\cos\theta-y\sin\theta,\ x\sin\theta+y\cos\theta)$$
$$\parallel$$
$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

Dunque $\cdot z$ è l'applicazione lineare su $\mathbb{R}$ $L(A)$ dove $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$.

geometricamente $L(A)$ è la rotazione di angolo θ intorno all'origine.



~~(x,y)~~ $x+iy=\sqrt{x^2+y^2}\,(\cos\alpha+i\sin\alpha$

$x'+iy'=\sqrt{x^2+y^2}\,(\cos(\alpha+\theta)+i\sin(\alpha+\theta$

stesso modulo

che corrisponde a quanto sopra per le formule di addizione.

Matrice di un'applicazione lineare rispetto a basi fissate.

Sia $f: \underset{n}{V} \longrightarrow \underset{m}{W}$ lineare

Fissiamo basi $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ di V,

$\mathcal{B}' = (w_1, \dots, w_m)$ di W.

Allora $\forall j = 1, \dots, n$, $f(v_j)$ si scrive in maniera unica come combinazione lineare di $w_1, \dots, w_m$, della forma: $f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$.

Def. matrice di f rispetto alle basi $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ è:

$$\underset{m \times n}{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)} = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} f(v_1) & f(v_2) & \quad & f(v_n) \end{matrix} \end{array}.$$

Allora se $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n \in V$,

$f(v) = x_1 f(v_1) + \dots + x_n f(v_n) =$ perché f è lineare

$= x_1(a_{11} w_1 + \dots + a_{m1} w_m) + \dots + x_n(a_{1n} w_1 + \dots + a_{mn} w_m) =$

$= (a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n) w_1 + \dots + (a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n) w_m$

Perciò $f(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) = y_1 w_1 + \dots + y_m w_m$, con

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{cases}$$

sono le coordinate di $f(v)$ rispetto a B'.

Si ha $Y = AX$, dove $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$,

$$A = M^{B}_{B'}(f).$$

Si può scrivere un diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "K_B"'] & W \arrow[d, "K_{B'}"] \\ K^n \arrow[r, "L(A)"'] & K^m \end{tikzcd}$$

dove

$$\begin{tikzcd} v \arrow[r, "f"] \arrow[d, "K_B"] & f(v) \arrow[d, "K_{B'}"] \\ (x_1, \dots, x_n) \arrow[r, "L(A)"] & (y_1 \dots y_m) \end{tikzcd}$$

LIVELLO ASTRATTO

LIVELLO COMPUTAZIONALE

"commutativo" significa che $K_{B'} \circ f = L(A) \circ K_B$.

Teorema (forma canonica)

$f : V_n \longrightarrow W_m$ lineare.

Esistono basi B di V e B' di W tali che

$$M^{B}_{B'}(f) = \begin{array}{c} \\ m-r\{ \end{array} \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & \underbrace{0}_{n-r} \end{array}\right)$$

dove $r = rg(f)$:

matrice a blocchi: E_r è la matrice identica di ordine r, e gli altri blocchi $r \times (n-r)$, $(m-r) \times r$, $(m-r) \times (n-r)$ sono nulli.

<u>Dim.</u>

Il fatto che la matrice di f rispetto a basi $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ e $\mathcal{B}' = (w_1, \dots, w_m)$ ha quella forma significa che

$$\begin{aligned}
f(v_1) &= w_1 = 1 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 + \dots + 0 \cdot w_m \\
&\vdots \\
f(v_r) &= w_r = 0 \cdot w_1 + \dots + 1 \cdot w_r + \dots 0\, w_m \\
f(v_{r+1}) &= 0 \\
&\vdots \\
f(v_n) &= 0.
\end{aligned}$$

Siccome $r = rg(f)$, $n = \dim V$ = dominio di f, il nucleo di f ha dim $n-r$ (teor. della dimensione): $v_{r+1}, \dots, v_n$ sono $n-r$ elementi linearmente indip. di $\mathrm{Ker}\, f$, quindi ne formano una base.

Allora parto da una base di $\mathrm{Ker}\, f$: $v_{r+1}, \dots, v_n$, la completo a una base $\mathcal{B}$ di V: $v_1, \dots, v_r, \dots, v_n$.

