

**CORSO DI GEOMETRIA
GEOMETRIA AFFINE
A.A. 2018/2019
PROF. VALENTINA BEORCHIA**

INDICE

1.	Spazi affini	1
2.	Sottospazi affini e loro equazioni cartesiane e parametriche	3
3.	Parallelismo, incidenza e sottospazi affini sghembi	5
4.	Passaggio da equazioni cartesiane ad equazioni parametriche	5
5.	Passaggio da equazioni parametriche ad equazioni cartesiane	6

1. SPAZI AFFINI

Definizione 1.1. Sia V uno spazio vettoriale su un campo \mathbb{K} . Uno spazio affine su V è un insieme non vuoto \mathbb{A} , i cui elementi si dicono i **punti di \mathbb{A}** , ed una funzione

$$\sigma : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow V, \quad \sigma(P, R) = \overrightarrow{PR},$$

tale che valgano i seguenti assiomi:

- (SA1) per ogni $P \in \mathbb{A}$ e per ogni $v \in V$, $\exists! R \in \mathbb{A}$ tale che

$$v = \overrightarrow{PR};$$

- (SA2) per ogni terna di punti (non necessariamente distinti) $P, Q, R \in \mathbb{A}$ si ha

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}.$$

Proposizione 1.2. Dai due assiomi di spazio affine si hanno le seguenti proprietà:

- (1) per ogni $P \in \mathbb{A}$ si ha $\overrightarrow{PP} = 0 \in V$;
- (2) per ogni $P, R \in \mathbb{A}$, si ha $\overrightarrow{RP} = -\overrightarrow{PR}$;
- (3) per ogni punto $P \in \mathbb{A}$, la funzione

$$f_P : \mathbb{A} \rightarrow V, \quad f_P(Q) = \overrightarrow{PQ}$$

è una biiezione.

Dimostrazione. (1) Dall'assioma (SA2), ponendo $P = Q = R$, si ha $\overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PP} = \overrightarrow{PP}$, e sommando ad entrambi i membri il vettore $-\overrightarrow{PP}$ si ha la tesi.

- (2) Dall'assioma (SA2), ponendo $R = P$, si ha $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PP} = 0$ per il primo punto, quindi \overrightarrow{QP} è il vettore opposto di \overrightarrow{PQ} .
- (3) la tesi segue direttamente dall'assioma (SA1).

□

Definizione 1.3. Sia \mathbb{A} uno spazio affine su uno spazio vettoriale V di dimensione finita. Allora definiamo la **dimensione di \mathbb{A}** come

$$\dim \mathbb{A} := \dim V.$$

Se

- $\dim \mathbb{A} = 1$, allora \mathbb{A} si dice **retta affine**;
- $\dim \mathbb{A} = 2$, allora \mathbb{A} si dice **piano affine**.

Definizione 1.4. Se $V = \mathbb{K}^n$, possiamo definire una struttura di spazio affine su \mathbb{K}^n stesso nel modo seguente:

$$\sigma : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n, \quad \sigma((p_1, p_2, \dots, p_n), (q_1, q_2, \dots, q_n)) := \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ \vdots \\ q_n - p_n \end{pmatrix} = \overrightarrow{PQ}.$$

Si verifica facilmente che σ verifica i due assiomi. Lo spazio affine così definito verrà indicato con il simbolo

$$\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n.$$

Definizione 1.5. Sia \mathbb{A} uno spazio affine su uno spazio vettoriale V . Un **riferimento affine per \mathbb{A}** è il dato di:

- un punto $O \in \mathbb{A}$;
- una base $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ di V .

Il punto O si dice **origine del riferimento**.

Dato un punto $P \in \mathbb{A}$ qualsiasi, possiamo definire le **coordinate di P** come le coordinate del vettore \overrightarrow{OP} nella base $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, cioè se

$$\overrightarrow{OP} = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n,$$

definiamo l' n -upla (a_1, a_2, \dots, a_n) come coordinate di P .

