1 Principio di Induzione

Per cominciare ricordiamoci che l'insieme dei numeri naturali è dato da

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}.$$

Di tutte le proprietà di $\mathbb{N}$ qui evidenziamo la seguente.

Assioma 1.1 (Principio di Induzione)**.** *Supponiamo che $S \subseteq \mathbb{N}$ sia un sottoinsieme di $\mathbb{N}$ che soddisfa le due seguenti proprietà:*

(1) $1 \in S$.

(2) $n \in S \Rightarrow (n+1) \in S$.

Allora $S = \mathbb{N}$.

Il Principio di Induzione ci consente di dimostrare il seguente cruciale teorema relativo alle dimostrazioni per induzione.

Teorema 1.2 (Dimostrazioni per induzione)**.** *Supponiamo che ad ogni numero naturale n sia associata una proposizione $P(n)$. Supponiamo che le due seguenti proprietà siano soddisfatte:*

(1') $P(1)$ *è vera.*

(2') *($P(n)$ è vera) $\Rightarrow$ ($P(n+1)$ è vera).*

Allora $P(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Dim. Definiamo

$$S = \{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ è vera}\}.$$

Per prima cosa, (1') implica che $1 \in S$. Pertanto S soddisfa l'ipotesi (1) del Principio di Induzione. Inoltre (2') implica che $n \in S \Rightarrow (n+1) \in S$, e pertanto S soddisfa anche l'ipotesi (2) del Principio di Induzione. Ma allora il Principio di Induzione implica $S = \mathbb{N}$, e pertanto, per come S e' definita, $P(n)$ e' vera per ogni $n \in \mathbb{N}$. □

Vediamo qualche applicazione del precedente teorema

Teorema 1.3 (Disuguaglianza di Bernoulli)**.** *Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $a \geq -1$ abbiamo la seguente proposizione:*

(P(n)) $(1+a)^n \geq 1 + na$.

Dim. P(1) è ovviamente vera, visto che si riduce all'uguaglianza $1 + a = 1 + a$.
Supponiamo ora che $P(n)$ sia vera. Abbiamo

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a) \geq (1+na)(1+a) \text{ [qui usiamo } 1+a \geq 0 \text{ e l'ipotesi che } P(n) \text{ e' vera]}$$
$$= 1 + \underbrace{na + a}_{(n+1)a} + na^2 \geq 1 + (n+1)a$$

dove nell'ultima disuguaglianza abbiamo utilizzato il fatto che $na^2 \geq 0$. Per concludere, se $a \geq -1$ e se $P(n)$ è vera allora $P(n+1)$ è vera.

Pertanto $P(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$. $\square$

1.1 Sommatorie

Supponiamo di avere n numeri a_1, ..., a_n. Utilizziamo la seguente notazione di *sommatoria* (qui presentata in forma intuitiva)

$$\sum_{j=1}^{n} a_j := a_1 + ... + a_n$$

che (più rigorosamente) può essere definita come segue, utilizzando il principio di induzione:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{1} a_j = a_1 \\ \text{dati } \sum_{j=1}^{n} a_j \text{ ed } a_{n+1} \text{ allora } \sum_{j=1}^{n+1} a_j = \sum_{j=1}^{n} a_j + a_{n+1} \end{cases} \tag{1.1}$$

Più avanti nel corso utilizzeremo anche la notazione di *prodotto*, che si può definire (intuitivamente) nel modo analogo:

$$\prod_{j=1}^{n} a_j := a_1 a_2 ... a_n.$$

Concentrandoci sulle sommatorie osserviamo che si può sostituire la j con altri indici. Ad esempio

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Infatti, l'unica cosa che conta qui è dove varia l'indice, non il simbolo specifico usato per denotare l'indice. Questo è simile agli integrali definiti che incontreremo in seguito, dove il valore dell'integrale non dipende dal simbolo utilizzato per denotare la variabile d'integrazione.

Abbiamo

$$\sum_{j=1}^{n} (a_j + b_j) = \sum_{j=1}^{n} a_j + \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{1.2}$$

Dimostriamo quest'ultima per induzione. Per $n = 1$ segue semplicemente dal fatto che entrambi i membri sono uguali ad $a_1 + b_1$. Assumendo che sia vera per n abbiamo

$$\sum_{j=1}^{n+1}(a_j + b_j) = \sum_{j=1}^{n}(a_j + b_j) + a_{n+1} + b_{n+1} \quad \text{[applicando (1.1)]}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_j + \sum_{j=1}^{n} b_j + a_{n+1} + b_{n+1} \quad \text{[applicando l'ipotesi induttiva che (1.2) sia vera per } n\text{]}$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} a_j + a_{n+1}\right) + \left(\sum_{j=1}^{n} b_j + b_{n+1}\right) \quad \text{[applicando regola commutativa ed associativa per la somma]}$$

$$= \sum_{j=1}^{n+1} a_j + \sum_{j=1}^{n+1} b_j \quad \text{[applicando (1.1)].}$$

Poi abbiamo la seguente, banale da dimostrare:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda a_j = \lambda \sum_{j=1}^{n} a_j.$$

Vediamo qualche applicazione dell'induzione a sommatorie

Teorema 1.4 (Somma aritmetica)**.** *Abbiamo per ogni* $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{j=1}^{n} j = \frac{(n+1)n}{2}.$$

Dim. Per $n = 1$ abbiamo $\sum_{j=1}^{1} j = 1$ e $\frac{(1+1)1}{2} = 1$, quindi sono uguali.

Supponiamo ora che siano uguali per n. Allora

$$\sum_{j=1}^{n+1} j = \sum_{j=1}^{n} j + n + 1 = \frac{(n+1)n}{2} + n + 1 = \left(\frac{n}{2} + 1\right)(n+1) = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

che e' esattamente quello che volevamo.

Pertanto la formula è vera per ogni n.

$\square$

Teorema 1.5 (Somma geometrica di ragione $r \neq 1$)**.** *Sia* $r \neq 1$*. Allora per ogni* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\sum_{j=0}^{n} r^j = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Dim. Per $n = 0$ abbiamo $\displaystyle\sum_{j=0}^{0} r^j = r^0 = 1$ e $\dfrac{1 - r^{0+1}}{1 - r} = 1$, quindi sono uguali.

Supponiamo ora che siano uguali per n. Allora

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n+1} r^j &= \sum_{j=0}^{n} r^j + r^{n+1} = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} + r^{n+1} = \frac{1 - r^{n+1} + r^{n+1}(1 - r)}{1 - r} \\ &= \frac{1 - r^{n+1} + r^{n+1} - r^{n+2}}{1 - r} = \frac{1 - r^{n+2}}{1 - r}\end{aligned}$$

che è esattamente quello che volevamo.

Pertanto la formula è vera per ogni n.

□

Osservazione 1.6. Ovviamente per $r = 1$ abbiamo $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} 1^j = n + 1$.

Esercizio 1.7 (Prodotti notevoli)**.** *Dimostrare che per ogni a, b e per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha*

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{j=1}^{n} a^{n-j} b^{j-1}$$

Esercizio 1.8. *Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha*

$$\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Esercizio 1.9. *Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha*

$$\sum_{j=1}^{n} j^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Esercizio 1.10. *Calcolare il valore della seguente somma telescopica*

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}\right)$$

Le somme telescopiche sono della forma $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} (a_j - a_{j+1})$ ed il valore della somma è $a_1 - a_{n+1}$:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} (a_j - a_{j+1}) &= (a_1 - \cancel{a_2}) + (\cancel{a_2} - \cancel{a_3}) + ... + (\cancel{a_{n-2}} - \cancel{a_{n-1}}) + (\cancel{a_{n-1}} - \cancel{a_n}) + (\cancel{a_n} - a_{n+1}) \\ &= a_1 - a_{n+1}.\end{aligned}$$

Esercizio 1.11. *Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ il numero $7^n - 1$ è divisibile per 6.*

Esercizio 1.12. *Dimostrare che per ogni $n, m \in \mathbb{N}$ il numero $(m+1)^n - 1$ è divisibile per m.*

Qualche risposta.

Per quanto concerne i prodotti notevoli per $n = 1$ il termine di sinista è

$$a^1 - b^1 = a - b$$

mentre il termine di destra è

$$(a-b)\sum_{j=1}^{1} a^{1-j} b^{j-1} = (a-b)a^0 b^0 = a - b$$

e quindi ovviamente sono uguali.
Assumiamo ora che la formula sia vera per n e dimostriamola per $n+1$. Abbiamo

$$(a-b)\sum_{j=1}^{n+1} a^{n+1-j} b^{j-1} = (a-b)\sum_{j=1}^{n} a^{n+1-j} b^{j-1} + (a-b)b^n = a(a-b)\sum_{j=1}^{n} a^{n-j} b^{j-1} + (a-b)b^n$$
$$= a(a^n - b^n) + (a-b)b^n = a^{n+1} - ab^n + ab^n - b^{n+1} = a^{n+1} - b^{n+1}.$$

1.2 Coefficienti binomiali

Per ogni $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definiamo per $n > 0$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 .... (n-1) \cdot n$$

e definiamo

$$0! = 1.$$

$n!$ viene detto n fattoriale.

Siano ora $0 \leq k \leq n$ due interi. Definiamo allora il "coefficiente binomiale"

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}. \tag{1.3}$$

Nota che dalla definizione risulta

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

visto che per definizione

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-(n-k))!\,(n-k)!} = \frac{n!}{k!\;(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}.$$

Abbiamo anche

$$\binom{n}{0} = 1 \quad , \quad \binom{n}{n} = 1 \quad , \quad \binom{n}{1} = n \quad , \quad \binom{n}{n-1} = n.$$

Abbiamo il seguente fatto

Lemma 1.13. *Abbiamo la seguente uguaglianza:*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Dim. A sinistra, per definizione, abbiamo

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}.$$

A destra abbiamo

$$\begin{aligned}
&\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \\
&= \frac{(n-1)!}{(n-k)!\,(k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!\,k!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!\,(k-1)!}\left[\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k}\right] = \\
&= \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!\,(k-1)!}\,\frac{n}{(n-k)k} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!\,k!}.
\end{aligned}$$

Quindi i termini sono uguali, e quindi il Lemma è dimostrato.

□

I numeri $\binom{n}{k}$ sono detti coefficienti binomiali perchè appaiono nella espansione del binomio. Abbiamo infatti:

Teorema 1.14 (Formula di Newton per il binomio)**.** *Abbiamo la seguente formula:*

$$P\ (n\ ) \qquad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Dimostrazione per induzione. P (1) è vera. Infatti

$$a + b$$

ha coefficienti entrambi eguali ad 1, e per definizione

$$\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1.$$

Quindi abbiamo

$$a+b=\binom{1}{0}a+\binom{1}{1}b.$$

Assumiamo P (n-1) vera. Verifichiamo che ciò implica P (n) vera. Utilizzando che P (n-1) è vera abbiamo

$$\begin{aligned}
(a+b)^n &= (a+b)(a+b)^{n-1} = (a+b)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}a^k b^{n-1-k} = \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}a^{k+1}b^{n-1-k} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}a^k b^{n-k} = \\
&= \sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}a^k b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}a^k b^{n-k} = \\
&= a^n + b^n + \sum_{k=1}^{n-1}\left[\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}\right]a^k b^{n-k}.
\end{aligned}$$

Dal lemma precedente,

$$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
&(a+b)^n = \\
&= a^n + b^n + \sum_{k=1}^{n-1}\left[\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}\right]a^k b^{n-k} \\
&= a^n + b^n + \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} = \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}
\end{aligned}$$

Ossia P(n-1) vera implica P(n) vera.

Per il Principio di Induzione, P(n) è sempre vera ed il teorema è dimostrato.

□

Notare che l'uguaglianza

$$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}$$

giustifica il cosiddetto *triangolo di Tartaglia*, l'algoritmo utilizzato per trovare i coefficienti binomiali (cos'è il triangolo di Tartaglia viene spiegato in classe).

2 Numeri complessi

Come abbiamo detto sopra, conoscienza di $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{R}$ è data per scontata. Continueremo a parlare della retta reale $\mathbb{R}$ dopo, ma ora soffermiamoci sull'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi. I numeri complessi sono semplicemente punti del piano (x, y) Le regole di somma e prodotto sono:

$$\begin{aligned}&(x,y) + (u,v) = (x+u, y+v)\\&(x,y)(u,v) = (xu - yv, xv + yu).\end{aligned}$$

In paricolare i punti della forma $(x, 0)$ si riducono alla retta reale, e vengono denotati con x. Posto $(0, 1) = i$, il generico numero complesso viene scritto come $z = x + iy$. Si ha $i^2 = -1$. Dopodichè si moltiplicano e sommano queste espressioni come fossero numeri reali: per $z = x + iy$ e $w = u + iv$

$$\begin{aligned}&z + w = (x+u) + i(y+v)\\&zw = xu + i^2 yv + ixv + iyu = (xu - yv) + i(xv + yu).\end{aligned}$$

Dato $z = x + iy$, x si dice la parte reale ed y la parte immaginaria. Un numero della forma $z = x$ si dice reale. Un numero della forma $z = iy$ si dice immaginario. Dato $z = x + iy$, il numero $\overline{z} = x - iy$ è il suo complesso coniugato. Abbiamo

$$\begin{aligned}&\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}\\&\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}\\&z = \overline{z} \text{ se e solo se } z \text{ è reale}\\&z = -\overline{z} \text{ se e solo se } z \text{ è immaginario}\end{aligned}$$

Il modulo di z è per definizione

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Se $z \neq 0$ allora nota che $|z| \neq 0$. L'inverso di z è

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Esercizio Scrivere nella forma $x + iy$ le seguenti espressioni

1. $\dfrac{1-i}{(1+i)^2}$
2. $\dfrac{3+4i}{2+3i}$
3. $(2+3i)(5-3i)$

Esercizio Dimostrare che per ogni coppia $z, w \in \mathbb{C}$ vale la seguente regola del parallelogramma:

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2.$$

Esercizio Determinare gli insiemi delle soluzioni delle seguenti disuguaglianze

1. $\left|\dfrac{z-i}{z+i}\right| \leq 1$

2. $\left|\dfrac{z+2}{z+3i}\right| \leq 1$

3. $\left|\dfrac{z}{z+3}\right| \geq 2$

Definizione Dato $z = x + iy$ denotiamo $\operatorname{Re} z = x$ e $\operatorname{Im} z = y$.
Esercizio Calcolare le seguenti espressioni

1. $\operatorname{Im}\left(\dfrac{1}{z^2+z}\right)$

2. $\operatorname{Im}\left(\dfrac{z}{z^2+z+1}\right)$

3. $\operatorname{Re}\left(\dfrac{z-1}{z^2+3z}\right)$

Esercizio Determinare nel piano complesso le soluzioni delle seguenti disuguaglianze

1. $\operatorname{Im}\left(\dfrac{1}{z+1}\right) > 0$

2. $\operatorname{Re}\left(\dfrac{z}{z+1}\right) < 0$

Abbiamo visto prima che i risolve l'equazione $z^2 + 1 = 0$. notare che questa equazione non ha soluzioni reali. Più in generale abbiamo il seguente teorema.

Teorema 2.1 (Teorema fondamentale dell'algebra, versione preliminare)**.** *Sia $p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$ un polinomio di grado $n \geq 1$. Allora esiste un numero complesso $z_1 \in \mathbb{C}$ tale che $p(z_1) = 0$. z_1 viene detto uno zero o una radice di $p(z)$,*

L'equazione $z^2 + 1 = 0$ è un esempio di una equazione che non ammette zeri reali ma ammette zeri complessi, dati da $\pm i$.

Esercizio Verificare che se $p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$ è un polinomio a coefficienti reali, ossia $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$ allora se z_1 è una radice di $p(z)$, anche il complesso coniugato $\overline{z_1}$ è una radice di $p(z)$. Con un esempio verificare che questa asserzione non è vera per polinomi i cui coefficienti non sono reali.

Il teorema fondamentale dell'algebra ammette una formulazione piu' precisa, la quale fornisce diverse informazioni aggiuntive.

Teorema 2.2 (Teorema fondamentale dell'algebra, versione finale)**.** *Consideriamo un polinomio $p(z) = a_n z^n + ... + a_0$ a coefficienti complessi di grado $n \geq 1$. Esiste un $k \in \mathbb{N}$ con $k \leq n$, k numeri complessi distinti $\{z_1, ..., z_k\}$, per ogni $1 \leq j \leq k$ un numero $m_j \in \mathbb{N}$, per i quali abbiamo le seguenti uguaglianze:*

$$\begin{aligned} &m_1 + ... + m_k = n \\ &p(z) = a_n (z - z_1)^{m_1} ....(z - z_k)^{m_k}. \end{aligned}$$

Gli z_j vengono detti radici o zeri di $p(z)$ e per ogni z_j il numero m_j è la sua molteplicità.