Allora $f(v_1), \dots, f(v_r)$ sono r vettori che generano $\mathrm{Im} f$, che ha dim r: quindi formano una sua base $w_1, \dots, w_r$ e sono perciò linearmente indipendenti. Li completo

a una base di W: $\mathcal{B}' = (w_1 \dots w_r, \dots w_m)$.
Rispetto a tali basi la matrice è quella voluta. ■

Osserviamo che le basi $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ dipendono da alcune scelte, non sono uniche.

<u>Oss.</u> $L(A): K^n \longrightarrow K^m$ ha A come matrice associata rispetto alle basi canoniche di dominio e codominio. Se si cambiano basi, cambia la matrice.

<u>Esempio</u>

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ $\qquad L(A): \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\mathcal{B} = (v_1, v_2) := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

$$\mathcal{B}' = (w_1, w_2) := \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

$$L(A)(v_1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad L(A)(v_2) = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{5}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Perciò $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(L(A)) = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 2 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$.

Esempio con spazi vettoriali di polinomi.

$V = \mathbb{R}[t]_2$ con base $(1, t, t^2) = \mathcal{B}$

$W = \mathbb{R}[t]_3$ " " $(1, t, t^2, t^3) = \mathcal{B}'$.

Def. $f: V \longrightarrow W$ ponendo

$f(p(t)) = t^2 p'(t+1)$.

f è lineare per le proprietà della derivata, oppure scrivendo f esplicitamente:

se $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$,

$p'(t) = a_1 + 2a_2 t$

$p'(t+1) = a_1 + 2a_2(t+1) = (a_1 + 2a_2) + 2a_2 t$

$t^2 p'(t+1) = (a_1 + 2a_2) t^2 + 2a_2 t^3$.

Calcolo $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)$:

$f(1) = 0$, $f(t) = t^2$, $f(t^2) = 2t^2 + 2t^3$

allora $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Si ha: $\underset{4\times 3}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}} \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1 + 2a_2 \\ 2a_2 \end{pmatrix}$ sono le coordinate di $f(p)$.

Teorema $\underset{n}{f: V} \longrightarrow \underset{m}{W}$ lineare

Sia $A = M^{B}_{B'}(f)$. Allora $rg(f) = rg\, L(A) = rg(A)$.

Dim.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "K_B"'] & W \arrow[d, "K_{B'}"] \\ K^n \arrow[r, "L(A)"] & K^m \end{tikzcd}$$

$\operatorname{Im} L(A) = \{y \in K^m \mid y = L(A)(x),\ x \in K^n\} =$ $\quad K_B$ è isomorf.

$= \{y \in K^m \mid y = L(A)(K_B(v)),\ v \in V\} =$

$= \operatorname{Im}(L(A) \circ K_B) = \operatorname{Im}(K_{B'} \circ f) =$

diagr. commut.

$= \{y \in K^m \mid y = K_{B'}(f(v)),\ v \in V\}$

$= K_{B'}(f(V))$.

Ma $K_{B'}$ è un isomorfismo, dunque

$\operatorname{Im} L(A) \simeq \operatorname{Im} f$ e perciò $\underset{\underset{rg(A)}{\parallel}}{rg\, L(A)} = rg(f)$.

Conseguenza importante

Matrici che rappresentano la stessa applicaz. lineare rispetto a basi diverse hanno lo stesso rango (per colonne).

Teorema Siano fissate:

$\mathcal{B}$ base di V : $v_1, \dots, v_n$

$\mathcal{B}'$ base di W : $w_1, \dots, w_m$

L'applicazione

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} : \operatorname{Hom}(V, W) \longrightarrow M(m \times n, K)$$
$$f \longrightarrow M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)$$

è un isomorfismo di K-spazi vettoriali.

Dim.

1) $\cancel{f}$ $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}$ è lineare, ossia

$$\left.\begin{aligned} M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f+g) &= M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f) + M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(g) \\ M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\lambda f) &= \lambda M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f) \end{aligned}\right\} \text{facile}$$

2) E' iniettiva: essendo lineare, basta verificare che ha nucleo nullo.

Sia $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f) = 0$, allora $f(v_1) = 0, \dots, f(v_n) = 0$ e dunque $f = 0$ per il teor. di det. di un'appl. lineare.