Esempi 1.6. Se \mathbb{A} è una retta affine, un riferimento affine è dato da un punto $O \in \mathbb{A}$ e da un vettore non nullo $v \in V$.

Se \mathbb{A} è un piano affine, un riferimento affine è dato da un punto $O \in \mathbb{A}$ e da due vettori non nullo e non proporzionali $v_1, v_2 \in V$.

Definizione 1.7. In $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ possiamo scegliere il seguente riferimento:

- $O \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$;
- la base canonica di \mathbb{K}^n :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Questo riferimento si dice **riferimento affine canonico di $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$** .

2. SOTTOSPAZI AFFINI E LORO EQUAZIONI CARTESIANE E PARAMETRICHE

Definizione 2.1. Sia \mathbb{A} spazio affine su V . Fissati

- un punto $Q \in \mathbb{A}$, e
- un sottospazio vettoriale $W \subseteq V$,

il *sottospazio affine passante per Q e parallelo a W* è il sottoinsieme di \mathbb{A} definito

$$S = \{P \in \mathbb{A} \mid \overrightarrow{QP} \in W\}.$$

Il sottospazio $W \subseteq V$ si chiama *giacitura di S* .

Proposizione 2.2. Dalla definizione si hanno le seguenti proprietà:

- (1) se S è un sottospazio affine passante per Q e di giacitura W , allora

$$Q \in S.$$

- (2) Per ogni coppia di punti $P_1, P_2 \in S$, si ha

$$\overrightarrow{P_1P_2} \in W.$$

- (3) S ha una struttura di spazio affine su W .

Definizione 2.3. Sia $S \subseteq \mathbb{A}$ un sottospazio affine di giacitura W . Definiamo $\dim S := \dim W$.

Se

$$\dim S = \dim \mathbb{A} - 1,$$

allora S si dice *iperpiano* di \mathbb{A} .

Vediamo ora due modi per descrivere i sottospazi affini, cioè tramite equazioni cartesiane ed equazioni parametriche.

Teorema 2.4. Sia $A \cdot x = b$ un sistema di m equazioni lineari di ordine n a coefficienti nel campo \mathbb{K} . Se $A \cdot x = b$ è compatibile, allora l'insieme delle sue soluzioni

$$S = \{s \in \mathbb{K}^n \mid A \cdot s = b\}$$

è un sottospazio affine di $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ la cui giacitura è il sottospazio vettoriale W di \mathbb{K}^n formato dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato:

$$W = \{s \in \mathbb{K}^n \mid A \cdot s = 0\}.$$

In tal caso $\dim(S) = n - \text{rg}(A)$, e per ogni $\tilde{s} \in S$, il sottoinsieme S coincide con il sottospazio affine di $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ passante per \tilde{s} e parallelo a W .

Dimostrazione. Poiché il sistema lineare è compatibile, S non è vuoto. Sia dunque \tilde{s} una sua soluzione. Per il teorema di struttura dell'insieme delle soluzioni di un sistema lineare, ogni altra soluzione s si può scrivere nella forma

$$s = \tilde{s} + w, \quad w \in W.$$

Quindi si ha

$$s \in S \iff s - \tilde{s} \in W \iff \overrightarrow{\tilde{s}s} \in W.$$

Per definizione, S risulta il sottospazio affine di $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ passante per \tilde{s} e di giacitura W .

Infine, per il Teorema di Dimensione, $\dim W = n - \text{rg}A = \dim S$. □

Definizione 2.5. Sia $S \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ un sottospazio affine. Un *sistema di equazioni cartesiane per S* è un qualunque sistema di equazioni lineari $Ax = b$, tale che

$$S = \{s \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n \mid A \cdot s = b\}.$$

Osservazione 2.6. (1) Un sottospazio affine $S \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ può essere descritto da diversi sistemi di equazioni Cartesiane. Infatti, se $S = \{s \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n \mid A \cdot s = b\}$, allora per ogni sistema di equazioni lineari $\tilde{A} \cdot x = \tilde{b}$ equivalente ad $A \cdot x = b$, le equazioni di $\tilde{A} \cdot x = \tilde{b}$ sono delle equazioni Cartesiane per S .

