ESERCIZI DI GEOMETRIA 1, FOGLIO 6

Trieste, 15 novembre 2018

1. Denotiamo con E_{ij} una matrice avente tutti gli elementi nulli, tranne quello di posto i, j uguale a 1. Denotiamo poi con $E_{\lambda,i}$ una matrice quadrata diagonale avente sulla diagonale principale gli elementi $1, \dots, 1, \lambda, 1, \dots, 1$, con λ al posto d'indice i.

Sia A una matrice $m \times n$ a coefficienti in K.

(i) Calcolare il prodotti righe per colonne $E_{ij}A$ dove E_{ij} è di ordine $m \times m$;

(ii) analogamente calcolare $E_{\lambda,i}A$;

(iii) dedurre che le matrici ottenute da A con una trasformazione elementare del I o del II tipo si possono esprimere nella forma BA, con B matrice opportuna.

2. Sia $f = L(A) : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla seguente matrice A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

(1) Determinare il rango di f e la dimensione del nucleo di f;

(2) trovare una base per il nucleo e una base per l'immagine di f;

(3) stabilire per quali valori reali di h il vettore $(-2, h, h^2) \in Im(f)$.

3. (i) Sia $V = K[t]$ il K-spazio vettoriale dei polinomi nella indeterminata t a coefficienti nel campo K. Sia $\mathcal{B}$ la sua base formata dai polinomi $v_i = t^i$, $i \in \mathbb{N}$. Siano v_i^* le forme lineari su V definite da $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$ (simbolo di Kronecker). Dimostrare che tali forme lineari non generano lo spazio vettoriale duale V^*.

(ii) Sia ora $\{v_i\}_{i \in I}$ una base di uno spazio vettoriale V, con I un insieme d'indici arbitrario, e siano $v_i^* \in V^*$ forme lineari definite come sopra. Dimostrare che i $v_i^*, i \in I$, sono linearmente indipendenti, e che generano V^* se e solo se V ha dimensione finita.

4. Per ciascuna delle seguenti matrici reali

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & x & 1 \end{pmatrix},$$

trovare matrici quadrate invertibili S e T tali che SAT sia una matrice a blocchi della forma canonica

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$