Il seguente è un esercizio facile.
Esercizio Dimostrare che

$$\text{teorema } 2.2 \Rightarrow \text{teorema } 2.1.$$

Più complicato è dimostrare che teorema 2.2 $\Leftarrow$ teorema 2.1. Per dimostrarlo si procede per induzione sul grado del polinomio. Se $n = 1$ e $p(z_1) = 0$ allora

$$p(z) = a_1 z + a_0 = a_1 \left(z + \frac{a_0}{a_1} \right) \text{ e } p(z_1) = a_1 \left(z_1 + \frac{a_0}{a_1} \right) = 0 \Rightarrow z_1 = -\frac{a_0}{a_1}$$

dal quale segue $p(z) = a_1(z - z_1)$.

Supponiamo che teorema 2.2 $\Leftarrow$ teorema 2.1 per polinomi di grado n e dimostriamolo per polinomi di grado $n + 1$. Preso un qualsiasi polinomio di grado $n + 1$

$$p(z) = a_{n+1} z^{n+1} + ... + a_0$$

dal teorema 2.1 sappiamo che esiste $z_{n+1} \in \mathbb{C}$ tale che $p(z_{n+1})$. Consideriamo poi la divisione

$$a_{n+1} z^{n+1} + ... + a_0 : z - z_{n+1}$$

per il quale esistono un quoziente $q(z)$ ed un resto $r(z)$, dove per definizione di resto, $r(z)$ ha grado strettamente più piccolo del divisore $z - z_{n+1}$, il quale ha grado 1. In altre parole, $r(z)$ ha grado 0 e quindi è una costante che denoterò con r_0. Abbiamo l'uguaglianza (che lega dividendo, divisore, quoziente e resto)

$$p(z) = q(z)(z - z_{n+1}) + r_0.$$

Calcolando entrambi i membri nel punto $z = z_{n+1}$ e sfruttando il fatto che $p(z_{n+1}) = 0$ si ottiene

$$0 = 0 + r_0 \Rightarrow r_0 = 0.$$

Quindi il resto è nullo e si ha $p(z) = q(z)(z - z_{n+1})$. D'altra parte, $q(z)$ è un polinomio di grado n e pertanto per l'ipotesi dell'induzione ammette una fattorizzazione come nell'enunciato del teorema 2.2 ed è facile concludere che anche il generico polinomio $p(z)$

di grado $n+1$ ammette la fattorizzazione, che per il principio di induzione resta pertanto dimostrata per tutti i polinomi. $\square$

Si noti però che qui non abbiamo dimostrato il teorema fondamentale dell'algebra, la cui dimostrazione esula dal corso di analisi 1. Abbiamo solo dimostrato che le due versioni del teorema sono equivalenti.

2.1 Uso delle coordinate polari

Se r e θ sono le coordinate polari di (x, y), allora per definizione di coordinate polari

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta. \end{cases}$$

Posto $z = x + iy$ si ha $r = |z|$ e

$$z = x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta). \tag{2.1}$$

Si ha la seguente importante formula:

Teorema 2.3 (Formule di DeMoivre)**.** *Abbiamo per ogni $z \in \mathbb{C}$, per le sue coordinate polari (r, θ) e per ogni $n \in \mathbb{N}$ la seguente formula*

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)). \tag{2.2}$$

Dim.(Per induzione) Per $n = 1$ l'equazione (2.2) coincide con (2.1). Supponiamo di avere dimostrato (2.2) per n e dimostriamola per $n+1$. Abbiamo

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= r^{n+1}(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^{n+1} \\ &= r^{n+1}(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \\ &= r^{n+1}(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \text{ [per ipotesi su } n] \\ &= r^{n+1}\left(\cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta) + i\left(\cos(n\theta)\sin(\theta) + \sin(n\theta)\cos(\theta)\right)\right) \\ &= r^{n+1}\left(\cos((n+1)\theta) + i\sin((n+1)\theta)\right) \text{ [per formule di duplicazione per seno e coseno].} \end{aligned}$$

Questo dimostra che (2.2) è vera per ogni n. $\square$

Esercizio Per apprezzare l'importanza della formula (2.2) provate ad esprimere

$$z^n = (x + \mathrm{i}y)^n$$

in termini delle coordinate x ed y, distinguendo parte reale e parte immagiaria di z^n.

Passiamo ora a qualche applicazione di (2.2). Cominciamo con l'equazione $z^n = 1$. Le sua soluzioni vengono dette *radici dell'unità*. Come sappiamo se n è pari, in $\mathbb{R}$ vi sono solo le due radici $z = \pm 1$, mentre se n è dispari, in $\mathbb{R}$ vi è solo la radice $z = 1$. D'altra parte, in $\mathbb{C}$ vi devono essere n radici (se conteggiamo una radice un numero di volte pari alla sua molteplicit a) per via del teroema fondamentale dell'algebra.

Teorema 2.4 (Radici dell'unità). *Per ogni $n \in \mathbb{N}$ le soluzioni di $z^n = 1$ sono date da*

$$z = \cos(\theta_j) + i \sin(\theta_j) \ \ \textit{dove}\ \theta_j = \frac{2\pi}{n} j \ \ \textit{per}\ j = 0, 1, ..., n-1. \tag{2.3}$$

Dim. Se z è una radice dell'unità, ha una sua rappresentazione in coordinate polari

$$z = r(\cos\theta + i \sin\theta).$$

Noi inizialmente non conosciamo i valori di r e di θ. Però sappiamo che deve valere $z^n = 1$, e se questa equalglianza la esprimiamo in coordinate polari, per le formule di DeMoivre abbiamo

$$r^n(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) = 1 = 1(\cos(0) + i \sin(0)).$$

Siccome i numeri a destra ed a sinistra sono uguali, abbiamo

$$\begin{aligned} &r^n = 1 \\ &\cos(n\theta) = \cos(0) \\ &\sin(n\theta) = \sin(0). \end{aligned}$$

La prima equaglianza implica che $r = 1$, perchè r è un numero reale non negativo. La seconda e terza uguaglianza insieme implicano

$$n\theta = 2\pi j \text{ per un } j \in \mathbb{Z}.$$

Risolvendo rispetto a θ otteniamo $\theta = \frac{2\pi}{n} j$ per $j \in \mathbb{Z}$. È legittimo chiedersi se le radici di $z^n = 1$ non siano per caso infinite, dato che l'insime $\mathbb{Z}$ ha infiniti elementi. Tuttavia osserviamo che mentre per $j = 0, 1, ..., n-1$ otteniamo n distinti numeri complessi, se noi scegliamo un j non tra questi, e dividiamo $j : n$ otteniamo un quoziente q ed un resto $0 \leq j_0 < n$, tali che $j = qn + j_0$. Allora

$$\begin{aligned} z_j &:= \cos\left(\frac{2\pi}{n} j\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n} j\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{n}(qn + j_0)\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n}(qn + j_0)\right) \\ &= \cos\left(\frac{2\pi}{n} j_0 + 2\pi q\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n} j_0 + 2\pi q\right) \\ &= \cos\left(\frac{2\pi}{n} j_0\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n} j_0\right) =: z_{j_0} \text{ dove } j_0 \in \{0, 1, ..., n-1\}. \end{aligned}$$

Osserviamo che per $j_0, j_1 \in \{0, 1, ..., n-1\}$ distinti tra loro si ha $z_{j_0} \neq z_{j_1}$. □

Esercizio Stabilire la molteplicità delle radici di $z^n = 1$.

Esempio 2.5. *Consideriamo $z^2 = 1$. Abbiamo*

$$z = \cos\left(\frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{2}} j\right) + i \sin\left(\frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{2}} j\right) \ \ \textit{per}\ j = 0, 1$$

dove per $j = 0$ otteniamo $z = \cos(0) + i \sin(0) = \cos(0) = 1$ e per $j = 1$ otteniamo $z = \cos(\pi) + i \sin(\pi) = \cos(\pi) = -1$.

Esempio 2.6. *Consideriamo $z^4 = 1$. Abbiamo*

$$z = \cos\left(\frac{2\pi}{4}j\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{4}j\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}j\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}j\right) \ \textit{per } j = 0, 1, 2, 3$$

dove

$$z = \begin{cases} 1 \ \textit{per } j = 0, \\ i \ \textit{per } j = 1 \\ -1 \ \textit{per } j = 2, \\ -i \ \textit{per } j = 3. \end{cases}$$

Il metodo nel teorema si estende ad equazioni più generali della forma $z^n = w_0$ per $w_0 = r_0(\cos(\varphi_0)+i\sin(\varphi_0))$ un fissato numero complesso che possiamo sempre rappresentare in coordinate polari. Allora le soluzioni sono della forma $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ con

$$\begin{aligned} r &= r_0^{\frac{1}{n}} \\ \theta &= \frac{2\pi}{n}j + \frac{\varphi_0}{n} \ \text{ per } j = 0, 1, ..., n-1. \end{aligned}$$

Esempio 2.7. *Consideriamo $(1+i)^{\frac{1}{8}}$. Ci sono 8 radici da trovare, ossia tutte le soluzioni di $z^8 = 1 + i$. Siccome*

$$1 + i = \underbrace{|1+i|}_{\sqrt{2}} \frac{1+i}{|1+i|} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2^{\frac{1}{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

applicando la precedente formula le soluzioni sono $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ con

$$\begin{aligned} r &= 2^{\frac{1}{16}} \\ \theta &= \frac{2\pi}{8}j + \frac{\frac{\pi}{4}}{8} = \frac{\pi}{4}j + \frac{\pi}{32} \ \textit{ per } j = 0, 1, ..., 7. \end{aligned}$$

Esercizio Determinare le soluzioni di $z^6 - |z|^4 + |z|^2 = 1$.

Poniamo $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$. Sostituendo nell'equazione otteniamo

$$r^6(\cos(6\theta) + i\sin(6\theta)) - r^4 + r^2 = 1.$$

Esprimendo l'eguaglianza in termini delle coordinate, cioè della parte reale ed immaginaria,

$$\begin{aligned} &r^6\cos(6\theta) - r^4 + r^2 = 1 \\ &r^6\sin(6\theta) = 0. \end{aligned}$$

La seconda equazione è vera se $r = 0$, nel qual caso però la prima equazione non è soddisfatta, oppure se $\sin(6\theta) = 0$. In questo caso abbiamo uno dei seguenti due casi: $\cos(6\theta) = -1$ oppure $\cos(6\theta) = 1$.

Se $\cos(6\theta) = -1$ la prima equazione diviene

$$r^6 + r^4 + 1 = r^2.$$

Ma questa equazione non è soddisfatta da alcun $r \geq 0$. Infatti, se $r < 1$ abbiamo

$$r^6 + r^4 + 1 \geq 1 > r^2.$$

Se invece $r \geq 1$ abbiamo $r^2 \leq r^6 < r^6 + r^4 + 1$. Quindi per $\cos(6\theta) = -1$ il sistema non ha soluzioni.

Per $\cos(6\theta) = 1$ la prima equazione diviene

$$r^6 - r^4 + r^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (r^4 + 1)(r^2 - 1) = 0.$$

dove quest'ultima equazione ha come unica radice $r \geq 0$ il valore $r = 1$. Infine $\cos(6\theta) = 1$ implica $6\theta = 2\pi k$ per $k \in \mathbb{Z}$ da cui si ricava che

$$\theta = \frac{\pi}{3}k \text{ per } k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

ci da 6 soluzioni distinte (per gli altri valori di k si ottengono radici z che coincidono con una di queste 6).
Esercizio Determinare le soluzioni di $z^4 + 2|z|^2 = 1$.

Poniamo $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$. Sostituendo nell'equazione otteniamo

$$r^4(\cos(4\theta) + i\sin(4\theta)) + 2r^2 = 1.$$

Esprimendo l'eguaglianza in termini delle coordinate, cioè della parte reale ed immaginaria,

$$\begin{aligned} &r^4\cos(4\theta) + 2r^2 = 1 \\ &r^4\sin(4\theta) = 0. \end{aligned}$$

La seconda equazione è vera se $r = 0$, nel qual caso però la prima equazione non è soddisfatta, oppure se $\sin(4\theta) = 0$. In questo caso abbiamo uno dei seguenti due casi: $\cos(4\theta) = -1$ oppure $\cos(4\theta) = 1$.
Se $\cos(4\theta) = -1$ la prima equazione diviene

$$r^4 - 2r^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (r^2 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow r^2 = 1 \Leftrightarrow r = 1.$$

dove nell'ultima equivalenza si usa il fatto che $r \geq 0$. Per la variabile θ, da abbiamo $4\theta = \pi(2k + 1)$ per $k \in \mathbb{Z}$ da cui si ricava che

$$\theta = \frac{\pi}{4}(2k + 1) = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4}k \text{ per } k = 0, 1, 2, 3$$

e questo ci da 4 radici in $\mathbb{C}$.

Per $\cos(4\theta) = 1$ la prima equazione diviene

$$r^4 - 2r^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow r_\pm^2 = 1 \pm \sqrt{1+1} = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Ovviamente deve essere $r^2 = r_+^2 = 1 + \sqrt{2}$ e quindi $r = \sqrt{1+\sqrt{2}}$. $\cos(4\theta) = 1$ implica $4\theta = 2\pi k$ per $k \in \mathbb{Z}$ da cui si ricava che

$$\theta = \frac{\pi}{2} k \text{ per } k = 0, 1, 2, 3.$$

In conclusione, abbiamo trovato 8 soluzioni all'equazione $z^4 + 2|z|^2 = 1$, 4 delle quali sulla circonferenza di centro l'origine e raggio 1, ed altre 4 sulla circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt{1+\sqrt{2}}$.

Esercizio Consideriamo le due seguenti proposizioni

- Per il teorema fondamentale dell'algebra un polinomio di grado 4 ha 4 zeri (se contati con la molteplicità).
- $z^4 + 2|z|^2 = 1$ ha 8 zeri.

C'è una contraddizione tra queste due proposizioni?

Esercizio Si determini la parte reale di $(1+\mathrm{i})^{2002}$. Risposta. Abbiamo la rappresentazione in coordinate polari $1 + \mathrm{i} = 2^{\frac{1}{2}} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$. Pertanto, per DeMoivre,

$$(1+i)^{2002} = 2^{\frac{2002}{2}} \left(\cos\left(2002\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(2002\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2^{1001}\left(\cos\left(1001\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(1001\frac{\pi}{2}\right)\right)$$
$$= 2^{1001}\left(\cos\left(1000\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(1000\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right) = 2^{1001}\left(\cos\left(250 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(250 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$
$$= 2^{1001}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2^{1001}\mathrm{i}.$$

Pertanto $\mathrm{Re}\left[(1+\mathrm{i})^{2002}\right] = \mathrm{Re}\left[2^{1001}\mathrm{i}\right] = 0$.

Per "divertimento" proviamo a dare un'altra risposta, supponendo di non disporre delle formule di DeMoivre. Usando la formula del binomio di Newton,

$$(1+\mathrm{i})^{2002} = \sum_{k=0}^{2002} \binom{2002}{k} i^k = \sum_{\substack{k=0 \\ k\text{pari}}}^{2002} \binom{2002}{k} \mathrm{i}^k + \sum_{\substack{k=0 \\ k\text{dispari}}}^{2002} \binom{2002}{k} \mathrm{i}^k$$

Siccome per k dispari abbiamo $\mathrm{i}^k \in \{\mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$ mentre per $k = 2m$ pari abbiamo $\mathrm{i}^k = \mathrm{i}^{2m} = (-1)^m$, segue che

$$\mathrm{Re}\left[(1+i)^{2002}\right] = \sum_{\substack{k=0 \\ k\text{pari}}}^{2002} \binom{2002}{k} \mathrm{i}^k.$$

Sostituendo $k = 2m$, e $\mathrm{i}^{2m} = (-1)^m$, abbiamo

$$\mathrm{Re}\left[(1+\mathrm{i})^{2002}\right] = \sum_{m=0}^{1001} \binom{2002}{2m} (-1)^m.$$

Notare che in totale il numero degli addendi è di 1002. Possiamo riunirli in coppie, associando all'indice m l'indice $1001 - m$. Notare che la somma dei contributi dei due indici è

$$\binom{2002}{2m}(-1)^m + \binom{2002}{2(1001-m)}(-1)^{1001-m} = \binom{2002}{2m}(-1)^m + \binom{2002}{2002-2m}(-1)^{1001-m}$$

$$= \binom{2002}{2m}(-1)^m + \binom{2002}{2m}(-1)^{1001-m} = \binom{2002}{2m}\left(\underbrace{(-1)^m + (-1)^{1001-m}}_{0}\right).$$

dove abbiamo usato la simmetria $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ e dove $(-1)^m + (-1)^{1001-m} = 0$ perchè se un esponente è pari l'altro è dispari.
Ma allora la sommatoria in (2.4) è nulla.

