

Matrici invertibili

Def. - A matrice quadrata $n \times n$
è detta invertibile se esiste $\bar{A}^{-1} \in M(n \times n, K)$
tale che $A\bar{A}^{-1} = \bar{A}^{-1}A = E_n$ matrice identica.

Denotiamo $GL(n, K) \subset M(n \times n, K)$ il
sottinsieme delle matrici invertibili.

Prop. $GL(n, K)$ è un gruppo rispetto al
prodotto righe per colonne, detto
gruppo lineare generale.

Dim.

1) Siano A, B matrici invertibili; allora
anche AB è invertibile e si ha $(AB)^{-1} = \bar{B}^{-1}\bar{A}^{-1}$.
Infatti $(AB)(\bar{B}^{-1}\bar{A}^{-1}) = A(\bar{B}^{-1}B)\bar{A}^{-1} = A\bar{E}_n\bar{A}^{-1} = A\bar{A}^{-1} = \bar{E}_n$.

Analogamente $(\bar{B}^{-1}\bar{A}^{-1})(AB) = \bar{E}_n$.

2) E_n è invertibile

\Rightarrow se A è invertibile, pure \bar{A}^{-1} è invertibile e
precisamente $(\bar{A}^{-1})^{-1} = A$.

Oss. $GL(n, K)$ non è sottosp. vettoriale di
 $M(n \times n, K)$. Per esempio: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

è somma di matrici invertibili, ma non è invertibile.

Om-2. Se A è invertibile, ${}^t A$ è invertibile e si ha $({}^t A)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

Teorema $f: V \rightarrow W$ lineare, basi B di V , B' di W . Si ha che f è un isomorfismo se e solo $M_{B'}^B(f)$ è invertibile.

Dim.

Si ha f isomorfismo $\Rightarrow \exists \tilde{f}$ isom. inverso

t.c. $f \circ \tilde{f} = \text{id}_W$ e $\tilde{f} \circ f = \text{id}_V$.

Si ha $A = M_{B'}^B(f)$, $A^{-1} = M_B^{B'}(\tilde{f})$. Allora

$$AA^{-1} = M_{B'}^B(f) M_B^{B'}(\tilde{f}) = M_{B'}^{B'}(f \circ \tilde{f}) = M_{B'}^{B'}(\text{id}_W) = E_n,$$

$$A^{-1}A = M_B^{B'}(\tilde{f}) M_{B'}^B(f) = M_B^B(\tilde{f} \circ f) = M_B^B(\text{id}_V) = E_n$$

$$\Rightarrow A^{-1} = A^{-1}.$$

Vicev. sia $A = M_{B'}^B(f)$ invertibile. Allora

$L(A)$ è un isomorfismo, infatti $AA^{-1} = E_n$,

$$\Rightarrow L(AA^{-1}) = L(A) \circ L(A^{-1}) = L(E_n) = \text{id}_{K^n}. \text{ Analogamente.}$$

$A^{-1}A = E_n \Rightarrow L(A^{-1}) \circ L(A) = \text{id}_{K^n}$ e dunque $L(A^{-1})$ è l'applicazione inversa di $L(A)$.

Ora consideriamo il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \kappa_B \downarrow & & \downarrow \kappa_{B'} \\ K^m & \xrightarrow{L(A)} & K^n \end{array}$$

$$f = \kappa_{B'}^{-1} \circ L(A) \circ \kappa_B$$

composizione di isomorfismi
è isomorfismo.

~~Dal fatto che A è isomorfismo si è visto~~

In particolare abbiamo che A è
invertibile $\Leftrightarrow L(A)$ è isomorfismo \Leftrightarrow

$L(A)$ è suriettiva (perché endomorfismo)

\Leftrightarrow le m colonne di A generano il codom.

$K^m \Leftrightarrow$ il rango di A è massimo m .

