ESERCIZI DI GEOMETRIA 1, FOGLIO 7

Trieste, 22 novembre 2018

1. (i) Calcolare, se possibile, l'inversa della seguente matrice su $\mathbb{R}$ e su $\mathbb{Z}_7$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

(ii) Determinare per quali valori $x \in \mathbb{R}$ la matrice reale

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$$

è invertibile, e per tali valori calcolare la matrice inversa.

(iii) Calcolare il rango della seguente matrice reale al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}.$$

Per quali valori di k questa matrice è invertibile?

2. Determinare il numero di elementi (ossia *l'ordine*) del gruppo $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}_p)$ delle matrici invertibili $n \times n$, con coefficienti nel campo finito $K = \mathbb{Z}_p$ (dove p è un numero primo). (Suggerimento: contare quanti basi distinte vi sono nello spazio vettoriale $K^n = (\mathbb{Z}_p)^n$.)

3. Sia $V = \mathbb{R}_2[t]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado al più 2 nella indeterminata t. Considerare i polinomi $p_1(t) = t^2 - 2t$, $p_2(t) = 1 + 2t$, $p_3(t) = 2 - t^2$, $q_1(t) = -1 + t$, $q_2(t) = -1 + t - t^2$, $q_3(t) = 2t + 2t^2$. Dimostrare che $B = (p_1, p_2, p_3)$ e $B' = (q_1, q_2, q_3)$ sono due basi di V e determinare la matrice di passaggio da B a B'.

4. Siano dati i seguenti vettori in $\mathbb{Q}^3$: $v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (0, 1, -1), v_3 = (0, 0, 2), w_1 = (3, 1, 0), w_2 = (-1, 0, 2), w_3 = (0, 2, 0)$. Dimostrare che esiste un unico endomorfismo T di $\mathbb{Q}^3$ tale che $T(v_i) = w_i$ per $i = 1, 2, 3$, e trovare le matrici associate a T rispetto alla base B e rispetto alla base canonica.