Esercizio Risolvere le seguenti equazioni:

1. $z + i\overline{z}^2 + 2i = 0$
2. $z^3\overline{z} + 3z^2 - 4 = 0$
3. $z^3\overline{z} = 2i$

Esercizio Calcolare le seguenti radici:

1. $\sqrt{2-2i}$
2. $\sqrt[4]{1+i\sqrt{3}}$
3. $(1+i)^{-\frac{3}{2}}$
4. $\sqrt{-1-i}$
5. $\sqrt{\dfrac{1+i}{i}}$
6. $\sqrt[3]{i-\sqrt{3}}$

3 La retta reale $\mathbb{R}$

3.1 Inadeguatezza di $\mathbb{Q}$

Nell'antichità vi sono stati tentativi di descrivere il mondo facendo uso solo dell'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$, che si sono presto scontrati con alcuni problemi, il più famoso dei quali è che la lunghezza della diagonale di un quadrato il cui lato ha lunghezza 1 (cioè $\sqrt{2}$) non è un numero razionale. Lo dimostriamo utilizzando la tecnica della dimostrazione per assurdo.

Teorema 3.1. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Dim. (Per assurdo). Procederemo con una dimostrazione per assurdo, ossia, supponiamo che quanto vogliamo dimostrare sia falso e ne deduciamo delle conseguenze che non possono essere vere. Quindi supporremo che $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ e quindi $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ con $a\&b$ due interi che possiamo sempre prendere positivi e primi tra loro. Consideriamo le scomposizioni in fattori primi (conseguenze del teorema fondamentale dell'aritmetica [1])

$$a = p_1^{n_1} ... p_N^{n_N} \quad \& \quad b = q_1^{m_1} ... q_M^{m_M}.$$

Notiamo che se prendiamo i quadrati otteniamo le scomposizioni in fattori primi

$$a^2 = p_1^{2n_1} ... p_N^{2n_N} \quad \& \quad b^2 = q_1^{2m_1} ... q_M^{2m_M}$$

di a^2 e di b^2. Ora, se $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ allora $2b^2 = a^2$ e 2 è un fattore primo di a^2. Ora notiamo dal confronto di delle precedenti formule che se 2 è un fattore primo di a^2 allora è anche un fattore primo di a (infatti notasi che i fattori primi sono, a meno dell'esponente, gli stessi). Inoltre, siccome 2 deve comparire due volte almeno come fattore primo di a^2, segue che 2 è anche un fattore primo di a^2. Ma se 2 è un fattore primo di a^2 allora è anche un fattore primo di a. Quindi se assumiamo $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ abbiamo che 2 è un fattore primo sia di a che di b. Assurdo perchè a e b sono primi tra loro. $\square$

Esercizio 3.2. *Per ogni* $\ell \in \mathbb{N}$ *con* $\ell \geq 2$ *abbiamo* $2^{\frac{1}{\ell}} \notin \mathbb{Q}$

Esercizio 3.3. *Per ogni* $k \in \mathbb{N}$ *numero primo abbiamo* $\sqrt{k} \notin \mathbb{Q}$

Esercizio 3.4. *Per ogni* $\ell \in \mathbb{N}$ *con* $\ell \geq 2$ *e* $k \in \mathbb{N}$ *numero primo abbiamo* $k^{\frac{1}{\ell}} \notin \mathbb{Q}$

Risulta però che tutti questi numeri della forma $k^{\frac{1}{\ell}}$ sono ben definiti in $\mathbb{R}$, come vedremo più avanti nel corso.

Esercizio 3.5. *Dimostrare che* $\log_2(5) \notin \mathbb{Q}$

Più in generale,

Esercizio 3.6. *Dimostrare che se* $m, n \in \mathbb{N}$ *sono primi tra loro allora* $\log_n(m) \notin \mathbb{Q}$

[1] Abbiamo già visto il teorema fondamentale dell'algebra, che vale per polinomi e che è simile.

Dimostreremo che i numeri $\log_n(m)$ del precedente esercizio, sono ben definiti in $\mathbb{R}$.
Un altro esempio di dimostrazione per assurdo è il seguente.

Esempio 3.7. *Dimostriamo che esistono infiniti numeri primi. Utilizzeremo, come nel teorema 3.1, il teorema fondamentale dell'aritmetica.*
Supponiamo per assurdo che la seguente lista dia tutti i possibili numeri primi:

$$p_1 = 2, p_2 = 3, ..., p_n,$$

dove li ho messi in ordine crescente $p_1 < p_2 < ... < p_n$. Sia

$$N = p_1 p_2 ... p_n + 1.$$

Ovviamente $N \in \mathbb{N}$. Siccome $N > p_n$, N non è un numero primo (non è nella lista). Ma allora ammette un divisore primo p, cioè $N = pm$ dove $m \in \mathbb{N}$. D'altra parte p è un divisore di $p_1 p_2 ... p_n$ (perchè p è uno tra $p_1 < p_2 < ... < p_n$) e quindi $p_1 p_2 ... p_n = p\ \ell$ per $\ell \in \mathbb{N}$. Allora

$$1 = N - p_1 p_2 ... p_n = p(m - \ell).$$

Notare che $(m - \ell) \in \mathbb{Z}$. Inoltre da $p(m - \ell) = 1$ concludiamo che $m - \ell \geq 1$. Segue che $(m - \ell) \in \mathbb{N}$. Ma allora, posto $k = m - \ell$, abbiamo dimostrato che esiste $p \geq 2$ e $k \in \mathbb{N}$ t.c. $1 = pk \geq p \geq 2 > 1$, cioè $1 > 1$, che è assurdo.

3.2 Assioma di separazione in $\mathbb{R}$

Definizione *Due sottoinsiemi A e B di $\mathbb{R}$ si dicono separati se per ogni $a \in A$ e $b \in B$ si ha $a \leq b$.*

Abbiamo il seguente assioma di separazione, o assioma di Dedekind.
Assioma di separazione in $\mathbb{R}$ *Per ogni coppia di sottoinsiemi A e B di $\mathbb{R}$ tali che $a \leq b$ per ogni $a \in A$ e $b \in B$ esiste un elemento $c \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $a \in A$ e $b \in B$ si ha*

$$a \leq c \leq b.$$

Definizione (Retta reale estesa) *Denotiamo con $\overline{\mathbb{R}}$ la retta reale estesa. E' costituita da $\mathbb{R}$ cui aggiungiamo due elementi, denotati convenzionalmente con $+\infty$ e con $-\infty$. Essi hanno la proprietà che*

$$-\infty \leq a \quad \forall a \in \overline{\mathbb{R}}$$
$$+\infty \geq a \quad \forall a \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Dati due elementi $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, con $a \leq b$, denotiamo

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \colon a < x < b\} \text{ (intervallo aperto di estremi } a \,\&b)$$
$$(a, b] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \colon a < x \leq b\}$$
$$[a, b) = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \colon a \leq x < b\}$$
$$[a, b] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \colon a \leq x \leq b\}$$
$$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

Una proprietà fondamentale dei sottoinsiemi di $\overline{\mathbb{R}}$ che deriva dall'assioma di separazione è il fatto che un qualsiasi sottoinsieme $X \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, X ammette un estremo superiore ed un estremo inferiore. Vediamo di che si tratta. Per prima cosa osserviamo che l'assioma di separazione si estende in modo ovvio a $\overline{\mathbb{R}}$.

Iniziamo ora a discutere dell'estremo superiore. Abbiamo il seguente teorema.

Teorema 3.8 (Estremo superiore)**.** *Per ogni sottoinsieme X non vuoto di $\overline{\mathbb{R}}$, esiste un elemento di $\overline{\mathbb{R}}$, ed uno solo, che denotiamo con* $\sup X$*, avente le seguenti due proprietà:*

- *preso un qualsiasi $x \in X$ abbiamo $x \leq \sup X$;*
- *Se $M \in \overline{\mathbb{R}}$ è tale che $x \leq M$ per ogni $x \in X$, allora* $\sup X \leq M$.

Dim. Sia Z l'insieme degli elementi z di $\overline{\mathbb{R}}$ tali che $x \leq z$ per ogni $x \in X$. Notare che Z contiene almeno $+\infty$. Allora $x \leq z$ per ogni coppia di punti $x \in X$ e $z \in Z$. Per l'assioma di separazione esiste un $c \in \overline{\mathbb{R}}$ tale che $x \leq c \leq z$ per ogni coppia di punti $x \in X$ e $z \in Z$.
Verifichiamo che tale c è unico. Se ce ne sono due c_1 e c_2, non è restrittivo assumere $c_1 < c_2$. Allora, siccome $x \leq c_1$ per ogni $x \in X$, avremmo $x \leq z$ per ogni $x \in X$ e per ogni z nell' intervallo $c_1 < z < c_2$. Ma allora c_2 non separerebbe X da Z, in quanto ci sarebbe $z \in Z$ con $z < c_2$. Pertanto concludiamo che esiste un unico elemento di separazione, che denotiamo con c.
Verifichiamo ora che $c = \sup X$.
Per prima cosa sappiamo che $x \leq c$ per ogni $x \in X$. Pertanto c soddisfa la prima proprietà dell'estremo superiore.
Sia ora $z \in \overline{\mathbb{R}}$ tale che $x \leq z$ per ogni $x \in X$. Per definizione di Z risulta che $z \in Z$. Ma allora, siccome c separa X da Z risulta $c \leq z$. Pertanto c soddisfa la seconda proprietà dell'estremo superiore.
Pertanto possiamo porre $\sup X = c$. $\square$

$X \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ si dice limitato superiormente se $\sup X < +\infty$. Ad esempio, $\sup \mathbb{N} = +\infty$, come verificheremo fra poco, e $\sup\{1 - \frac{1}{n} \colon n = 1, 2, \dots\} = 1$. Quando $\sup X$ appartiene ad X, diciamo anche che $\sup X$ è il massimo di X, e lo denotiamo anche con $\max X$. Ad esempio $1 = \sup\{1 - \frac{1}{n} \colon n = 1, 2, \dots\}$ ma 1 non è un massimo per $\{1 - \frac{1}{n} \colon n = 1, 2, \dots\}$, che infatti non ha massimo.

Passiamo all'estremo inferiore. Abbiamo il seguente teorema, la cui dimostrazione e' lasciata come esercizio.

Teorema 3.9 (Estremo inferiore)**.** *Per ogni sottoinsieme X non vuoto di $\overline{\mathbb{R}}$, esiste un elemento di $\overline{\mathbb{R}}$, ed uno solo, che denotiamo con* $\inf X$*, avente le seguenti due proprietà:*

- *preso un qualsiasi $x \in X$ abbiamo $x \geq \inf X$;*
- *Se $M \in \overline{\mathbb{R}}$ è tale che $x \geq M$ per ogni $x \in X$, allora* $\inf X \geq M$.

$X \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ si dice limitato inferiormente se $\inf X > -\infty$.

Ad esempio, $\inf \mathbb{N} = 1$, $\inf\{1 - \frac{1}{n} \colon n = 1, 2, \dots\} = 0$. Quando $\inf X$ appartiene ad X,

diciamo anche che $\inf X$ è il minimo di X, e lo denotiamo anche con $\min X$. Ad esempio $0 = \inf\{1 - \frac{1}{n} \colon n = 1, 2, \dots\}$. Siccome 0 appartiene all'insieme (basta prendere $n = 1$) abbiamo anche $0 = \min\{1 - \frac{1}{n} \colon n = 1, 2, \dots\}$.

Esercizio 3.10. *Supponiamo che* $\sup X < +\infty$. *Dimostrare che un numero* $L \in \mathbb{R}$ *è* $L = \sup X$ *se e solo se sono verificate le seguenti due proprietà:*

- *preso un qualsiasi* $x \in X$ *abbiamo* $x \leq L$;
- $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \quad x \in X \quad$ *t.c.* $\quad x > L - \epsilon$.

Esercizio 3.11. *Si determinino* $\sup A$ *e* $\inf A$ *per*

$$A = (0, \sqrt{2}) \cap (1, \sqrt{3}).$$

Si stabilisca se esiste $\max A$ *o* $\min A$.

Teorema $\sup \mathbb{N} = +\infty$.

Dim. Supponiamo che ciò non sia vero e che $\sup \mathbb{N}$ sia finito. Allora esiste $n \in \mathbb{N}$ con $n > \sup \mathbb{N} - 1$. Infatti, se $n \leq \sup \mathbb{N} - 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, dalla seconda proprietà dell'estremo superiore seguirebbe che

$$\sup \mathbb{N} - 1 \geq \sup \mathbb{N} \Rightarrow -1 \geq 0$$

che è assurdo. Sia allora $n \in \mathbb{N}$ con $n > \sup \mathbb{N} - 1$. Ma allora $\mathbb{N} \ni n + 1 > \sup \mathbb{N}$ il che è assurdo perchè contraddice la prima proprietà dell'estremo superiore. $\square$

Corollario (Teorema di Archimede) *Dati due numeri* $x > 0$ *e* $y > 0$ *esiste* $n \in \mathbb{N}$ *t.c.* $nx > y$

Dim. Siccome $\sup \mathbb{N} = +\infty$ esiste $\mathbb{N} \ni n > y/x$ e ciò implica $nx > y$. $\square$

Esercizio 3.12. *Supponiamo che* $\inf X > -\infty$. *Dimostrare che un numero* $\ell \in \mathbb{R}$ *è* $\ell = \inf X$ *se e solo se sono verificate le seguenti due proprietà:*

- *preso un qualsiasi* $x \in X$ *abbiamo* $x \geq \ell$;
- $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \quad x \in X \quad$ *t.c.* $\quad x < \ell + \epsilon$.

Esercizio 3.13. *Dimostrare che ogni sottoinsieme non vuoto di* $\mathbb{R}$ *con un numero finito di elementi ha sia minimo che massimo.*

Risposta. Sia $X \subset \mathbb{R}$ con un numero finito di elementi. Limitiamoci a dimostrare che esiste $\max(X)$. Dimostriamo per induzione sul numero n degli elementi di X. Se $n = 1$ allora $X = \{x_1\}$ ed è immediato che $\max(\{x_1\}) = \min(\{x_1\}) = x_1$.

Supponiamo per induzione di avere dimostrato il caso n e dimostriamo che questo implica il caso $n+1$. Sia $X = \{x_1, ..., x_n, x_{n+1}\}$ e poniamo $Y = \{x_1, ..., x_n\}$. Per induzione esiste $\max(Y)$ che è uguale ad uno degli x_j con $j \in \{1, ..., n\}$. Possiamo sempre assumere $\max(Y) = x_n$. Ora confrontiamo x_{n+1} con x_n. Se infatti $x_{n+1} > x_n$ allora $\max(X) = x_{n+1}$ (è facile verificare che x_{n+1} soddisfa le due proprietà di $\sup(X)$). Se invece $x_{n+1} < x_n$ allora $\max(X) = x_n$ (è facile verificare che x_n soddisfa le due proprietà di $\sup(X)$). $\square$

Esercizio 3.14. *Dimostrare che se $X \subseteq Y$ sono due sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$ allora*

$$\inf Y \leq \inf X \leq \sup X \leq \sup Y.$$

Risposta. Siccome $\inf Y \leq y$ per ogni $y \in Y$ (prima proprietà dell'inf di Y) segue $\inf Y \leq y$ per ogni $x \in X$ (visto che $X \subseteq Y$) . Per la seconda proprietà dell'inf di X segue $\inf Y \leq \inf X$.

Siccome $\sup Y \geq y$ per ogni $y \in Y$ (prima proprietà del sup di Y) segue $\sup Y \geq y$ per ogni $x \in X$ (visto che $X \subseteq Y$) . Per la seconda proprietà del sup di X segue $\sup X \leq \sup Y$. $\square$

Esercizio 3.15. *Dimostrare che ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{N}$ ha un minimo.*

Risposta. Sia $Y \subseteq \mathbb{N}$ non vuoto. In particolare consideriamo $m_0 \in Y$. Sia $X = \{x \in Y : x \leq m_0\}$. Notiamo che $X \ni m_0$ e quindi non è vuoto e che siccome $X \subseteq \{1, ..., m_0\}$ l'insieme X ha al massimo m_0 elementi. Per un precedente esercizio concludiamo che esiste $\min(X)$, che per semplicità denotiamo con c.

Risulta $c \in X \subseteq Y$ e cioè $c \in Y$. Dimostriamo ora che $c \leq y$ per ogni $y \in Y$ (questo implica che $c = \min(Y)$). Per prima cosa osserviamo che $c \leq m_0$ perché $c = \min(X)$ e $m_0 \in X$. Sia ora $y \in Y$. Abbiamo le seguenti alternative

- $y > m_0$
- $y \leq m_0$

Nel primo caso $y > m_0 \geq c$. Nel secondo caso $y \leq m_0$ e $y \in Y$ implica $y \in X$ che implica $y \geq c$.

Pertanto abbiamo dimostrato $c \leq y$ per ogni $y \in Y$. $\square$

Esercizio 3.16. *Sia $X \subseteq \mathbb{N}$. Dimostrare che se $S \subseteq X$ soddisfa le due proprietà*

1. $\min X \in S$,
2. $(n \in S$ *e inoltre* $n < \sup X) \Longrightarrow n + 1 \in S$,

allora $S = X$.