Analogamente, ragionando sulle righe:

A è invertibile \Leftrightarrow le n righe di

A generano lo spazio delle righe \Leftrightarrow

formano una base di K^n .

Cambiamenti di base.

V K -spazio vettoriale di dim n

Supponiamo date 2 basi di V :

$$A = (v_1, \dots, v_n)$$

$$B = (w_1, \dots, w_n)$$

Consideriamo il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\text{id}_V} & V \\ \downarrow \kappa_A & & \downarrow \kappa_B \\ K^n & \longrightarrow & K^n \end{array} \quad \begin{array}{ccc} v & \longrightarrow & v \\ \downarrow & & \downarrow \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \longrightarrow & \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{tale che } v &= x_1 v_1 + \dots + x_n v_n = \\ &= y_1 w_1 + \dots + y_n w_n. \end{aligned}$$

Siccome $\text{Hom}(K^n, K^n) \simeq M(n \times n, K)$,

l'applicazione lineare $K^n \rightarrow K^n$ che manda le coordinate di v rispetto ad A (x_1, \dots, x_n) in quelle rispetto a B (y_1, \dots, y_n) è del tipo $L(A)$, dove $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\text{id}_V)$,

$$\text{e } \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Def. A è detta matrice del cambiamento

di base, o matrice di passaggio da \mathcal{A} a \mathcal{B} .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$\text{id}_V(v_1) \quad \text{id}_V(v_2) \quad \dots$

La prima colonna contiene le coordinate di v_1 risp. a w_1, \dots, w_m , la seconda quelle di v_2 , ecc.

Om. Siccome $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\text{id}_V)$ rappresenta id_V , che è ovviamente un isomorfismo, rispetto a una scelta di basi di dominio e codominio, il rango di $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\text{id}_V)$ è uguale a m , cioè la matrice è invertibile. La sua inversa è proprio $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(\text{id}_V)$. Infatti:

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{\text{id}_V} & V & \xrightarrow{\text{id}_V} & V \\ \downarrow K_{\mathcal{A}} & & \downarrow K_{\mathcal{B}} & & \downarrow K_{\mathcal{A}} \\ K^m & \xrightarrow{L(A)} & K^m & \xrightarrow{L(A')} & K^m \\ & \searrow \text{id}_{K^m} & & & \end{array}$$

questo diagramma è commutativo

$$A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\text{id}_V), \quad A' = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(\text{id}_V), \quad L(A') \circ L(A) =$$

$$L(A'A) = \text{id}_{K^n}$$

Quindi $A'A = E_n$. Analogamente
 si ha anche $AA' = E_n$.

Dunque $A' = A^{-1}$.

Matrici di un'applicazione lineare
 rispetto a basi diverse.

Sia data un'applicazione lineare $f: V \rightarrow W$

e siano date 2 basi di V : $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$

e 2 basi di W : $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$.

Che relazione c'è tra $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f)$ e

$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{A}'}(f)$? Consideriamo il diagramma:

$$\begin{array}{ccccccc}
 V & \xrightarrow{\text{id}_V} & V & \xrightarrow{f} & W & \xrightarrow{\text{id}_W} & W \\
 \downarrow \kappa_{\mathcal{A}'} & & \downarrow \kappa_{\mathcal{A}} & & \downarrow \kappa_{\mathcal{B}} & & \downarrow \kappa_{\mathcal{B}'} \\
 K^n & \xrightarrow{M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}'}} & K^n & \xrightarrow{M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f)} & K^m & \xrightarrow{M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\text{id}_W)} & K^m
 \end{array}$$

Allora $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{A}'}(f) = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\text{id}_W) M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f) M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}'}$.

Due matrici che rappresentano f rispetto a basi diverse differiscono per il prodotto a destra e sinistra per 2 matrici invertibili.

Conseguenza di un teorema precedente:

Data M , matrice $m \times n$, esistono matrici invertibili S, T tali che

$$SMT = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \text{ dove } r = \text{rg}(M).$$

Dim. - Considero $L(M)$: rispetto alle basi canoniche M è la sua matrice.

