FOGLIO 9

(1) Consideriamo il caso (b), gli altri sono analoghi

$P = (2,0) \quad Q = (-1,-1)$

<u>Applichiamo vari metodi, tutti equivalenti:</u>

- ~~Per~~ I più bravi ricorderanno che esiste una formula esplicita:

$$\frac{x - x_P}{x_Q - x_P} = \frac{y - y_P}{y_Q - y_P}$$

$$\frac{x - 2}{-1-2} = \frac{y - 0}{-1-0}$$

$$2 - x = -3y \longrightarrow \boxed{x - 3y = 2}$$

- Un'altra possibilità è prendere la generica equazione di una retta e imporre il passaggio per i punti (per due punti passa una sola retta)

$$ax + by = c \xrightarrow{\text{passaggio } P} a2 + b \cdot 0 = c$$

$$ax + by = c \xrightarrow{\text{passaggio } Q} a(-1) + b(-1) = c$$

$$\begin{cases} 2a - c = 0 \\ -a - b - c = 0 \end{cases}$$

Questo è un sistema lineare di due equazioni a tre incognite (a,b,c). Determiniamo il rango

$$\begin{matrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -\frac{3}{2} \end{matrix}$$ rango 2

Il parametro libero è uno (c), allora

$$\begin{cases} a = \frac{c}{2} \\ b = -a-c = -\frac{3}{2}c \end{cases}$$

Quindi la retta è

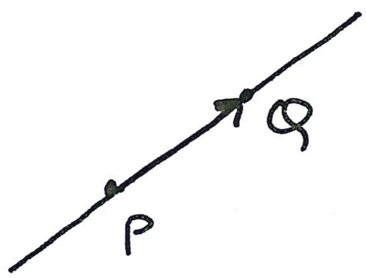
$$\frac{c}{2}x - \frac{3}{2}yc = c$$

Eliminando c otteniamo

$$\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y = 1$$

$$\boxed{x - 3y = 2}$$

- La procedura più generale consiste nel determin. le equazioni parametriche e poi passare a quelle cartesiane.



La retta P,Q è vettorialmente determinata da $\overrightarrow{PQ} = Q - P$

Ogni suo punto è del tipo

$$P + \lambda \overrightarrow{PQ} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Esplicitamente $\overline{PQ} = Q - P = (-1,-1) - (2,0)$

$$= (-1,-1) + (-2,0)$$

$$= (-1-2, -1+0)$$

$$= (-3,-1)$$

Allora un generico punto della retta è della forma

$$(x,y) = (2,0) + \lambda(-3,-1)$$

$$\begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = -\lambda \end{cases}$$

Per determinare l'eq cartesiana, dobbiamo eliminare λ;

$$x = 2 - 3(-y)$$

$$\boxed{x - 3y = 2}$$

(2) r ed s sono rette: quando le intersechiamo otterremo un punto (l'esercizio sarà fatto in modo che le rette non siano parallele).

Quindi bisogna trovare l'eq di una retta passante per un punto con direzione data.

Per iniziare $r \cap s$ è

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \longrightarrow x_1 = -\frac{3}{2}x_2$$

$$2\left(-\frac{3}{2}x_2\right) - 2x_2 = 7$$

$$x_2 = -\frac{7}{5}$$

Quindi $x_1 = -\frac{3}{2}\left(-\frac{7}{5}\right) = \frac{21}{10}$

$$r \cap s = \left\{ \left(\frac{21}{10}, -\frac{7}{5} \right) \right\}$$

Allora le eq parametriche sono

$$(x,y) = \left(\frac{21}{10}, -\frac{7}{5} \right) + \lambda (2, -\sqrt{2})$$

$$\begin{cases} x = \frac{21}{10} + 2\lambda \\ y = -\frac{7}{5} - \sqrt{2}\lambda \end{cases}$$