Teorema 3.17 ((Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$)**.** *Dati $a < b$ in $\mathbb{R}$ esiste $q \in \mathbb{Q}$ tale che $a < q < b$.*

Dim. Distinguiamo tre casi

- $a < 0 < b$
- $0 \leq a < b$
- $a < b \leq 0$

Nel primo caso basta prendere $q = 0$.
Consideriamo il caso $0 \leq a < b$. Sia $1/n < b - a$, che esiste da $\sup \mathbb{N} = +\infty$. Consideriamo ora

$$X = \{m \in \mathbb{N} : \frac{m}{n} > a.\}.$$

Dal Teorema di Archimede segue che X è un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{N}$. Come tale, da un esercizio precedente segue che $\min X$ esiste. Denotiamolo con m_0. Essendo $m_0 \in X$, si ha $m_0/n > a$. Ora dimostriamo che $m_0/n < b$. Per prima cosa abbiamo

$$\frac{m_0 - 1}{n} \leq a. \tag{3.1}$$

Infatti, se $m_0 = 1$ questo coincide con $0 \leq a$. Se invece $m_0 \geq 2$ e se fosse $\frac{m_0-1}{n} > a$ avremmo $m_0 - 1 \in X$ e pertanto $m_0 - 1 \geq m_0$, assurdo. Infine (3.1) ed $1/n < b - a$ implicano

$$\frac{m_0}{n} = \frac{m_0 - 1}{n} + \frac{1}{n} < a + b - a = b.$$

Pertanto $q = \frac{m_0}{n}$ ha le proprietà desiderate.
Infine nel caso $a < b \leq 0$ abbiamo $0 \leq -b < -a$. Sia $q \in \mathbb{Q}$ tale che $-b < q < -a$. Allora $a < -q < b$ e siccome $-q \in \mathbb{Q}$ otteniamo il risultato cercato. $\square$

Esercizio 3.18. *Dimostrare che l'insieme dei numeri irrazionali, $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, è denso in $\mathbb{R}$.*

Soluzione. Sia (a, b) un intervallo aperto e limitato. Dobbiamo dimostrare che esiste un elemento di $r \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ con $r \in (a, b)$. Consideriamo l'intervallo $(a + \sqrt{2}, b + \sqrt{2})$. Dal teorema 3.17 sappiamo che esiste $q \in \mathbb{Q}$ con $q \in (a + \sqrt{2}, b + \sqrt{2})$. Ma allora $q - \sqrt{2} \in (a, b)$. $r = q - \sqrt{2}$ è un elemento di $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ con $r \in (a, b)$. $\square$

4 Funzioni

Dati due insiemi X e Y, una funzione $f : X \to Y$ è un criterio che assegna $\forall\, x \in X$ un unico $y \in Y$ denotato con $f(x)$.

Esempio 4.1.

- *$f(x) = \sin x$ è una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

- *Sia $Q(t)$ l'ammontare di danaro al tempo t in un conto corrente che al tempo $t = 0$ aveva Q_0 danaro, con una rivalutazione continua al tasso del 3% annuo. Risulta che $Q(t)$ è la seguente funzione del tempo:*

$$Q(t) = Q_0 e^{t \cdot 0,03}.$$

- *Un esempio di funzione è la funzione di costo, ossia il costo $C(x)$ per una azienda di produrre x unità di un certo prodotto per ogni dato x. Funzioni della seguente forma possono essere funzioni di costo:*

$$C(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

  dove a rappresenta i costi fissi (affitto, riscaldamento, ecc.) e gli altri termini possono dipendere dal costo delle materie prime (il costo delle materie prime tipicamente è proporzionale ad x), il costo del lavoro (che può crescere con potenza superiore ad 1), ecc.

Esempio 4.2. *Consideriamo la funzione*

$$\log_7 \left(\sqrt{x+1} - 1\right)$$

Determiniamone il dominio di definizione. Per prima cosa, $\sqrt{x+1}$ ha senso se e solo se $x + 1 \geq 0$, ossia se $x \geq -1$. Inoltre il logaritmo è definito solo per

$$\sqrt{x+1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} > 1 \Leftrightarrow x + 1 > 1 \Leftrightarrow x > 0.$$

Il dominio è definito dalla disuguaglianza $x > 0$.

Esempio 4.3. *La funzione gradino di Heaviside $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è definita come segue:*

$$H(x) = \begin{cases} 1 \ \textit{per } x > 0 \\ \frac{1}{2} \ \textit{per } x = 0 \\ 0 \ \textit{per } x < 0 \end{cases}$$

Esempio 4.4. *La funzione segno $sign : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è definita come segue:*

$$sign(x) = \begin{cases} 1 \ \textit{per } x > 0 \\ 0 \ \textit{per } x = 0 \\ -1 \ \textit{per } x < 0 \end{cases}$$

Esempio 4.5. *La funzione di Dirichlet $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è definita come segue:*

$$D(x) = \begin{cases} 1 \ \textit{per } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \ \textit{per } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Esempio 4.6. *La funzione parte intera $[x] : \mathbb{R} \to \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ è definita come segue: per ogni $x \in \mathbb{R}$, la sua parte intera è il numero intero $[x] \in \mathbb{Z}$ tale che*

$$[x] \leq x < [x] + 1.$$

Definizione 4.7. Il prodotto cartesiano di una coppia ordinata di insiemi X ed Y è l'insieme definito da $X \times Y = \{(x, y) \colon x \in X,\ y \in Y\}$.

Ad esempio $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ è il piano.

Definizione 4.8. Il grafico Γ_f di una funzione $f \colon X \to Y$ da X ad Y è il sottoinsieme $\Gamma_f \subset X \times Y$ definito da

$$\Gamma_f = \{(x, y) \colon x \in X,\ y = f(x)\}.$$

Definizione 4.9. Data una funzione $f \colon X \to Y$ e dato un sottoinsieme $A \subseteq X$ non vuoto di X resta definita la restrizione $f_{|A} \colon A \to Y$ nel seguente modo:

$$f_{|A}(a) = f(a) \text{ per ogni } a \in A.$$

Definizione 4.10 (Immagine di un insieme)**.** Data una funzione $f \colon X \to Y$ e dato un sottoinsieme $A \subseteq X$, l'immagine A è il seguente sottoinsieme di Y:

$$f(A) = \{y \in Y : \exists\ x \in A \ \text{ t.c. } y = f(x)\} = \{f(x) \in Y : \ x \in A\}.$$

Definizione 4.11 (Controimmagine di un insieme)**.** Data una funzione $f \colon X \to Y$ e dato un sottoinsieme $B \subseteq Y$ non vuoto di Y la controimmagine di B è il seguente sottoinsieme di X:

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$$

Per $y_0 \in Y$ il correspondente insieme $\{y_0\} \subseteq Y$ poniamo $f^{-1}(y_0) = f^{-1}(\{y_0\})$.
Per $(a, b) \subseteq Y$ un intervallo $f^{-1}(a, b) = f^{-1}((a, b))$.

Esempio 4.12. *Consideriamo la funzione parte intera* $[x] : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*. Allora*

- $[x]_{|[0,2]}$ *è la seguente funzione:* $[x]_{|[0,2]} = \begin{cases} 0 \text{ per } 0 \le x < 1 \\ 1 \text{ per } 1 \le x < 2 \\ \quad 2 \text{ per } x = 2 \end{cases}$
- $[x]^{-1}(0, 1/2) =$*l'insieme vuoto.*
- $[x]^{-1}(0, 2) = [x]^{-1}(1) = [1, 2)$.

Definizione 4.13. Data una funzione $f \colon X \to Y$ abbiamo le seguenti definizioni:

- f è suriettiva se $\forall\ y \in Y\ \exists\ x \in X$ t.c. $f(x) = y$.
- f è iniettiva se $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.
- f è biettiva se è sia suriettiva che iniettiva.

Esercizio 4.14. *Data una funzione* $f \colon X \to Y$ *dimostrare le seguenti proposizioni.*

- f *è suriettiva* $\Leftrightarrow f(X) = Y$.

- *f è suriettiva $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(y)$ è non vuoto per ogni $y \in Y$.*
- *f è iniettiva $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(y)$ ha esattamente un elemento per ogni $y \in f(X)$.*

Definizione 4.15 (Composizione di due funzioni)**.** Data una funzione $f\colon X \to Y$ ed una funzione $g : Y \to Z$, la composizione $g \circ f$ è la funzione $X \to Z$ definita da

$$g \circ f(x) = g(f(x)) \quad \forall\, x \in X.$$

Esercizio 4.16. *Data una funzione $f\colon X \to Y$ ed una funzione $g : Y \to Z$ dimostrare le seguenti proposizioni.*

- *$g \circ f$ suriettiva $\Rightarrow$ g suriettiva.*
- *$g \circ f$ iniettiva $\Rightarrow$ f iniettiva.*

Sono per caso vere le implicazioni inverse?

Esercizio 4.17 (Esame del 8 settembre 2014)**.** *Sia $f(z) = \frac{z-i}{1+\overline{z}}$ definita in un sottoinsieme di $\mathbb{C}$.*

- *Si determini il dominio di f.*
- *Si determini $f^{-1}(E)$ dove $E = \{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\}$*

Risposta. Prima di tutto $f(z)$ è definita se $1 + \overline{z} \neq 0 \Leftrightarrow 1 + z \neq 0 \Leftrightarrow z \neq -1$.
In secondo luogo $f^{-1}(E)$ è formato dagli $z \in \mathbb{C}$ distinti da -1 tali che

$$\begin{aligned}
&\frac{z-i}{1+\overline{z}} \in E \Leftrightarrow \frac{|z-i|}{|1+\overline{z}|} = 1 \Leftrightarrow |z-i| = |1+z| \Leftrightarrow |x + i(y-1)|^2 = |(x+1) + iy| \\
&\Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = (x+1)^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 = x^2 + 2x + 1 + y^2 \\
&\Leftrightarrow -2y = 2x \Leftrightarrow y = -x
\end{aligned}$$

che non è altri che la bisettrice del II e IV quadrante.

Definizione 4.18 (Funzioni monotone)**.** Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione.

- f è crescente se
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$
- f è strettamente crescente se
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$
- f è decrescente se
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

- f è strettamente decrescente se

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

- f è monotona se f è o una funzione crescete o una funzione decrescente
- f è strettamente monotona se f è o una funzione strettamente crescete o una funzione strettamente decrescente

Esercizio 4.19. *Dimostrare che se $f\colon X \to \mathbb{R}$ con $X \subseteq \mathbb{R}$ è strettamente monotona allora f è iniettiva.*

Esercizio 4.20. *Sia $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x + \log_6(x)$. Dimostrare che è iniettiva.*

Definizione 4.21. Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ un insieme simmetrico rispetto a 0, cioè $x \in X \Leftrightarrow -x \in X$. Allora una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ si dice

- pari se $f(-x) = f(x)$ per ogni $x \in X$
- dispari se $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in X$

Esempio 4.22. *Sia $n \in \mathbb{N}$. Allora la funzione $x^n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*

- *è pari se e solo se n è pari*
- *è dispari se e solo se n è dispari*

Esempio 4.23. *Abbiamo*

- $\cos x$ *è pari.*
- $\sin x$ *è dispari.*

Esercizio 4.24. *Siano $f : X \to \mathbb{R}$ e $g : X \to \mathbb{R}$ due funzioni. Consideriamo la funzione prodotto $f(x)g(x)$, che denoterò con fg. Verificare quanto segue*

- *f e g pari $\Rightarrow$ fg pari .*
- *f pari e g dispari $\Rightarrow$ fg dispari .*
- *f dispari e g pari $\Rightarrow$ fg dispari .*
- *f e g dispari $\Rightarrow$ fg pari .*

Esercizio 4.25. *Verificare che la funzione* $\tan(x)$ *è dispari.*

Esercizio 4.26. *Verificare se qualcuna delle seguenti funzioni è pari, dispari, o nessuna delle due cose.*

- *La funzione segno sign*(x) *.*
- *La funzione di Heaviside* $H(x)$ *.*
- *La funzione di Dirichlet* $D(x)$ *.*
- *La funzione parte intera* $[x]$*.*

Esercizio 4.27. *Dimostrare che se* $f : X \to \mathbb{R}$ *è dispari e se* $0 \in X$ *allora* $f(0) = 0$ *.*

4.1 Funzione valore assoluto

Definiamo $|\cdot|: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con

$$|x| = \begin{cases} x \text{ se } x \geq 0 \\ -x \text{ se } x \leq 0 \end{cases}$$

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, chiamiamo $|x|$ il valore assoluto x.

Per prima cosa enunciamo il seguente risultato.

Lemma 4.28. *Sia* $a \geq 0$*. Allora*

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a.$$

Dim. Supponiamo $|x| \leq a$. Allora, se $x \geq 0$ allora $x = |x|$ e l'ipotesi $|x| \leq a$ implicano $x \leq a$. Pertanto $0 \leq x \leq a$. Allora a maggior ragione $-a \leq x \leq a$.
Se invece $x \leq 0$ allora $x = -|x|$ e l'ipotesi $|x| \leq a$ implicano $-a \leq x$. Pertanto $-a \leq x \leq 0$. Allora a maggior ragione $-a \leq x \leq a$.
Quindi $\Rightarrow$ è dimostrata.

Sia ora $-a \leq x \leq a$. Di nuovo ci sono due alternative. Se $0 \leq x \leq a$ allora da $x = |x|$ ricaviamo $|x| \leq a$. Se invece $-a \leq x \leq 0$ da $x = -|x|$ ricaviamo $|x| \leq a$.
Quindi $\Leftarrow$ è dimostrata. $\square$
Proprietà del valore assoluto.

(1) $x \leq |x|$ e $-x \leq |x|$

(1) segue immediatamente da $|x| \leq |x|$ che per il lemma precedente implica $-|x| \leq x \leq |x|$.

(2) $|xy| = |x|\,|y|$

Abbiamo $xy = \begin{cases} |x|\,|y| \text{ se } xy \text{ è positivo} \\ -|x|\,|y| \text{ se } xy \text{ è negativo} \end{cases}$ Quindi, siccome $|\pm|x|\,|y|| = |x|\,|y|$, segue $|xy| = |x|\,|y|$.

(3) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (disuguaglianza triangolare)

Dim. Ovviamente $|x| \leq |x|$ e $|y| \leq |y|$. Pertanto dal lemma

$$
\begin{aligned}
-|x| \leq x \leq |x| \\
-|y| \leq y \leq |y|.
\end{aligned}
$$

Sommando le due righe otteniamo

$$-(|x|+|y|) \leq x+y \leq |x|+|y| \overset{\text{dal lemma}}{\Rightarrow} |x+y| \leq |x|+|y|.$$

Esercizio 4.29. *Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha*

$$\left|\sum_{j=1}^{n} x_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j|.$$

Definizione 4.30 (distanza tra due punti sulla retta reale)**.** Si definisce come distanza di due punti x & y in $\mathbb{R}$ il numero $|x-y|$.

Notare che

$$|x-y| = 0 \Leftrightarrow x = y$$

ossia due punti hanno distanza nulla se e solo se coincidono.
Dati tre punti x, y e z, la distanza tra due di essi è minore della somma delle loro distanze dal terzo punto

$$|x-y| \leq |x-z| + |z-y|.$$

Questo segue dalla disuguaglianza triangolare:

$$|x-y| = |x-z+z-y| = |(x-z)+(z-y)| \leq |x-z| + |z-y|.$$

La disuguaglianza triangolare è un caso particolare della disuguaglianza per i triangoli che dice che la somma delle lunghezze di due lati è minore della lunghezza del terzo lato.

Esercizio 4.31. *Dimostrare che per due numeri $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$ la seguente proposizione è vera:*

$$|L_1 - L_2| < \epsilon \quad \forall\, \epsilon > 0 \Rightarrow L_1 = L_2. \tag{4.1}$$

4.2 Successioni

Definizione 4.32 (Successioni)**.** Dato un insieme non vuoto X, una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi di X è una funzione $\mathbb{N} \xrightarrow{f} X$ dove per ogni $n \in \mathbb{N}$ denotiamo $x_n = f(n)$.

Esempio 4.33. *I seguenti sono tre esempi di successione:*

1. $\{n\}$
2. $\{\frac{1}{n}\}$

3. $\{(-1)^n\}$

Esempio 4.34 (Cantor)**.** *Esistono successioni* $\{x_n\}$ *contenenti tutti gli elementi di* $\mathbb{Q}$*. Ad esempio una tale successione può essere definita ricorsivamente partendo dal seguente schema*

$$\begin{pmatrix}
\frac{1}{1} & \rightarrow & \frac{2}{1} & & \frac{3}{1} & \rightarrow & \frac{4}{1}\cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \cdots \\
-\frac{1}{1} & & -\frac{2}{1} & & -\frac{3}{1} & \cdots & \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \cdots & \\
\frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & & \frac{3}{2} & \cdots & \\
 & \swarrow & & & & \cdots & \\
-\frac{1}{2} & & -\frac{2}{2} & & -\frac{3}{2} & \cdots & \\
\cdots & & & & & &
\end{pmatrix}$$

Quello che si intuisce è che tutti gli elementi di $\mathbb{Q}$ *compaino (infinite volte) nella matrice, la quale ha infinite righe ed infinite colonne, e che quella specie di "serpente" ottenuto seguendo le frecce e lungo il quale allineiamo gli elementi della successione raggiunge dopo un numero finito di passaggi un qualsiasi elemento della matrice.*

Abbiamo i seguenti esempi di limite

1. $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$
2. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$
3. $\lim_{n\to+\infty} (-1)^n$ non esiste

In classe i tre esempi vengono illustrati con un disegno.