Ma esistono basi di K^n e K^m , A e B , rispetto alle quali la matrice è

$$\left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right). \text{ Sia } T = M_B^A(\text{id}_{K^n}),$$

$S = M_B^B(\text{id}_{K^m})$: SMT è la matrice voluta.

Da ciò segue una nuova dimostrazione del fatto che il rango per righe e il rango per colonne di una matrice coincidono.

In fatti, data M $m \times n$, esistono matrici invertibili S, T tali che $SMT = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A_r$

1) Chiaramente il rango per righe di $A_r = SMT$ è uguale a quello per colonne, ed è uguale a r .

2) A_r e M hanno lo stesso rango per colonne perché rappresentano $L(A)$ rispetto a basi diverse.

3) Il rango per righe di SMT è uguale al rango per colonne di ${}^t(SMT) = {}^t T {}^t M {}^t S$ che è uguale al rango per colonne di ${}^t M$, per il punto 2); ed è quindi uguale al rango per righe di M .

Caso di un endomorfismo $f: V \rightarrow V$

Se usiamo la stessa base nel dominio e nel codominio, il diagramma diventa:

$$\begin{array}{ccccccc} V & \xrightarrow{\text{id}_V} & V & \xrightarrow{f} & V & \xrightarrow{\text{id}_V} & V \\ K_B \downarrow & & K_A \downarrow & & K_A \downarrow & & K_B \downarrow \\ K^n & \xrightarrow{M_A^B(\text{id}_V)} & K^n & \xrightarrow{A} & K^n & \xrightarrow{M_B^A(\text{id}_V)} & K^n \end{array}$$

Allora $M_B^B(f) = M_B^A(\text{id}_V) M_A^A(f) M_A^B(\text{id}_V)$

sono matrici una w'era dell'altra

$M_B^B(f) = S M_A^A(f) S^{-1}$, con S matrice del cambiamento di base. Se abbiamo le coordinate dei vettori di B rispetto ad A , possiamo scrivere direttamente $M_A^B(\text{id}_V)$.

Def. 2 matrici quadrate sono simili se $\exists S$ invertibile h.c. $A = S B S^{-1}$.

È una relazione d'equivalenza tra matrici $n \times n$: similitudine.

Si' ha due due matrici sono simili se
rappresentano lo stesso endomorfismo
rispetto a basi diverse.

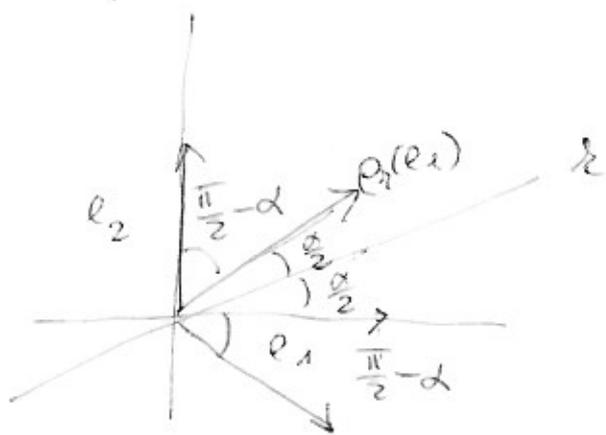
Un problema importante e non banale è
quello di trovare un rappresentante "semplice"
per la classe di similitudine di una matrice
data - "forma canonica".

Vedremo il problema della diagonalizzabilità
e la forma canonica di Jordan.

Om. matrici simili hanno lo stesso
rank.

$$V = \mathbb{R}^2 = W \quad \left| \begin{array}{c} \text{ESEMPIO} \\ \rho_r \end{array} \right.$$

Def. la riflessione rispetto alla retta r , passante per O e formante con l'asse x l'angolo $\frac{\alpha}{2}$.