(2) Sia $A \cdot x = b$ un sistema di equazioni cartesiane per il sottospazio affine $S \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$. Allora il punto $(0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ appartiene ad S se e solo se $b = 0$, cioè se e solo se il sistema di equazioni lineari $A \cdot x = b$ è omogeneo.

(3) Ogni iperpiano di $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ può essere descritto da una equazione lineare del tipo

$$(2.1) \quad a_1x_1 + \dots + a_nx_n = d,$$

con $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ non tutti nulli. Infatti, se $A \cdot x = b$ è un sistema di equazioni cartesiane per S , abbiamo che

$$\dim(S) = n - 1 = n - \text{rg}(A).$$

Da questo segue che

$$\text{rg}(A) = 1.$$

Siccome il sistema lineare $A \cdot x = b$ 'è compatibile, per il Teorema di Rouché - Capelli si ha

$$\text{rg}(A|b) = \text{rg}(A) = 1.$$

Sia

$$\tilde{A} \cdot x = \tilde{b}$$

un sistema lineare equivalente con \tilde{A} a scala. Siccome

$$\text{rg}(\tilde{A}|\tilde{b}) = \text{rg}(A|b) = 1,$$

la matrice $(\tilde{A}|\tilde{b})$ ha un'unica riga non nulla, che corrisponde a una equazione lineare del tipo (2.1).

Vediamo ora come si possono descrivere i sottospazi affini tramite equazioni parametriche.

Sia $S \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ is sottospazio affine passante per un punto $Q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ e di giacitura $W \subseteq \mathbb{K}^n$. Sia

$$\{w_1, \dots, w_m\}$$

una base del sottospazio vettoriale W . Fissiamo le componenti dei vettori w_i (come elementi di \mathbb{K}^n)

$$w_1 = \begin{pmatrix} w_{11} \\ w_{21} \\ \vdots \\ w_{n1} \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} w_{12} \\ w_{22} \\ \vdots \\ w_{n2} \end{pmatrix}, \dots, \quad w_m = \begin{pmatrix} w_{1m} \\ w_{2m} \\ \vdots \\ w_{nm} \end{pmatrix}.$$

Allora abbiamo

$$\begin{aligned} P = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in S &\iff \overrightarrow{QP} \in W \iff \\ \iff \exists t_1, t_2, \dots, t_m \in \mathbb{K} : \overrightarrow{QP} &= t_1w_1 + t_2w_2 + \dots + t_mw_m \iff \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 - q_1 \\ x_2 - q_2 \\ \vdots \\ x_n - q_n \end{pmatrix} &= t_1 \begin{pmatrix} w_{11} \\ w_{21} \\ \vdots \\ w_{n1} \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} w_{12} \\ w_{22} \\ \vdots \\ w_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + t_m \begin{pmatrix} w_{1m} \\ w_{2m} \\ \vdots \\ w_{nm} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \exists t_1, t_2, \dots, t_m \in \mathbb{K} : \begin{pmatrix} x_1 - q_1 \\ x_2 - q_2 \\ \vdots \\ x_n - q_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} t_1 w_{11} + t_2 w_{12} + \cdots + t_m w_{1m} \\ t_1 w_{21} + t_2 w_{22} + \cdots + t_m w_{2m} \\ \vdots \\ t_1 w_{n1} + t_2 w_{n2} + \cdots + t_m w_{nm} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Definizione 2.7. Usando le stesse notazioni di cui sopra, le equazioni

$$(2.2) \quad \begin{cases} x_1 = q_1 + t_1 w_{11} + t_2 w_{12} + \cdots + t_m w_{1m} \\ x_2 = q_2 + t_1 w_{21} + t_2 w_{22} + \cdots + t_m w_{2m} \\ \vdots \\ x_n = q_n + t_1 w_{n1} + t_2 w_{n2} + \cdots + t_m w_{nm} \end{cases}$$

si dicono *equazioni parametriche di S*.