Definizione 4.35. [Limite di una successione quando è in $\mathbb{R}$] Data $\{x_n\}$ si dice che $L \in \mathbb{R}$ è il suo limite se la seguente proposizione è vera

$$\forall \quad \epsilon > 0 \quad \exists M(\epsilon) \in \mathbb{R} \text{ t.c. } n > M(\epsilon) \Longrightarrow |L - x_n| < \epsilon. \tag{4.2}$$

Scriviamo $L = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Esempio 4.36. *Dimostriamo che* $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$*. Infatti per ogni* $\epsilon > 0$ *abbiamo*

$$n > \frac{1}{\epsilon} \Longrightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \epsilon.$$

Pertanto la proposizione (4.2) *è corretta con* $M_0(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon}$ *e con* $L = 0$*. Quindi* $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$*.*

Esempio 4.37. *Dimostriamo che* $\lim_{n\to+\infty}(-1)^n$ *non ha un limite finito (più avanti sarà chiaro che non ha limite ne' finito ne infinito). Supponiamo per assurdo che abbia un limit* $L \in R$. *Applicando la proposizione* (4.2) *possiamo concludere che*

$$\forall\, \epsilon > 0\, \exists M(\epsilon) \ \ t.c. \ n > M(\epsilon) \Longrightarrow |L - (-1)^n| < \epsilon. \tag{4.3}$$

In particolare, siccome $(-1)^n = \begin{cases} 1 \ se \ n \ \grave{e} \ pari \\ -1 \ se \ n \ \grave{e} \ dispari \end{cases}$
Siccome per qualsiasi $M \in \mathbb{R}$ *esistono sia* $n \in \mathbb{N}$ *pari che sia* $n \in \mathbb{N}$ *dispari tali che* $n > M$, *dalla* (4.3) *ricaviamo che*

$$|L-1| < \epsilon \quad \forall\, \epsilon > 0 \overset{proposizione\ (4.1)}{\Longrightarrow} L = 1,$$

$$|L-(-1)| < \epsilon \quad \forall\, \epsilon > 0 \overset{proposizione\ (4.1)}{\Longrightarrow} L = -1.$$

Ma $L = 1$ *e* $L = -1$ *implica* $1 = -1$, *che è assurdo.*

Esercizio 4.38. *Dimostrare che se* $X \subseteq \mathbb{R}$ *è tale che* $\sup X = +\infty$ *allora per ogni* $M \in \mathbb{R}$ *esiste* $x \in X$ *con* $M < x$.

4.3 Limiti $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

La definizione di limite per successioni si generalizza a funzioni qualsiasi.

Definizione 4.39 ($\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ per $L \in \mathbb{R}$)**.** Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ tale che $\sup X = +\infty$. Data una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ si dice che $L \in \mathbb{R}$ è il suo limite a $+\infty$ se la seguente proposizione è vera

$$\forall\, \epsilon > 0\, \exists M(\epsilon) \in \mathbb{R} \ \text{ t.c. } x > M(\epsilon) \text{ e } x \in X \Longrightarrow |L - f(x)| < \epsilon. \tag{4.4}$$

Scriviamo $L = \lim_{x\to+\infty} f(x)$.

La definizione 4.39 generalizza la definizione 4.35 perchè il caso delle successioni $f : \mathbb{N} \to X$ è un caso particolare della fattispecie considerata in definizione 4.39. Infatti un modo per esprimere (4.2) quando consideriamo $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ con $f(n) = x_n$ è che $L = \lim_{n\to\infty} x_n$ se e solo se $L = \lim_{n\to\infty} f(n)$ (ovvio visto che $f(n) = x_n$) dove (4.2) è la stessa cosa di

$$\forall\, \epsilon > 0\, \exists M(\epsilon) \in \mathbb{R} \ \text{ t.c. } n > M(\epsilon) \Longrightarrow |L - f(n)| < \epsilon.$$

Esempio 4.40. *Dimostriamo che* $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$. *Infatti per ogni* $\epsilon > 0$ *abbiamo*

$$x > \frac{1}{\epsilon} \Longrightarrow \left|\frac{1}{x} - 0\right| = \frac{1}{x} < \epsilon.$$

Pertanto la proposizione (4.4) *è corretta con* $M_0(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon}$ *e con* $L = 0$. *Quindi* $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Esempio 4.41. $\lim_{x\to+\infty} \sin(x)$ *non esiste. Infatti se esistesse il limite* $L \in \mathbb{R}$ *avremmo la proposizione* (4.4)*, ossia*

$$\forall\, \epsilon > 0\, \exists M(\epsilon) \in \mathbb{R} \;\; t.c. \;\; x > M(\epsilon) \;\; e \;\; x \in X \Longrightarrow |L - \sin(x)| < \epsilon. \tag{4.5}$$

Consideriamo $x = \frac{\pi}{2}(2n+1)$*. Si noti che* $\dfrac{\pi}{2}(2n+1) > M(\epsilon) \Leftrightarrow n > \dfrac{M(\epsilon)-\frac{\pi}{2}}{\pi}$*. Se prendiamo* n *pari, cioè* $n = 2m$*,*

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}(2n+1)\right) = \sin\left(\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(2\pi m + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

da cui si ricava che per ogni $\epsilon > 0$ *si ha* $|L - 1| < \epsilon$ *e questo implica* $L = 1$*.*
Se prendiamo n *dispari, cioè* $n = 2m+1$*,*

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}(2n+1)\right) = \sin\left(\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(2\pi m + \frac{3}{2}\pi\right) = \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1.$$

da cui si ricava che per ogni $\epsilon > 0$ *si ha* $|L - (-1)| < \epsilon$ *e questo implica* $L = -1$*. Naturalmente non si può avere al contempo* $L = 1$ *e* $L = -1$*. Concludiamo che* $\lim_{x\to+\infty} \sin(x)$ *non esiste.*

Teorema 4.42 (Unicità del limite)**.** *Sia* $f : X \to \mathbb{R}$ *come in definizione 4.39 e supponiamo che due numeri* L_1, L_2 *siano entrambi limiti di* f *a* $+\infty$*. Allora* $L_1 = L_2$

Dim. Per definizione $L_1 = \lim_{x\to+\infty} f(x)$ significa che la proposizione 4.4 è vera e pertanto

$$\forall\, \epsilon > 0\, \exists M_1(\epsilon) \in \mathbb{R} \;\; \text{t.c.} \;\; x > M_1(\epsilon) \;\text{e}\; x \in X \Longrightarrow |L_1 - f(x)| < \epsilon.$$

Per definizione $L_2 = \lim_{x\to+\infty} f(x)$ significa che la proposizione 4.4 è vera e pertanto

$$\forall\, \epsilon > 0\, \exists M_2(\epsilon) \in \mathbb{R} \;\; \text{t.c.} \;\; x > M_2(\epsilon) \;\text{e}\; x \in X \Longrightarrow |L_2 - f(x)| < \epsilon.$$

Per ogni $x \in X$ abbiamo

$$|L_2 - L_1| = |(L_2 - f(x)) - (L_1 - f(x))| \leq |L_2 - f(x)| + |L_1 - f(x)|.$$

Sia $M_3(\epsilon) = \max\{M_1(\epsilon), M_2(\epsilon)\}$. Allora per ogni $\epsilon > 0$ se prendiamo $x > M_3(\epsilon)$ con $x \in X$ abbiamo

$$|L_2 - L_1| \leq |L_2 - f(x)| + |L_1 - f(x)| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon.$$

Quindi abbiamo dimostrato che

$$|L_2 - L_1| < 2\epsilon \text{ per ogni } \epsilon > 0.$$

Questo è equivalente a

$$|L_2 - L_1| < \epsilon \text{ per ogni } \epsilon > 0.$$

Dalla proposizione (4.1) otteniamo $L_1 = L_2$. □

Definizione 4.43 ($\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$)**.** Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ tale che $\sup X = +\infty$. Data una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ si dice che $+\infty$ è il suo limite a $+\infty$ se la seguente proposizione è vera

$$\forall K \quad \exists M(K) \in \mathbb{R} \text{ t.c. } x > M(K) \text{ e } x \in X \Longrightarrow f(x) > K. \tag{4.6}$$

Scriviamo $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Esempio 4.44. *Per $b > 1$ abbiamo $\lim_{n\to+\infty} b^n = +\infty$. Infatti, posto $b = 1 + a$ abbiamo che $a > 0$. Usando la disuguaglianza di Bernoulli*

$$b^n \geq 1 + na$$

Fissato $K \in \mathbb{R}$ abbiamo $1 + na > K$ se e solo se $n > \dfrac{K-1}{a}$ E pertanto

$$\forall n > \frac{K-1}{a} \Longrightarrow b^n \geq 1 + na > K.$$

Quindi la proposizione (4.7) *è vera prendendo $M(K) = \dfrac{K-1}{a}$. Possiamo concludere che $\lim_{n\to+\infty} b^n = +\infty$.*

Definizione 4.45 ($\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$)**.** Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ tale che $\sup X = +\infty$. Data una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ si dice che $+\infty$ è il suo limite a $-\infty$ se la seguente proposizione è vera

$$\forall K \quad \exists M(K) \in \mathbb{R} \text{ t.c. } x > M(K) \text{ e } x \in X \Longrightarrow f(x) < K. \tag{4.7}$$

Scriviamo $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

4.4 Limiti $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

Esercizio 4.46. *Dimostrare che se $X \subseteq \mathbb{R}$ è tale che* $\inf X = -\infty$ *allora per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste $x \in X$ con $x < M$.*

Definizione 4.47. Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ tale che $\inf X = -\infty$. Data una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ si dice che $L \in \mathbb{R}$ è il suo limite a $-\infty$ se la seguente proposizione è vera

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists M = M(\epsilon) \in \mathbb{R} \text{ t.c. } x < M \text{ e } x \in X \Longrightarrow |L - f(x)| < \epsilon. \tag{4.8}$$

Scriviamo $L = \lim_{x\to-\infty} f(x)$.
Se $\inf X = -\infty$ e $\sup X = +\infty$ e se $L \in \mathbb{R}$ è tale che $L = \lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $L = \lim_{x\to+\infty} f(x)$ allora scriviamo $L = \lim_{x\to\infty} f(x)$.

Vedremo diversi esempi più avanti.

4.5 "Regole" dei limiti

Per prima cosa estendiamo parzialmente alla retta reale estesa $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ la somma ed il prodotto ponendo

$$\begin{aligned}
&a + (+\infty) = +\infty \text{ se } a \in (-\infty, +\infty] \\
&a + (-\infty) = -\infty \text{ se } a \in [-\infty, +\infty) \\
&a \cdot (+\infty) = +\infty \text{ se } a > 0 \\
&a \cdot (+\infty) = -\infty \text{ se } a < 0 \\
&a \cdot (-\infty) = -\infty \text{ se } a > 0 \\
&a \cdot (-\infty) = +\infty \text{ se } a < 0 \\
&\frac{1}{+\infty} = \frac{1}{-\infty} = 0.
\end{aligned}$$

Si noti che alcuni casi restano indefiniti

$$\begin{aligned}
&(+\infty) + (-\infty) \text{ indefinito} \\
&0 \cdot (\pm\infty) \text{ indefinito .}
\end{aligned}$$

Abbiamo le seguenti regole per i limiti, che poi generalizzeremo.

Teorema 4.48 (Regole dei limiti)**.** *Siano $f, g : X \to \mathbb{R}$ con $\sup X = +\infty$ e supponiamo che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \in \overline{\mathbb{R}}$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x) = b \in \overline{\mathbb{R}}$. Allora abbiamo le seguenti regole*

- *(regola della somma)* $\lim_{x\to+\infty} (f(x) + g(x)) = a + b$, *per* $(a, b) \neq (\pm\infty, \mp\infty)$
- *(regola del prodotto)* $\lim_{x\to+\infty} f(x)\, g(x) = ab$, *per* $(a, b) \neq (\pm\infty, 0)$ *o* $(0, \pm\infty)$
- *(regola del quoziente)* $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}$, *per* $b \neq 0$ *e* $(a, b) \neq (\pm\infty, \pm\infty)$.

I casi esclusi vengono detti *indefiniti*.

Osservazione 4.49. Esiste una ovvia versione del teorema quando $\inf X = -\infty$ e si considerano i limiti $\lim_{x\to-\infty}$

Consideriamo vari esempi relativi al precedente teorema.

- $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1-x}{x^2}$ =?. Notare che se lo interpretiamo come $\frac{-\infty}{\infty}$, è un esempio di caso indefinito. Se però lo scriviamo come
$$\frac{1-x}{x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x},$$
abbiamo
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1-x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} - \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} - \frac{1}{+\infty} = 0 - 0 = 0.$$

- $\lim_{x\to+\infty} \left(x - \sqrt{x^2+1}\right) =?$. Notare che se lo interpretiamo come $\infty - \infty$, è un esempio di caso indefinito. Se però lo scriviamo come

$$x - \sqrt{x^2+1} = \left(x - \sqrt{x^2+1}\right) \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2 - (x^2+1)}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{-1}{x + \sqrt{x^2+1}}$$

abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x - \sqrt{x^2+1}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{-1}{\infty} = 0.$$

- $\lim_{x\to+\infty} (x^2 - x + 1) =?$ Notare che se lo interpretiamo come $\infty - \infty + 1$, è un esempio di caso indefinito. Scriviamolo allora come

$$x^2 - x + 1 = x^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right).$$

Abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty} (x^2 - x + 1) = \lim_{x\to+\infty} x^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty\,(1 - 0 + 0) = +\infty.$$

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^6 + x + 1}{-x^6 + x^3 + x + 1} =?$ Scrivere che il limite è $\frac{\infty^6+\infty+1}{-\infty^6+\infty^3+\infty+1}$ non ha senso. Scriviamo

$$\frac{x^6 + x + 1}{-x^6 + x^3 + x + 1} = \frac{x^6(1 + \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^6})}{x^6(-1 + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^6})} = \frac{1 + \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^6}}{-1 + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^6}}.$$

Abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^6 + x + 1}{-x^6 + x^3 + x + 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^6}}{-1 + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^6}} = \frac{1 + 0 + 0}{-1 + 0 + 0 + 0} = -1.$$

4.6 Teoremi del confronto

I teoremi del confronto hanno importanza cruciale nel calcolo dei limiti. Il primo teorema che enunciamo è il seguente, la cui dimostrazione è semplice ma che non diamo.

Teorema 4.50. *Siano $f, g : X \to \mathbb{R}$ due funzioni e sia $\sup X = +\infty$. Supponiamo che esistano i limiti*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \in \overline{\mathbb{R}} \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = b \in \overline{\mathbb{R}}$$

e che abbia sempre $f(x) \le g(x)$ per ogni $x \in X$. Allora abbiamo $a \le b$

$\square$

Il teorema importante è il seguente.

Teorema 4.51 (Dei Carabinieri)**.** *Siano $f, g, h : X \to \mathbb{R}$ tre funzioni e sia $\sup X = +\infty$. Supponiamo che $f(x) \le h(x) \le g(x)$ per ogni $x \in X$. Supponiamo inoltre che esista $L \in \overline{\mathbb{R}}$ tale che*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L = \lim_{x\to+\infty} g(x)$$

Allora esiste anche $\lim_{x\to+\infty} h(x)$ ed in particolare si ha

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = L$$

Dim. Dimostriamo solo il caso $L \in \mathbb{R}$. Abbiamo

$$\begin{aligned} &\forall\epsilon > 0 \quad \exists M_1(\epsilon) \text{ t.c. } x > M_1(\epsilon) \text{ e } x \in X \implies |L - f(x)| < \epsilon \\ &\forall\epsilon > 0 \quad \exists M_2(\epsilon) \text{ t.c. } x > M_2(\epsilon) \text{ e } x \in X \implies |L - g(x)| < \epsilon. \end{aligned}$$

Poniamo ora $M_3(\epsilon) = \max\{M_1(\epsilon), M_2(\epsilon)\}$. Allora per $x > M_3(\epsilon)$ e $x \in X$ abbiamo

$$\begin{aligned} |L - f(x)| < \epsilon \Leftrightarrow L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon \\ |L - g(x)| < \epsilon \Leftrightarrow L - \epsilon < g(x) < L + \epsilon \end{aligned}$$

che utilizzato congiuntamente con $f(x) \le h(x) \le g(x)$ per ogni $x \in X$ con $x > M_3(\epsilon)$ da

$$L - \epsilon < f(x) \le h(x) \le g(x) < L + \epsilon \Rightarrow L - \epsilon < h(x) < L + \epsilon \Leftrightarrow |L - h(x)| < \epsilon.$$

Pertanto per ogni $\epsilon > 0$ se $x > M_3(\epsilon)$ e $x \in X$ abbiamo $|L - h(x)| < \epsilon$ e questo significa $\lim_{x\to+\infty} h(x) = L$.