ρ_r è l'applicazione lineare
isodifinita
che opera così:

$$e_1 \rightarrow (\cos \alpha, \sin \alpha)$$

rispetto ad x

$$e_2 \rightarrow (\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha), \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha))$$

$$= (\sin \alpha, -\cos \alpha)$$

La matrice rispetto alla base canonica è

$$M_{\mathcal{C}}(\rho_r) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

Per descrivere ρ_r è più conveniente usare un'altra base $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$, dove

$$v_1 \text{ sia parallelo a } r : v_1 \rightarrow v_1$$

$$v_2 \text{ sia ortogonale a } r : v_2 \rightarrow -v_2$$

$$M_{\mathcal{B}}(\rho_r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\text{id}) M_{\mathcal{C}}(\rho_r) M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\text{id})$$

$$= S \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} S^{-1}$$

dove S è la matrice di passaggio da \mathcal{C} a \mathcal{B} .

S^{-1} contiene nelle colonne le coordinate di v_1 e v_2 rispetto a \mathcal{B} .

v_1 si ottiene da e_1 con una rotazione di $\frac{\alpha}{2}$, perciò $v_1 = (\cos \frac{\alpha}{2}, \sin \frac{\alpha}{2})$. Analogamente

v_2 si ottiene ruotando e_2 di $\frac{\alpha}{2}$.

La matrice della rotazione di $\frac{\alpha}{2}$ è dunque:

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} & -\sin \frac{\alpha}{2} \\ \sin \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$$

S rappresenta l'appl. lineare inversa, cioè la rotazione di $-\frac{\alpha}{2}$.

$$S = \begin{pmatrix} \cos(-\frac{\alpha}{2}) & -\sin(-\frac{\alpha}{2}) \\ \sin(-\frac{\alpha}{2}) & \cos(-\frac{\alpha}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} & \sin \frac{\alpha}{2} \\ -\sin \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$$

Verificare che $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} S^{-1}$.

(usare le formule di duplicazione)

Questo equivale a verificare che

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} S = S \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \text{ oppure}$$

$$S^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} S^{-1}$$

sia n qualunque.

$A_{n \times n}$: cerchiamo X t.c. $AX = E_n$:
equazione matriciale nella matrice incognita

$X = (x_{ij})_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n}}$ matrice di incognite.

$$AX = E_n \Leftrightarrow AX^1 = e_1, AX^2 = e_2, \dots, AX^n = e_n$$

dove X^1, X^2, \dots, X^n sono le colonne di X .

Trovare X equivale a risolvere n sistemi lineari con matrice dei coefficienti A , e colonne dei termini noti e_1, e_2, \dots, e_n .

A è invertibile \Leftrightarrow ognuno di tali sistemi ha 1! soluzione. Per risolverli, usiamo l'algoritmo di Gauss, e riduciamo A a gradini operando contemporaneamente sulla colonna dei termini noti; le trasformazioni sono le stesse per tutti gli n sistemi.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & 0 & & 0 \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & & 1 \end{array} \right) = \left(A \mid E_n \right) \rightarrow$$

$\left(B \mid C \right)$: abbiamo così n sistemi lineari equivalenti ai primi.

a gradini con n pivot

Ora operiamo di nuove trasformazioni elementari a partire dal basso, per mandare a zero tutti gli elementi sopra la diagonale principale di B .