Osservazione 2.8. Un sottospazio affine $S \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ può essere descritto da diversi sistemi di equazioni parametriche.

3. PARALLELISMO, INCIDENZA E SOTTOSPAZI AFFINI SGHEMBI

Definizione 3.1. Sia \mathbb{A} uno spazio affine su uno spazio vettoriale V , e siano

$$S_1 \subseteq \mathbb{A}, \quad S_2 \subseteq \mathbb{A}$$

due sottospazi affini di giaciture W_1 e W_2 rispettivamente.

- S_1 e S_2 si dicono *paralleli*, in simboli

$$S_1 \parallel S_2,$$

se $W_1 \subseteq W_2$ oppure $W_2 \subseteq W_1$;

- se S_1 e S_2 non sono paralleli, allora si dicono *incidenti* se

$$S_1 \cap S_2 \neq \emptyset,$$

mentre si dicono *sghembi* se

$$S_1 \cap S_2 = \emptyset.$$

4. PASSAGGIO DA EQUAZIONI CARTESIANE AD EQUAZIONI PARAMETRICHE

Sia $S \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ un sottospazio affine dato dalle equazioni cartesiane $A \cdot x = b$. Per trovare delle equazioni parametriche per S , si risolve il sistema di equazioni lineari $A \cdot x = b$, esprimendo le sue soluzioni in funzione di opportune variabili libere t_1, \dots, t_m , che equivale a trovare una soluzione particolare Q di $Ax = b$, ed una base w_1, \dots, w_m dello spazio W delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato $A \cdot x = 0$, in modo che

$$S = Q + W = Q + t_1 w_1 + \dots + t_m w_m,$$

al variare di $t_1, \dots, t_m \in \mathbb{K}$.

5. PASSAGGIO DA EQUAZIONI PARAMETRICHE AD EQUAZIONI CARTESIANE

Sia $S \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ un sottospazio affine dato dalle equazioni parametriche

$$\begin{cases} x_1 = q_1 + t_1 w_{11} + t_2 w_{12} + \cdots + t_m w_{1m} \\ x_2 = q_2 + t_1 w_{21} + t_2 w_{22} + \cdots + t_m w_{2m} \\ \vdots \\ x_n = q_n + t_1 w_{n1} + t_2 w_{n2} + \cdots + t_m w_{nm} \end{cases}$$

Osserviamo che un punto $P = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ appartiene ad S se e solo se il seguente sistema lineare delle indeterminate t_1, t_2, \dots, t_m ammette soluzione

$$\overbrace{\begin{pmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1m} \\ w_{21} & \cdots & w_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{n1} & \cdots & w_{nm} \end{pmatrix}}^A \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_m \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} x_1 - q_1 \\ x_2 - q_2 \\ \vdots \\ x_n - q_n \end{pmatrix}}^b.$$

Ciò è equivalente all'annullamento delle ultime $n - r$ componenti del vettore \tilde{b} , dove $(\tilde{A}|\tilde{b})$ è una matrice che si ottiene da $(A|b)$ mediante operazioni elementari e \tilde{A} è a scala. Osserviamo

che $\dim S = m = \text{rg } A$. Quindi, se $\tilde{b} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \vdots \\ \tilde{b}_n \end{pmatrix}$, delle equazioni cartesiane per S sono date

da

$$\begin{cases} \tilde{b}_{m+1} = 0 \\ \tilde{b}_{m+2} = 0 \\ \cdots \\ \tilde{b}_n = 0. \end{cases}$$