Osservazione 4.52. Esistono una ovvie versioni dei teoremi precedenti quando $\inf X = -\infty$ e si considerano i limiti $\lim_{x\to-\infty}$

Consideriamo ora qualche applicazione del Teorema dei Carabinieri.

Esempio 4.53. *Sia $b \in \mathbb{R}$ fissato. Abbiamo $\lim_{n\to+\infty} b^{\frac{1}{n}} = 1$.*

Non è restrittivo considerare il caso $b > 1$. Pertanto $b^{\frac{1}{n}} > 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Scriviamo

$$b^{\frac{1}{n}} = 1 + a_n \text{ dove } a_n > 0.$$

Allora il limite $\lim_{n\to+\infty} b^{\frac{1}{n}} = 1$ è equivalente al limite $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Per dimostrare quest'ultimo scriviamo

$$b = \left(b^{\frac{1}{n}}\right)^n = (1 + a_n)^n \ge 1 + na_n.$$

Ricaviamo pertanto

$$0 < a_n \le \frac{b-1}{n}.$$

Siccome abbiamo $\lim_{n\to+\infty} 0 = 0$ $\lim_{n\to+\infty} \frac{b-1}{n} = 0$ concludiamo

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \text{ per il teorema dei Carabinieri}$$

e quindi $\lim_{n\to+\infty} b^{\frac{1}{n}} = 1$.

Esempio 4.54. *Sia $b > 1$ fissato. Abbiamo* $\lim_{n\to+\infty} \frac{b^n}{n} = +\infty$.

Per dimostrarlo osserviamo che $\sqrt{b} > 1$ e quindi possiamo scriverlo come $\sqrt{b} = 1 + a$ per $a > 0$. Ora scriviamo

$$\frac{b^n}{n} = \frac{\left(\sqrt{b}^n\right)^2}{n} = \frac{((1+a)^n)^2}{n} \geq \frac{(1+na)^2}{n} = \frac{1+2na+n^2a^2}{n} \tag{4.9}$$

Ora, siccome

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+2na+n^2a^2}{n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} + 2a + a^2 n\right) = 0 + 2a + \infty = +\infty$$

e per i Carabinieri abbiamo $\lim_{n\to+\infty} \frac{b^n}{n} = +\infty$.

Esempio 4.55. *Sia $b > 1$ fissato. Abbiamo* $\lim_{n\to+\infty} \frac{b^n}{n^2} = +\infty$.

Per dimostrarlo osserviamo che $\sqrt[3]{b} > 1$ e quindi possiamo scriverlo come $\sqrt[3]{b} = 1 + a$ per $a > 0$. Ora scriviamo

$$\frac{b^n}{n} = \frac{\left(\sqrt[3]{b}^n\right)^3}{n} = \frac{((1+a)^n)^3}{n^2} \geq \frac{(1+na)^3}{n^2} = \frac{1+3na+3n^2a^2+n^3a^3}{n^2} \tag{4.10}$$

Ora, siccome $\lim_{n\to+\infty} \frac{1+2na+n^2a^2}{n} = +\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+3na+3n^2a^2+n^3a^3}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{3a}{n} + 3a^2 + a^3 n\right) = 0 + 0 + 3a^2 + \infty = +\infty$$

e per i Carabinieri abbiamo $\lim_{n\to+\infty} \frac{b^n}{n} = +\infty$.

Esercizio 4.56. *Siano $b > 1$ ed $N \in \mathbb{N}$ fissati. Dimostrare che* $\lim_{n\to+\infty} \frac{b^n}{n^N} = +\infty$.

Esercizio 4.57. *Siano $b > 1$ ed $a \in \mathbb{R}_+$ fissati. Dimostrare che* $\lim_{n\to+\infty} \frac{b^n}{n^a} = +\infty$.

Esercizio 4.58. *Sia $b > 1$. Dimostrare che* $\lim_{n\to+\infty} \frac{b^n}{n!} = 0$.

Osservazione 4.59 (Formula di Stirling)*.* Notare che $n! \approx \sqrt{2\pi n}\frac{n^n}{e^n}$ ossia

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\frac{n^n}{e^n}} = 1.$$

Esercizio 4.60. *Dimostrare che il numero $0,99999....$ con 9 periodico coincide col numero 1.*

4.7 Funzioni monotone

Teorema 4.61 (Limiti delle funzioni crescenti)**.** *Sia* $f : X \to \mathbb{R}$ *crescente.*

1. *Supponiamo che* $\sup X = +\infty$. *Allora*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sup f(X).$$

2. *Supponiamo che* $\inf X = -\infty$. *Allora*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \inf f(X).$$

Esiste anche una versione per funzioni decrescenti:

Teorema 4.62 (Limiti delle funzioni decrescenti)**.** *Sia* $f : X \to \mathbb{R}$ *decrescente.*

1. *Supponiamo che* $\sup X = +\infty$. *Allora*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \inf f(X).$$

2. *Supponiamo che* $\inf X = -\infty$. *Allora*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \sup f(X).$$

Dimostrazione del teorema sui limiti delle funzioni crescenti Ci limiteremo al caso $\lim\limits_{x\to+\infty}$ con $\sup f(X) < +\infty$. Per alleggerire la notazione poniamo $L = \sup f(X)$. Ricordiamo che

$$f(X) = \{f(x) : x \in X\}.$$

Fissiamo ora un qualsiasi $\epsilon > 0$. Allora esiste un $x_\epsilon \in X$ tale che

$$L - \epsilon < f(x_\epsilon) \leq L.$$

Siccome f è una funzione crescente e per definizione di L abbiamo

$$x > x_\epsilon \text{ e } x \in X \Rightarrow L - \epsilon < f(x_\epsilon) \leq f(x) \leq L \Rightarrow |L - f(x)| < \epsilon$$

e questo implica $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$. □

Esercizio 4.63. *Dimostrare il caso* $\lim\limits_{x\to+\infty}$ *e con* $\sup f(X) = +\infty$. *Dimostrare il resto del teorema così come il teorema per funzioni decrescenti.*

4.7.1 Il numero di Neper e

Teorema 4.64 (Numero di Neper)**.** *La successione* $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ *è strettamente crescente. Abbiamo* $\lim_{n+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ *dove* $e \in (2,3)$.

Osservazione 4.65. Il numero di Neper $e = 2,718...$ è un numero irrazionale *trascendente*. Cioè è irrazionale come $\sqrt{2}$ ma per e, a differenza che per $\sqrt{2}$, tutte le potenze e^n con $n \in \mathbb{N}$ sono anch'essi numeri irrazionali (mentre ovviamente $\sqrt{2}^2 = 2$ è razionale, $\sqrt{2}^4$ è razionale, ecc.).

Osservazione 4.66. D'ora innanzi considereremo solo il logaritmo $\log_e$ in base e, che denoteremo semplicemente con log. Si usa anche la notazione ln (da logaritmo naturale).

Siano $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$. Allora abbiamo le seguenti definizioni di media:

1. il numero $\dfrac{x_1 + ... + x_n}{n} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{n}$ è la loro media aritmetica;

2. se $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}_+$ il numero $\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} x_j}$ è la loro media geometrica.

Si noti che se $x_1 = ... = x_n = x > 0$ allora entrambe le medie sono uguali ad x.

Vale il seguente risultato, sul quale torneremo più avanti, Esempio 11.16.

Lemma 4.67. *Se* $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}_+$ *allora*

$$\text{media geometrica} = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} x_j} \le \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{n} = \text{media aritmetica}.$$

Dimostriamo che la successione $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ è crescente, cioè che

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}. \tag{4.11}$$

Prendendo la radice di ordine $n+1$, questo equivale a dimostrare che

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \le 1 + \frac{1}{n+1} \tag{4.12}$$

Per il Lemma 4.67 applicato ai numeri $x_1 = 1$, $x_2 = ... = x_{n+1} = 1 + \frac{1}{n}$ abbiamo

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \le \frac{1 + n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$$

e questo dimostra (4.12) e quindi anche (4.11).

5 Limiti

Data una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ per un qualche $X \subseteq \mathbb{R}$ abbiamo finora definito limiti della forma $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e della forma $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Ora preso un $x_0 \in \mathbb{R}$ vorremmo definire $\lim_{x\to x_0} f(x)$. Per definire quest'ultimo limite abbiamo bisogno di alcune premesse.
Ricordiamoci che per definire $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ avevamo bisogno di $\sup X = +\infty$ e che per definire $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ avevamo bisogno di $\inf X = -\infty$, perchè altrimenti le nostre nozioni di limite non hanno senso. Analogamente, per definire $\lim_{x\to x_0} f(x)$ avremo bisogno che x_0 sia un *punto di accumulazione* per X.

Definizione 5.1 (Punto di accumulazione)**.** Dato $X \subseteq \mathbb{R}$ ed un punto $\overline{x} \in \mathbb{R}$ diciamo che $\overline{x}$ è un punto di accumulazione per X se è vera la seguente proposizione:

$$\forall \quad \epsilon > 0 \quad x \in X \text{ t.c. } 0 < |x - \overline{x}| < \epsilon. \tag{5.1}$$

Dato X scriveremo

$$X' = \{y \in \mathbb{R} : \ y \text{ è un punto di accumulazione per } X \ \}$$

Esempio 5.2. *Per* $X = \begin{cases} (a,b) \\ [a,b) \\ (a,b] \\ [a,b] \end{cases}$ *abbiamo* $X' = [a,b]$.

Esempio 5.3. *Per* $X = \mathbb{Q}$ *abbiamo* $X' = \mathbb{R}$.

Esercizio 5.4. *Dimostrare che se* X *è un insieme con un numero finito di elementi allora* X' *è l'insieme vuoto.*

Esercizio 5.5. *Dimostrare che se* $X = \mathbb{N}, \mathbb{Z}$ *allora* X' *è l'insieme vuoto.*

Esercizio 5.6. *Dimostrare che* x_0 *è un elemento di* X' *se e solo se è un elemento di* $(X\backslash\{x_0\})'$.

Esercizio 5.7. *Dimostrare che* $x_0 \in X'$ *se e solo se* x_0 *appartiene ad almeno uno dei due seguenti insiemi:* $(X \cap (-\infty, x_0))'$; $(X \cap (x_0, +\infty))'$.

Esercizio 5.8. *Dimostrare che se* $\overline{x}$ *è punto di accumulazione per* X *se e solo se esiste una successione strettamente monotona e formata da elementi di* X *che ha come limite* $\overline{x}$.

Definizione 5.9 ($\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ per $L \in \mathbb{R}$)**.** Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di accumulazione per X. Data una funzione $f : X\backslash\{x_0\} \to \mathbb{R}$ si dice che $L \in \mathbb{R}$ è il suo limite per x che va a x_0 se la seguente proposizione è vera

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta(\epsilon) > 0 \text{ t.c. } 0 < |x - x_0| < \delta(\epsilon) \text{ e } x \in X \Longrightarrow |L - f(x)| < \epsilon. \tag{5.2}$$

Scriviamo $L = \lim_{x\to x_0} f(x)$.

Esempio 5.10. *Per ogni* $x_0 \in \mathbb{R}$ *abbiamo* $\lim_{x \to x_0} |x| = |x_0|$. *Per dimostrarlo osserviamo che per ogni coppia* $x, x_0 \in \mathbb{R}$ *si ha*

$$||x| - |x_0|| \leq |x - x_0| \tag{5.3}$$

Per dimostrare (5.3) *osserviamo che essa è equivalente a*

$$-|x - x_0| \leq |x| - |x_0| \leq |x - x_0|. \tag{5.4}$$

La prima disuguaglianza in (5.4) *è equivalente a* $|x_0| \leq |x| + |x - x_0|$ *che segue dalla disuguaglianza triangolare*

$$|x_0| = |(x_0 - x) + x| \leq |x - x_0| + |x| = |x| + |x - x_0|.$$

La seconda disuguaglianza in (5.4) *è equivalente a* $|x| \leq |x_0| + |x - x_0|$ *che segue dalla disuguaglianza triangolare*

$$|x| = |(x - x_0) + x_0| \leq |x - x_0| + |x_0| = |x_0| + |x - x_0|.$$

Questo dimostra (5.4) *e quindi anche* (5.3) *che le è equivalente. Ora fissiamo* $\epsilon > 0$ *e notiamo che* (5.3) *implica la seguente formula*

$$|x - x_0| < \epsilon \Rightarrow ||x| - |x_0|| < \epsilon.$$

Quindi in particolare la proposizione (5.2) *è vera per* $x_0 = \overline{x}$, $f(x) = |x|$, $L = |x_0|$ *e* $\delta(\epsilon) = \epsilon$. *Quindi possiamo concludere* $\lim_{x \to x_0} |x| = |x_0|$ *per ogni* $x_0 \in \mathbb{R}$

Definizione 5.11 (Funzioni continue)**.** Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in X$ un punto di accumulazione per X. Una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ si dice continua in x_0 se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
Una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ si dice continua in X se è continua in tutti i suoi punti di accumulazione che appartengono ad X.

Esempio 5.12. $|x|$ *è continua in* $\mathbb{R}$.

Esercizio 5.13. x *è continua in* $\mathbb{R}$.

Esempio 5.14. x^2 *è continua in* $\mathbb{R}$. *Si tratta di dimostrare che per ogni* $x_0 \in \mathbb{R}$ *abbiamo* $\lim_{x \to x_0} x^2 = x_0^2$. *Fissiamo* $\epsilon > 0$ *e cerchiamo il* $\delta > 0$ *di* (5.2). *Abbiamo*

$$|x^2 - x_0^2| = |x^2 - xx_0 + xx_0 - x_0^2| \leq |x^2 - xx_0| + |xx_0 - x_0^2| = |x|\ |x - x_0| + |x_0|\ |x - x_0|.$$

Ora se $0 < |x - x_0| < \delta$ *abbiamo*

$$|x^2 - x_0^2| < \delta(|x| + |x_0|).$$

Ora osserviamo che $|x| \leq |x_0| + |x - x_0| < |x_0| + \delta$. *Inserendo nella precedente formula abbiamo*

$$|x^2 - x_0^2| < \delta(2|x_0| + \delta).$$

Ora nella definizione (5.2) *è sufficiente limitarsi a considerare* $0 < \delta \leq 1$. *Quindi otteniamo*

$$|x^2 - x_0^2| < \delta(2|x_0| + 1).$$

Posto allora

$$\delta(\epsilon) = \min\left\{\frac{\epsilon}{2|x_0| + 1}, 1\right\}$$

abbiamo che $0 < |x - x_0| < \delta(\epsilon)$ *implica*

$$|x^2 - x_0^2| < \delta(\epsilon)(2|x_0| + 1) \leq \frac{\epsilon}{2|x_0| + 1}(2|x_0| + 1) = \epsilon.$$

Quindi abbiamo dimostrato che per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ *abbiamo* $\lim\limits_{x \to x_0} x^2 = x_0^2$.

Definizione 5.15 ($\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$)**.** Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di accumulazione per X. Data una funzione $f : X \backslash \{x_0\} \to \mathbb{R}$ si dice che $+\infty$ è il suo limite per x che va a x_0 se la seguente proposizione è vera

$$\forall \quad K \quad \exists \quad \delta(K) > 0 \text{ t.c. } 0 < |x - x_0| < \delta(K) \text{ e } x \in X \Longrightarrow f(x) > K. \tag{5.5}$$

Scriviamo $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

Esempio 5.16. *Abbiamo* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$. *Fissiamo* $K > 0$ *e cerchiamo il* $\delta > 0$ *di* (5.5). *Ora abbiamo*

$$0 < |x| < \delta \Rightarrow 0 < x^2 < \delta^2 \Rightarrow \frac{1}{x^2} > \frac{1}{\delta^2}.$$

Ma allora per ogni fissato $K > 0$ *se poniamo* $\dfrac{1}{\delta^2(K)} = K$, *cioè* $\delta(K) = \dfrac{1}{\sqrt{K}}$ *otteniamo che*

$$0 < |x| < \delta(K) \Rightarrow \frac{1}{x^2} > \frac{1}{\delta^2(K)} = K.$$

Definizione 5.17 ($\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$)**.** Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di accumulazione per X. Data una funzione $f : X \backslash \{x_0\} \to \mathbb{R}$ si dice che $-\infty$ è il suo limite per x che va a x_0 se la seguente proposizione è vera

$$\forall \quad K \quad \exists \delta(K) > 0 \text{ t.c. } 0 < |x - x_0| < \delta(K) \text{ e } x \in X \Longrightarrow f(x) < K. \tag{5.6}$$

Scriviamo $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

I seguenti teoremi sui limiti continuano a valere.