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} b_{11} & & & c_{11} & \dots & c_{1n} \\ & b_{22} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & b_{n-1,n} & & \\ & & & b_{nn} & & c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{array} \right)$$

$b_{nn} \neq 0$
usando l'ultima e mandando a zero l'ultima colonna di B sopra b_{nn}

ultima riga e diagonale invariata

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|ccc} b_{11} & b_{12} & b_{1,n-1} & 0 & c_{11} & \dots & c_{1n} \\ 0 & b_{22} & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & b_{n-1,n} & c_{n-1,1} & \dots & c_{n-1,n} \\ 0 & 0 & & b_{nn} & c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{array} \right) \rightarrow$$

Ora mandiamo a zero la penultima colonna sopra $b_{n-1,n}$

$$(n-1)\text{-esima riga} - \left(\frac{b_{n-1,n}}{b_{nn}} \right) n\text{-esima}$$

$$(n-2)\text{-esima riga} - \left(\frac{b_{n-2,n}}{b_{nn}} \right) n\text{-esima}$$

$$(1\text{-esima riga}) - \left(\frac{b_{1,n}}{b_{nn}} \right) n\text{-esima}$$

\rightarrow ecc. - -

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{array} \right) D$$

I sistemi lineari ora sono del tipo: $BX = D$

$$\textcircled{1} \begin{cases} b_{11} x_{11} = d_{11} \\ b_{22} x_{21} = d_{21} \\ \vdots \\ \vdots \end{cases}$$

questo dà la prima colonna di X

$$x_{11} = \frac{d_{11}}{b_{11}}, \quad x_{21} = \frac{d_{21}}{b_{22}}, \quad \dots, \quad x_{n1} = \frac{d_{n1}}{b_{nn}}$$

$$(2) \begin{cases} b_{11} x_{12} = d_{12} \\ b_{22} x_{22} = d_{22} \\ \vdots \\ b_{nn} x_{n2} = d_{n2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{12} = \frac{d_{12}}{b_{11}} \\ x_{22} = \frac{d_{22}}{b_{22}} \\ \vdots \\ x_{n2} = \frac{d_{n2}}{b_{nn}} \end{cases}$$

$$BX^2 = D^2$$

$$\text{ecc. } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d_{11}}{b_{11}} & \frac{d_{12}}{b_{11}} & \dots & \frac{d_{1n}}{b_{11}} \\ \frac{d_{21}}{b_{22}} & \frac{d_{22}}{b_{22}} & \dots & \frac{d_{2n}}{b_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{d_{n1}}{b_{nn}} & \frac{d_{n2}}{b_{nn}} & \dots & \frac{d_{nn}}{b_{nn}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d^1}{b_{11}} \\ \frac{d^2}{b_{22}} \\ \vdots \\ \frac{d^n}{b_{nn}} \end{pmatrix}$$

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esempio di cambio di base

$$f: V \rightarrow W \text{ con}$$

$$V = \mathbb{R}[t]_2, W = \mathbb{R}[t]_3,$$

$$f(p(t)) = t^2 p'(t+1).$$

$$\text{Le } B = (1, t, t^2), B' = (1, t, t^2, t^3)$$

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ora consideriamo $a = (1, t-1, (t-1)^2)$ in V e

$a' = (1, t-2, (t-2)^2, (t-2)^3)$ in W . Sono basi?

$$M_B^a(\text{id}_V) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ha } \text{rg } 3 \Rightarrow a \text{ è base.}$$

$$M_{B'}^{a'}(\text{id}_W) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ha } \text{rg } 4 \Rightarrow a' \text{ è base.}$$

$M_a^a(f) = ?$ applico la regola

$$M_a^a(f) = \underbrace{M_a^{B'}(\text{id}_W)}_{\text{è l'inversa di } M_{B'}^{a'}(\text{id}_W)} M_{B'}^B(f) \underbrace{M_B^a(\text{id}_V)}_{\text{già trovata}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 4 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 12 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$$

più triangolare

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & -16 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

questa è l'inversa.

$$f(1) = 0, \quad f(t-1) = 1, \quad f(t^2 - 2t + 1) = 2t^3$$

$$2t^3 = 2(t^3 - 6t^2 + 12t - 8) + 12(t^2 - 4t + 4) + 24(t-2) + 16$$

: ha coeff. (2, 12, 24, 16)
risp. ad a' .