3) E' suriettiva: sia data una matrice M; costruisco f t.c. $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f) = M$.

Basta associare a v_i il vettore che ha la colonna i come coordinate ~~da~~ rispetto a B', t_i, e ~~det~~ ~~t_i~~ poi si usa il teor. di det. di un'appl. lineare.

<u>Corollario</u>

$\dim \mathrm{Hom}(V,W) = \dim M(m\times n, K) = mn =$
$= \dim V \cdot \dim W$.

In particolare $\dim V^* = \dim V$, e dunque se $\dim V = n$ finita, si ha $V \simeq V^*$.

— · —

Matrice dell'applicazione lineare composta.

$$V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} U \qquad \text{lineari}$$

$$\begin{array}{cccl} m & n & p & \\ B & B' & B'' & \text{basi} \\ v_1 \dots v_m & v_1' \dots v_n' & v_1'' \dots v_p'' & \end{array}$$

Allora $\underset{p\times m}{M^{B}_{B''}(g\circ f)} = \underset{p\times n}{M^{B'}_{B''}(g)}\, \underset{n\times m}{M^{B}_{B'}(f)}$ prodotto righe per colonne

Sia $A = M^{B}_{B'}(f)$, $B = M^{B'}_{B''}(g)$. Allora

$$f(v_k) = a_{1k}v_1' + \dots + a_{nk}v_n' = \sum_{j=1}^{n} a_{jk} v_j'$$

$$g(v_j') = b_{1j} \cdot v_1'' + \dots + b_{pj} \cdot v_p'' = \sum_{i=1}^{p} b_{ij} v_i''$$

Allora $g(f(v_k)) = g\left(\sum_{j=1}^{m} a_{jk} v_j'\right) =$ linearità

$$= \sum_{j=1}^{m} a_{jk}\, g(v_j') = \sum_{j=1}^{m} a_{jk} \sum_{i=1}^{p} b_{ij} \cdot v_i'' = \text{prop. distrib.}$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{m} b_{ij} \cdot a_{jk}\right)}_{\text{elem. di } BA \text{ di posto } ik} v_i''. \qquad \blacksquare$$

<u>Caso particolare</u>

Se $f: V \longrightarrow V$ è un endomorfismo, $\dim V = n$, si <u>può</u> prendere la stessa base $\mathcal{B}$ per il dominio e il codominio, e si scrive $M_{\mathcal{B}}(f)$ anziché $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$.

L'isomorfismo $M_{\mathcal{B}}: \mathrm{Hom}(V,V) \to M(n \times n, K)$ ha allora la proprietà $M_{\mathcal{B}}(g \circ f) = M_{\mathcal{B}}(g) M_{\mathcal{B}}(f)$.

Entrambi gli spazi vettoriali hanno anche un'operazione interna di prodotto:

- in $\mathrm{Hom}(V,V)$, composizione
- in $M(n \times n, K)$, prodotto righe per colonne

Valgono prop. associativa, esistenza dell'elem. neutro, prop. distributiva: hanno struttura di <u>K-algebra</u>. Allora $M_{\mathcal{B}}$ è un isomorfismo di K-algebre, perché oltre alla somma e al prodotto esterno, conserva anche il prodotto interno.

Si può considerare in K^n la base canonica $\mathcal{B}$, e l'isomorfismo

$$M_{\mathcal{B}} : \mathrm{Hom}(K^n, K^n) \xrightarrow{\sim} M(n \times n, K)$$
$$f \longrightarrow M_{\mathcal{B}}(f)$$

In questo isomorfismo si corrispondono $L(A)$ e A. Inoltre <u>ogni</u> $f : K^n \to K^n$ è del tipo $L(A)$, per una matrice A.

~~$M_{\mathcal{B}}^{-1} : A \to L(A)$ è lineare, perciò~~

Si ha:

$$f \longrightarrow A = M_{\mathcal{B}}(f)$$
$$g \longrightarrow B = M_{\mathcal{B}}(g)$$
$$g \circ f \longrightarrow M_{\mathcal{B}}(g \circ f) = M_{\mathcal{B}}(g) M_{\mathcal{B}}(f) = BA$$

Allora $\boxed{L(BA) = g \circ f = L(B) \circ L(A).}$