3) Consideriamo il piano $2x_1 - x_3 = \frac{2}{3}$.
Per un teorema fatto in classe la sua giacitura è lo spazio vettoriale del sistema omogeneo:

$$2x_1 - x_3 = 0$$

Un generico piano parallelo è della forma
$2x_1 - x_3 = b$ con $b \in \mathbb{R}$
(sempre per il sopracitato teorema).
Imponendo il passaggio per $Q = (-1,0,1)$ ho

$$-2-1 = b \longrightarrow b = -3$$

quindi $\boxed{2x_1 - x_3 = -3}$

$$\begin{array}{cc:c} 1 & -1 & x_1 \\ 2 & 1 & x_2 \\ -1 & 5 & x_3 \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{cc:c} 1 & -1 & x_1 \\ 0 & 3 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & 4 & x_3 + x_1 \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{cc:c} 1 & -1 & x_1 \\ 0 & 3 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & 0 & 11x_1 - 4x_2 + 3x_3 \end{array}$$

$$\to \boxed{11x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0}$$

Notare che lo stesso risultato si poteva ottenere imponendo

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & x_1 \\ 2 & 1 & x_2 \\ -1 & 5 & x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\to \quad x_3 + x_2 + 10x_1 + x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0$$

$$\boxed{11x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0}$$

Questo accade perché imponente il vettore (x_1, x_2, x_3) sia linearm. <u>dipendente</u> dagli altri due

A questo punto dobbiamo determinare se esiste un piano <u>affine</u> che contiene le rette <u>affini</u>

Questo avrebbe equazioni:

$$11x_1 - 4x_2 + 3x_3 = b$$

(5) Consideriamo le rette

$$r: \begin{cases} x_1 = 1+t \\ x_2 = 2t \\ x_3 = 8-t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x_1 = 1-\tau \\ x_2 = 3+\tau \\ x_3 = 5\tau \end{cases}$$

e determiniamo se sono complanari. Prima di tutto determiniamo le giaciture.

$$r: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + t \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\text{base della giacitura di } r}$$

$$s: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\text{base della giacitura di } s}$$

~~Consideriamo ora il piano di giaci~~

Se c'è un piano che contiene le rette, la sua giacitura deve contenere le giaciture delle rette. (Rozzamente: l'inclinazione del piano in $\mathbb{R}^3$ deve tener conto delle direzioni delle rette).

Un generico vettore di questo piano è

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\text{base giacitura piano}}$$

che quindi ha equazioni

Se imponiamo il passaggio dei punti fondamentali delle rette otteniamo

$$11x_1 - 4x_2 + 3x_3 = b \xrightarrow{(1,0,8)} 11 + 3\cdot 8 = b$$

$$b = 35$$

$$\downarrow \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$$

$$11 - 4\cdot 3 = b$$

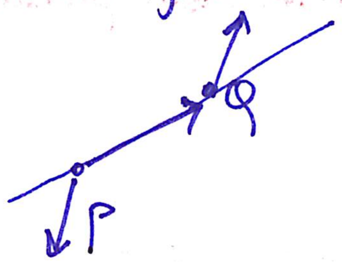
$$b = -1$$

incompatibili

$\Downarrow$

<u>non esiste questo piano</u>

Il risultato si poteva trovare anche in un altro modo. Se vogliamo che il piano contenga i punti P e Q,



automaticamente deve contenere anche la retta PQ e in particolare la giacitura deve contenere il vettore $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (0,-3,8)$

Ma per quanto discusso prima questa deve contenere anche le giaciture delle rette. Allora

il piano esiste $\Leftrightarrow$ i vettori $(\overrightarrow{PQ}$, giacit r, giac s$)$ sono linearm dipend.

Siccome $\det\left(\vec{PQ} \,\middle|\, \text{giac}_r \,\middle|\, \text{giac}_s\right) = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 8 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

$= 8 - 3 + 16 + 15 \neq 0$

Allora i vettori <u>non</u> sono lin dipendenti.

Allora il piano non esiste.

(6) La retta ha eq parametriche

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3/2 \\ -3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

la soluzione di questo esercizio è molto accelerata ma dovresti essere in grado di giustificarla con ciò che avete visto prima

Allora basta porre

$$\det\begin{pmatrix} 3/2 & \sqrt{2} & x \\ -3/2 & -\sqrt{2} & y \\ 1 & 1 & z \end{pmatrix} = 0$$

$$\cancel{-\frac{3}{2}\sqrt{2}z} + \sqrt{2}y - \frac{3}{2}x + \sqrt{2}x - \frac{3}{2}y \cancel{+ \frac{3}{2}\sqrt{2}z} = 0$$

$$(2\sqrt{2} - 3)y + (2\sqrt{2} - 3)x = 0$$

$\rightarrow \quad x + y = 0$ (giacitura)

passaggio per $(1,2,0)$ implica che il piano affine è $\boxed{x + y = 3}$