Teorema 5.18 (Regole dei limiti)**.** *Siano $f, g : X\setminus\{x_0\} \to \mathbb{R}$ con x_0 un punto di accumulazione per X. Supponiamo che $\lim_{x\to x_0} f(x) = a \in \overline{\mathbb{R}}$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = b \in \overline{\mathbb{R}}$. Allora abbiamo le seguenti regole*

- *(regola della somma)* $\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = a + b$, *per* $(a, b) \neq (\pm\infty, \mp\infty)$
- *(regola del prodotto)* $\lim_{x\to x_0} f(x)\, g(x) = ab$, *per* $(a, b) \neq (\pm\infty, 0)$ *o* $(0, \pm\infty)$
- *(regola del quoziente)* $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}$, *per* $b \neq 0$ *e* $(a, b) \neq (\pm\infty, \pm\infty)$.

Teorema 5.19 (Confronto)**.** *Siano $f, g : X\setminus\{x_0\} \to \mathbb{R}$ con x_0 un punto di accumulazione per X. Supponiamo che $\lim_{x\to x_0} f(x) = a \in \overline{\mathbb{R}}$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = b \in \overline{\mathbb{R}}$ e che abbia sempre $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in X\setminus\{x_0\}$. Allora abbiamo $a \leq b$*

□

Teorema 5.20 (Dei Carabinieri)**.** *Siano $f, g, h : X\setminus\{x_0\} \to \mathbb{R}$ con x_0 un punto di accumulazione per X. Supponiamo che $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in X\setminus\{x_0\}$. Supponiamo inoltre che esista $L \in \overline{\mathbb{R}}$ tale che*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L = \lim_{x\to x_0} g(x)$$

Allora esiste anche $\lim_{x\to x_0} h(x)$ ed in particolare si ha

$$\lim_{x\to x_0} h(x) = L$$

Esempio 5.21. *Le funzioni* $\sin x$ *e* $\cos$ *sono continue in* $\mathbb{R}$. *Cominciamo* $\lim_{x\to 0} \sin x = 0 = \sin 0$. *Intanto, dalla definizione di seno si ha l'importante disuguaglianza*

$$0 \leq |\sin x| \leq |x| \text{ per ogni } x.$$

Pertanto per $x \to 0$ per i Carabinieri abbiamo $\lim_{x\to 0} \sin x = 0 = \sin 0$.
Ora dimostriamo che $\lim_{x\to 0} \cos x = 1 = \cos 0$. *Ricordiamoci che vicino a 0 abbiamo* $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$. *Sia* $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$. *Allora*

$$1 - \cos x = (1 - \sqrt{1 - \sin^2 x})\frac{1 + \sqrt{1 - \sin^2 x}}{1 + \sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1 - \left(\sqrt{1 - \sin^2 x}\right)^2}{1 + \sqrt{1 - \sin^2 x}}$$
$$= \frac{\sin^2 x}{1 + \sqrt{1 - \sin^2 x}}.$$

Concludiamo che per $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$

$$0 \le 1 - \cos x \le \sin^2 x.$$

Pertanto, siccome $\lim_{x\to 0} \sin^2 x = 0$*, per i Carabinieri segue* $\lim_{x\to 0}(1 - \cos x) = 0$*. Quindi* $\lim_{x\to 0} \cos x = 1 = \cos 0$*.*
Supponiamo ora $x_0 \neq 0$ *e poniamo* $x = x_0 + h$*. Allora*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} \sin x &= \lim_{h\to 0} \sin(x_0 + h) = \lim_{h\to 0} (\sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sin h)\\ &= \sin x_0 \lim_{h\to 0} \cos h + \cos x_0 \lim_{h\to 0} \sin h = \sin x_0.\end{aligned}$$

In modo simile

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} \cos x &= \lim_{h\to 0} \cos(x_0 + h) = \lim_{h\to 0} (\cos x_0 \cos h - \sin x_0 \sin h)\\ &= \cos x_0 \lim_{h\to 0} \cos h - \sin x_0 \lim_{h\to 0} \sin h = \cos x_0.\end{aligned}$$

5.1 Un paio di limiti notevoli

Con l'espressione *limite notevole* ci si riferisce ad un certo numero di limiti che sono interessanti e non banali e che fungono da base per lo sviluppo del calcolo differenziale. Il primo limite notevole che trattiamo è il seguente.

Lemma 5.22. *Abbiamo il limite* $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$*.*

Dim. Per $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ abbiamo

$$\sin x \le x \le \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

che verrà spiegata in classe con un disegno. Ne consegue che, dividendo per $\sin x$, abbiamo

$$1 \le \frac{x}{\sin x} \le \frac{1}{\cos x}. \tag{5.7}$$

Siccome tutte le funzioni sono pari, queste disuguaglianze restano vere per ogni $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$. Per i Carabinieri, siccome in (5.7) abbiamo che gli estremi convergono ad 1, il termine mediano converge ad 1. □

In preparazione del secondo limite notevole consideriamo i seguenti due esercizi.

Esercizio 5.23. *Dimostrare che se per un funzione* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *allora*

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = L \Longrightarrow \lim_{x\to +\infty} f(x - 1) = L.$$

Piìn generale, dimostrare che per un qualsiasi prefissato $a_0 \in \mathbb{R}$ *abbiamo*

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = L \Longrightarrow \lim_{x\to +\infty} f(x - a) = L.$$

Esercizio 5.24. *Per* $[x] : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ *la funzione parte intera, definita da* $[x] \le x < [x] + 1$, *dimostrare che* $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]} = e$.

Il secondo limite notevole che trattiamo è il seguente.

Lemma 5.25. *Abbiamo il limite* $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$.

Dim. Ricordiamoci della funzione parte intera di x, $[x] : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, definita da $[x] \le x < [x] + 1$. Si hanno le disuguaglianze

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} < \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}.$$

Abbiamo per il più piccolo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} &= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} = \\ = \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} &= e\end{aligned}$$

Per l'estremo maggiore abbiamo

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} = \\ &= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\end{aligned}$$

Per i Carabinieri abbiamo $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$. $\square$

Abbiamo anche quanto segue.

Lemma 5.26. *Abbiamo il limite* $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$.

Quindi i due lemmi precedenti implicano quanto segue.

Corollario 5.27. *Abbiamo il limite* $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$.

Dimostrazione del Lemma 5.26. Poniamo $y = -x$. Allora

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} &= \left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} = \left(\frac{y-1}{y-1+1}\right)^{-y} = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{y-1}}\right)^{-y} = \left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y} \\ &= \left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right).\end{aligned}$$

Pertanto per via del precedente lemma concludiamo

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y=e.$$

□

Una conseguenza utile del Corollario 5.27 è il seguente risultato.

Lemma 5.28. *Per ogni* $x\in\mathbb{R}$ *abbiamo limite* $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x$.

Dim. Fissiamo $x_0\in\mathbb{R}$ (scrivo x_0 invece di x, per evidenziare che x in questa dimostrazione è una costante).

Abbiamo

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x_0}{n}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{x_0}{n}\right)^{\frac{n}{x_0}}\right]^x.$$

Introducendo la variabile $y=\dfrac{n}{x_0}$ (ricordare che a destra x è costante ed n è la variabile), scriviamo

$$\left[\left(1+\frac{x_0}{n}\right)^{\frac{n}{x_0}}\right]^{x_0}=\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right]^{x_0}.$$

Ricordiamoci che il Corollario 5.27 implica

$$\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y=e.$$

Questo implica

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x_0}{n}\right)^{\frac{n}{x_0}}=e.$$

Infine, dimostreremo più avanti che per ogni fissato $x_0\in\mathbb{R}$ la funzione $x^{x_0}:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ è continua, ed in particolare che

$$\lim_{x\to e}x^{x_0}=e^{x_0}.$$

Pertanto

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x_0}{n}\right)^n&=\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{x_0}{n}\right)^{\frac{n}{x_0}}\right]^{x_0}=\lim_{z\to e}[z]^{x_0}\qquad\text{dove } z:=\left(1+\frac{x_0}{n}\right)^{\frac{n}{x_0}}\\&=e^{x_0}.\end{aligned}$$

Questo implica la tesi. □

Una applicazione tipica del lemma 5.28 riguarda il tasso di interesse rivalutato continumente

5.1.1 Tasso di interesse

Supponiamo di disporre di un capitale iniziale Q_0. Se deposito Q_0 in banca con un tasso di interesse di $r\%$ quest'ultimo fatto può essere declinato in infiniti modi distinti.

- Un primo significato può essere che dopo un anno la banca mi accresce il capitale di $\Delta A_0^{(1)} = \dfrac{r}{100}Q_0$. Pertanto dopo un anno avrei

$$A_1^{(1)} = Q_0 + \Delta A_0^{(1)} = \left(1 + \frac{r}{100}\right) Q_0$$

  All'ennesimo anno il capitale può essere calcolato in base alla formula ricorsiva

$$A_n^{(1)} = \begin{cases} Q_0 \text{ il capitale iniziale per } n = 0 \\ \left(1 + \frac{r}{100}\right) A_{n-1}^{(1)} \text{ per } n \geq 1 \end{cases}$$

  E' facile concludere che $A_n^{(1)} = \left(1 + \dfrac{r}{100}\right)^n Q_0$. Quindi in particolare al tempo t abbiamo $A_t^{(1)} = \left(1 + \dfrac{r}{100}\right)^t Q_0$

- Un secondo significato può essere che dopo il primo semestre la banca mi accresce il capitale di $\Delta A_0^{(2)} = \dfrac{\frac{r}{2}}{100}Q_0$. Pertanto il primo semestre avrei

$$A_{\frac{1}{2}}^{(2)} = Q_0 + \Delta A_0^{(2)} = \left(1 + \frac{\frac{r}{100}}{2}\right) Q_0$$

  All'ennesimo semestre, il capitale può essere calcolato in base alla formula ricorsiva

$$A_{\frac{n}{2}}^{(2)} = \begin{cases} Q_0 \text{ il capitale iniziale per } n = 0 \\ \left(1 + \frac{\frac{r}{100}}{2}\right) A_{(n-1)\frac{1}{2}}^{(2)} \text{ per } n \geq 1 \end{cases}$$

  E' facile concludere che $A_{\frac{n}{2}}^{(2)} = \left(1 + \dfrac{\frac{r}{100}}{2}\right)^n Q_0$ e dopo n anni, ossia dopo $2n$ semestri, ho $A_n^{(2)} = \left(1 + \frac{\frac{r}{100}}{2}\right)^{2n} Q_0$. Quindi in particolare al tempo t abbiamo $A_t^{(2)} = \left(1 + \dfrac{\frac{r}{100}}{2}\right)^{2t} Q_0$

- Se l'anno viene suddiviso in N intervalli uguali e se dopo ogniuno di questi intervalli il capitale è rivalutato del $\dfrac{r}{N}\%$ allora procedendo in modo simile si ottiene $A_t^{(N)} = \left(1 + \dfrac{\frac{r}{100}}{N}\right)^{Nt} Q_0$.

- Nel caso della rivalutazione continua abbiamo

$$A_t^{(\infty)} = \lim_{N\to+\infty} \left(1 + \frac{\frac{r}{100}}{N}\right)^{Nt} Q_0 = \lim_{N\to+\infty} \left(1 + \frac{\frac{rt}{100}}{Nt}\right)^{Nt} Q_0 = \lim_{y\to\infty} \left(1 + \frac{\frac{rt}{100}}{y}\right)^{y} Q_0 = e^{\frac{rt}{100}} Q_0.$$

- Per ogni $t > 0$ abbiamo $A_t^{(1)} \leq A_t^{(2)} \leq ... < A_t^{(\infty)}$.

5.2 Limite destro e limite sinistro

Definizione 5.29 (limite destro e limite sinistro)**.** Sia $f : X\backslash\{x_0\} \to \mathbb{R}$ una funzione.

1. Supponiamo che x_0 sia un punto di accumulazione per l'insieme $X \cap (x_0, +\infty)$. Consideriamo allora la restrizione $f_{|X\cap(x_0,+\infty)} : X \cap (x_0, +\infty) \to \mathbb{R}$. Allora se esiste $L = \lim\limits_{x\to x_0} f_{|X\cap(x_0,+\infty)}(x)$ scriviamo

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) := \lim_{x\to x_0} f_{|X\cap(x_0,+\infty)}(x).$$

   Questo limite viene chiamato il limite destro di $f(x)$ nel punto x_0.

2. Supponiamo che x_0 sia un punto di accumulazione per l'insieme $X \cap (-\infty, x_0)$. Consideriamo allora la restrizione $f_{|X\cap(-\infty,x_0)} : X \cap (-\infty, x_0) \to \mathbb{R}$. Allora se esiste $L = \lim\limits_{x\to x_0} f_{|X\cap(-\infty,x_0)}(x)$ scriviamo

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) := \lim_{x\to x_0} f_{|X\cap(-\infty,x_0)}(x).$$

   Questo limite viene chiamato il limite sinistro di $f(x)$ nel punto x_0.

Esercizio 5.30. *Sia $f : X\backslash\{x_0\} \to \mathbb{R}$ una funzione e supponiamo che x_0 sia un punto di accumulazione sia per l'insieme $X \cap (x_0, +\infty)$ che per l'insieme $X \cap (-\infty, x_0)$. Dimostrare che le seguenti proposizioni sono equivalenti.*

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *esiste.*

2. *Esistono* $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ *e* $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ *ed inoltre abbiamo*

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x).$$

Dimostrare inoltre che quando le due proposizioni sono vere abbiamo

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x).$$

Teorema 5.31 (Limiti delle funzioni crescenti)**.** *Sia $f : X\backslash\{x_0\} \to \mathbb{R}$ crescente e sia x_0 un punto di accumulazione per X.*

1. *Supponiamo che e supponiamo che x_0 sia un punto di accumulazione sia per l'insieme $X \cap (x_0, +\infty)$. Allora*

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \inf f(X \cap (x_0, +\infty)).$$

2. *Supponiamo che x_0 sia un punto di accumulazione sia per l'insieme $X \cap (-\infty, x_0)$. Allora*
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup f(X \cap (-\infty, x_0)).$$

Esiste anche una versione per funzioni decrescenti:

Teorema 5.32 (Limiti delle funzioni decrescenti)**.** *Sia $f : X \backslash \{x_0\} \to \mathbb{R}$ crescente e sia x_0 un punto di accumulazione per X.*

1. *Supponiamo che e supponiamo che x_0 sia un punto di accumulazione sia per l'insieme $X \cap (x_0, +\infty)$. Allora*
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \sup f(X \cap (x_0, +\infty)).$$

2. *Supponiamo che x_0 sia un punto di accumulazione sia per l'insieme $X \cap (-\infty, x_0)$. Allora*
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \inf f(X \cap (-\infty, x_0)).$$

La dimostrazione di questi teoremi è molto simile alla dimostrazione dei teoremi 4.61 e 4.62.

Esempio 5.33. *Sia $b > 0$. Allora $b^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la funzione esponenziale di base b, è continua.*
Cominciamo col dimostrare la continuità in 0, cioè $\lim\limits_{x \to 0} b^x = 1$. Non è restrittivo considerare il caso $b > 1$. In questo caso b^x è una funzione crescente, per $x > 0$ abbiamo $1 < b^x$ e
$$1 \leq \lim_{x \to 0^+} b^x = \inf\{b^x : x > 0\} \leq \inf\{b^{\frac{1}{n}} : n \in \mathbb{N}\} = \lim_{n \to +\infty} b^{\frac{1}{n}} = 1$$
dove l'ultimo limite lo abbiamo calcolato nell'esempio 4.53. Pertanto le disuguaglianza sono uguaglianze ed abbiamo $\lim\limits_{x \to 0^+} b^x = 1$. D'altra parte
$$\lim_{x \to 0^-} b^x = \lim_{x \to 0^+} b^{-x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{b^x} = 1$$
Da qui concludiamo
$$\lim_{x \to 0} b^x = 1 = b^0$$
Ora dimostriamo che
$$\lim_{x \to x_0} b^x = b^{x_0} \text{ per ogni } x_0 \in \mathbb{R}.$$
In effetti
$$\lim_{x \to x_0} b^x = \lim_{h \to 0} b^{h + x_0} = \lim_{h \to 0} b^h \quad b^{x_0} = b^{x_0} \lim_{h \to 0} b^h = b^{x_0}.$$

6 Il teorema di Bolzano Weierstrass per successioni

Definizione 6.1. Data un insieme X, una successione di elementi di X, espressa nella forma di funzione $f : \mathbb{N} \to X$, ed una funzione strettamente crescente $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, la composizione $f \circ g : \mathbb{N} \to X$ è una sottosuccessione della successione di partenza.

Esempio 6.2. *Consideriamo la successione* $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$*, che come funzione associa* $n \to (-1)^n$*. Poi consideriamo la successione strettamente crescente* $m \to n := 2m$*. Allora componendole abbiamo* $m \to (-1)^{2m} = 1$

Un modo più pratico per pensare alle sottosuccessioni di una successione scritta nella forma $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è di considerare successioni strettamente crescenti di numeri naturali $k \to n_k$ e poi di considerare le successioni $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$. Ad esempio $\{x_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{x_{2n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ sono sottosuccessioni di $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Esercizio 6.3. *Sia* $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *una successione strettamente crescente in* $\mathbb{N}$*. Dimostrare che* $n_k \geq k$ *per ogni* $k \in \mathbb{N}$*.*

Definizione 6.4. Una successione di intervalli chiusi $\{[a_n, b_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ si dice formata da intervalli dimezzati se per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ e $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b_n - a_n}{2}$.

Lemma 6.5. *Sia* $\{[a_n, b_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di intervalli dimezzati. Allora esiste un punto* $\overline{x} \in \mathbb{R}$ *tale che* $\overline{x} \in [a_n, b_n]$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *tale che* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \overline{x}$*.*

Dim. Siccome $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ risulta $a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n$, vedi esercizio 3.14. Quindi in particolare $\{a_n\}$ è una successione crescente, $\{b_n\}$ è una successione decrescente. Inoltre l'insieme $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ e l'insieme $B = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ formano una coppia di classi separate, visto che presi $a_n \in A$ e $b_m \in B$ ho $a_n < b_m$, poichè preso $N \geq \max\{n, m\}$, ho $a_n \leq a_N < b_N \leq b_m$. Sia $\overline{x} \in \mathbb{R}$ un elemento di separazione. Allora $a_n \leq \overline{x} \leq b_n$ per ogni n. E pertanto $\overline{x} \in [a_n, b_n]$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Poichè le successioni sono monotone, esistono i limiti $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \overline{a} = \sup A$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \overline{b} = \inf B$. Per il teorema del confronto, ho $\overline{a} \leq \overline{x} \leq \overline{b}$. Ora dimostriamo che $\overline{b} = \overline{a}$. Questo completerà la dimostrazione del lemma. Se per assurdo fosse $\overline{b} \neq \overline{a}$, allora avremmo $\overline{b} > \overline{a}$. Visto che $b_{n+1} \geq \overline{b} > \overline{a} \geq a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, seguirebbe che

$$0 < \overline{b} - \overline{a} \leq b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_1 - a_1}{2^n},$$

dove l'ultima uguaglianza è facile da dimostrare per induzione. Prendendo il limite otteniamo

$$0 < \overline{b} - \overline{a} \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{b_1 - a_1}{2^n} = 0.$$

Questo implica $0 < 0$, che è assurdo. Pertanto $\overline{b} = \overline{a} = \overline{x}$. □

Teorema 6.6 (Bolzano Weierstrass)**.** *Sia* $\{x_n\}$ *una successione contenuta in un intervallo chiuso e limitato* $[a, b]$*. Allora esistono una sottosuccessione* $\{x_{n_k}\}$ *ed un punto* $\overline{x} \in [a, b]$ *tali che* $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k} = \overline{x}$*.*

Dim. Si definisce per induzione una successione $\{[a_k, b_k]\}_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ di intervalli dimezzati contenuti in $[a, b]$ nel seguente modo:

1. per $k = 0$ pongo $[a_0, b_0] = [a, b]$. Notiamo che $[a_0, b_0]$, contenendo tutti gli elementi di $\{x_n\}$, in particolare contiene infiniti elementi di $\{x_n\}$;

2. parto da un $[a_k, b_k]$ che contiene infiniti elementi di $\{x_n\}$, divido

$$[a_k, b_k] = [a_k, \frac{a_k + b_k}{2}] \cup [\frac{a_k + b_k}{2}, b_k];$$

   e scelgo $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ una delle due metà che contenga infiniti elementi di $\{x_n\}$ (almeno una delle due metà soddisfa questa condizione).

In questo modo resta ben definita una successione $\{[a_k, b_k]\}_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ di intervalli dimezzati contenuti in $[a, b]$ con la proprietà che ogni $[a_k, b_k]$ contiene infiniti elementi di $\{x_n\}$. Poi scegliamo $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$ per ogni k, nel modo seguente:

i $x_{n_0} \in [a_0, b_0] = [a, b]$ sia un qualsiasi elemento della successione;

ii Dato $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$ scelgo $x_{n_{k+1}} \in [a_{k+1}, b_{k+1}]$ con $n_{k+1} > n_k$.

La scelta in (ii) si può fare perchè $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ contiene infiniti elementi di $\{x_n\}$. Notiamo che $\{x_{n_k}\}$ è una sottosuccessione di $\{x_n\}$. Siccome per ogni k ho

$$a_k \leq x_{n_k} \leq b_k,$$

e siccome per il Lemma 6.5 $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \overline{x}$, per i Carabinieri segue $\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = \overline{x}$.

$\square$

Definizione 6.7. Dato un sottoisieme $X \subseteq \mathbb{R}$ e denotato con X' l'insieme formato dai suoi punti di accumulazione, la chiusura di X è l'insieme

$$\overline{X} = X \cup X'.$$

Un insieme X si dice chiuso se $X = \overline{X}$, cioè se $X \supseteq X'$

Esempio 6.8. *1. Abbiamo visto prima nell'esempio 5.2 che per* $X = \begin{cases} (a, b) \\ [a, b) \\ (a, b] \\ [a, b] \end{cases}$ *abbiamo* $X' = [a, b]$. *Questo significa che in tutti questi casi* $\overline{X} = [a, b]$. *In particolare* $[a, b]$ *è un sottinsieme chiuso di* $\mathbb{R}$*, nell'accezione della definizione 6.7.*

2. Per $a \in \mathbb{R}$ *le semirette* $[a, +\infty)$ *e* $(-\infty, a]$ *sono sottinsiemi chiusi di* $\mathbb{R}$

3. Per $a \in \mathbb{R}$ *le semirette* $(a, +\infty)$ *e* $(-\infty, a)$ *non sono sottinsiemi chiusi di* $\mathbb{R}$ *in quanto non contengono il loro punto di accumulazione* a*.*

4. *$\mathbb{R}$ è un sottinsieme chiuso di $\mathbb{R}$. L'insieme vuoto $\emptyset$ è un sottinsieme chiuso di $\mathbb{R}$.*

5. *$X = \{x_1, ..., x_n\}$ con $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ $X = \{x_1, ..., x_n\}$ è un sottinsieme chiuso di $\mathbb{R}$. Questo perchè l'insieme dei suoi punti di accumulazione è vuoto.*

6. *$\mathbb{Z}$ ed $\mathbb{N}$ sono sottinsiemi chiusi di $\mathbb{R}$. Questo perchè l'insieme dei loro punti di accumulazione sono vuoti.*

7. *Se $X_1, ..., X_n$ sono sottinsiemi chiusi di $\mathbb{R}$ allora lo sono anche la loro unione*

$$X_1 \cup ... \cup X_n \text{ e la loro intersezione } X_1 \cap ... \cap X_n.$$

Esercizio 6.9.
- *Dimostrare che ogni punto $a \in \mathbb{R}$ è un punto di accumulazione per $\mathbb{Q}$.*
- *Stabilire se $\mathbb{Q}$ è chiuso o meno determinando $\overline{\mathbb{Q}}$.*

Esercizio 6.10. *Considerare l'insieme $X = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$. Determinare $\overline{X}$.*

Definizione 6.11. Un sottoinsieme $X \subseteq \mathbb{R}$ si dice compatto se è chiuso e limitato (limitato vuole dire che $-\infty < \inf X \leq \sup X < +\infty$).

Esempio 6.12. *Alcuni esempi di sottoinsiemi compatti $X \subseteq \mathbb{R}$ sono i seguenti.*

- *$X = [a, b]$, con $a < b$ elementi di $\mathbb{R}$*
- *$X = [a_1, b_1] \cup ... \cup [a_n, b_n]$ per $[a_1, b_1]$,...,$[a_n, b_n]$ n intervalli chiusi e limitati in $\mathbb{R}$.*
- *$X = [a_1, b_1] \cap ... \cap [a_n, b_n]$ per $[a_1, b_1]$,...,$[a_n, b_n]$ come sopra.*
- *$X = \{x_1, ..., x_n\}$ con $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$.*

D'altra parte, $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$, pur essendo insiemi chiusi, non sono insiemi compatti perchè non sono limitati.

Una versione più generale del teorema di Bolzano Weierstrass, la cui dimostrazione è omessa, ma che non è molto differente da quella del teorema 6.6, è la seguente.

Teorema 6.13. *Sia $\{x_n\}$ una successione contenuta in un sottoinsieme $X \subseteq \mathbb{R}$ che è chiuso e limitato. Allora esistono una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ ed un punto $\overline{x} \in X$ tali che $\lim\limits_{k \to +\infty} x_{n_k} = \overline{x}$.*

7 Funzioni continue

7.1 Teorema di Weierstrass

Definizione 7.1. Sia $f : X \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in X$.

1. x_0 si dice un punto di massimo di f se
$$f(x) \leq f(x_0) \text{ per ogni } x \in X. \tag{7.1}$$

2. x_0 si dice un punto di minimo di f se
$$f(x) \geq f(x_0) \text{ per ogni } x \in X. \tag{7.2}$$

Esercizio 7.2. *Sia $f : X \to \mathbb{R}$. Dimostrare le seguenti proposizioni.*

1. *x_0 è punto di massimo di f $\Leftrightarrow$ $f(x_0) = \sup f(X)$.*
2. *x_0 è punto di minimo di f $\Leftrightarrow$ $f(x_0) = \inf f(X)$.*
3. *f ammette punti di massimo se e solo se esiste* $\max f(X)$.
4. *f ammette punti di minimo se e solo se esiste* $\min f(X)$.

Esercizio 7.3. *Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definita da*
$$f(n) = \begin{cases} \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right) & \textit{per } 1 \leq n \leq 6 \\ e^{n^2-n} & \textit{per } n > 6 \end{cases}$$

1. *Stabilire se f ha punti di massimo, e se li ha trovarli.*
2. *Stabilire se f ha punti di minimo, e se li ha trovarli..*

Definizione 7.4. Per ogni $X \subseteq \mathbb{R}$ considereremo l'insieme delle funzioni continue $f : X \to \mathbb{R}$ denotandolo con $C^0(X)$.

Esercizio 7.5. *Sia $f : X \to \mathbb{R}$ con X un insieme finito (cioè con un numero finito di elementi). Dimostrare che f ha punti di massimo e punti di minimo.*

Esercizio 7.6. *Sia data una funzione $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, cioè una successione $n \to x_n$. Dimostrare che se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ e se $x_1 > 0$, allora la funzione ha un punto di massimo.*

Ricordiamoci dall'esempio 6.8 che i sottoinsiemi finiti X di $\mathbb{R}$ sono sottoinsiemi compatti di $\mathbb{R}$. L'esercizio 7.5, che può essere risolto in modo elementare, è un caso particolare del seguente.

Teorema 7.7. *Sia $f \in C^0(X)$ con $X \subseteq \mathbb{R}$ un insieme compatto. Allora f ha punti di massimo e punti di minimo.*

Dim. Non è restrittivo considerare solo l'esistenza di un punto di massimo. Se sappiamo che $f(X)$ ha il massimo, ossia che $\sup f(X) \in f(X)$ (qui ricordiamoci che $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$), abbiamo concluso la dimostrazione perchè allora esiste $\overline{x} \in X$ con $f(\overline{x}) = \sup f(X)$. Supponiamo allora che $\sup f(X) \notin f(X)$. Allora però, dalla seconda proprietà del sup è facile concludere che esiste una successione $\{y_n\}$ in $f(X)$ t.c. $\lim_{n\to+\infty} y_n = \sup f(X)$. Ovviamente per ogni $y_n \in f(X)$ esiste un $x_n \in X$ tale che $y_n = f(x_n)$. Pertanto resta definita una successione $\{x_n\}$ in X tale che $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \sup f(X)$. Per il teorema di Bolzano Weierstrass (nella versione più generale per insiemi compatti) esistono una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ ed un $\overline{x} \in X$ tali che

$$\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = \overline{x}.$$

Abbiamo

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \sup f(X) \Rightarrow \lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = \sup f(X)$$

Ma abbiamo anche, per la continuità di f in X, che

$$\lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = f(\overline{x})$$

Per confronto dei due limiti, segue $f(\overline{x}) = \sup f(X)$ e cioè $\sup f(X) \in f(X)$. Quindi, anche quando abbiamo supposto che $\sup f(X) \notin f(X)$, nel caso in cui $f \in C^0(X)$ con X compatto segue $\sup f(X) \in f(X)$. Evidentemente questo è assurdo e quindi concludiamo che $\sup f(X) \in f(X)$. □

Esercizio 7.8. *Trovare un esempio di funzione discontinua definita in $[0,1]$ ed a valori in $\mathbb{R}$ priva di punti di massimo*

Esempio 7.9.

1. *$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non ha ne' punti di massimo ne' punti di minimo.*
2. *$x^{2n+1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ per $n \in \mathbb{N}$ non ha punti di massimo ne' punti di minimo.*
3. *$x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non ha punti di massimo ma ha punti di minimo (infatti, 0 è il punto di minimo).*
4. *$x^{2n} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ per $n \in \mathbb{N}$ non ha punti di massimo ma ha punti di minimo (infatti, 0 è il punto di minimo).*

Esercizio 7.10. *Dimostrare che se $f \in C^0(\mathbb{R})$ è tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ allora f non ha punti di massimo ne' punti di minimo.*

Esercizio 7.11. *Dimostrare che se $f \in C^0(\mathbb{R})$ è tale che $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ allora f non ha punti di massimo ma ha punti di minimo.*

Esercizio 7.12. *Sia $f \in C^0(\mathbb{R})$ tale che $\lim_{x\to-\infty} f(x) = a \in \overline{\mathbb{R}}$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \in \overline{\mathbb{R}}$. Supponiamo che esista $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_0) < a$ ed $f(x_0) < b$. Allora f ha punti di minimo.*

Esercizio 7.13. *Sia* $f \in C^0(\mathbb{R})$ *tale che* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = a \in \overline{\mathbb{R}}$ *e* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \in \overline{\mathbb{R}}$. *Supponiamo che esista* $x_0 \in \mathbb{R}$ *tale che* $f(x_0) > a$ *ed* $f(x_0) > b$. *Allora* f *ha punti di massimo.*

Esercizio 7.14. *Sia* $p(x) = a_{2n}x^{2n} + ... + a_1x + a_0$ *un polinomio di grado* $2n$, *con* $n \in \mathbb{N}$.

- *Al variare dei coefficienti* $a_0, a_1, ..., a_{2n}$ *stabilire quando* $p(x)$ *ha punti di massimo.*
- *Al variare dei coefficienti* $a_0, a_1, ..., a_{2n}$ *stabilire quando* $p(x)$ *ha punti di minimo.*
- *Al variare dei coefficienti* $a_0, a_1, ..., a_{2n}$ *stabilire quando* $p(x)$ *ha sia punti di massimo che punti di minimo.*

Esercizio 7.15. *Sia* $X \subseteq \mathbb{R}$ *e consideriamo una funzione* $f : X \to \mathbb{R}$. *Dimostrare che se* $f(X)$ *è un insieme finito (cioè con un numero finito di elementi) allora la funzione* f *ha sia punti di massimo che punti di minimo.*

7.2 Teorema degli zeri e suoi corollari

Ricordiamoci della definizione di funzione continua in Definizione 5.11. Per prima cosa, formuliamo come esercizio il seguente importante enunciato.

Definizione 7.16. Sia $X \subseteq \mathbb{R}$. Un punto $x_0 \in X$ che non è un punto di accumulazione per X viene detto punto isolato di X.

Esercizio 7.17. *Dimostrare che un punto* $x_0 \in X$ *è un punto di isolato di* X *se e solo se*

$$\exists \delta > 0 \ \text{ t.c. } |x - x_0| < \delta \ \text{ e } x \in X \Longrightarrow x = x_0.$$

Esercizio 7.18. *Sia* $x_0 \in X$ *un punto di isolato di* X *e sia* $f : X \to \mathbb{R}$ *una funzione (non necessariamente una funzione continua in* X*). Dimostrare che*

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta(\epsilon) > 0 \ \text{ t.c. } |x - x_0| < \delta(\epsilon) \ \text{ e } x \in X \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Esercizio 7.19. *Sia* $f : X \to \mathbb{R}$ *e sia* $x_0 \in X$ *un punto di accumulazione per* X. *Le seguenti due proposizioni sono equivalenti.*

1. f *è continua nel punto* x_0 *ai sensi della Definizione 5.11, cioè* $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
2. $$\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta(\epsilon) > 0 \ \text{ t.c. } |x - x_0| < \delta(\epsilon) \ \text{ e } x \in X \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon. \tag{7.3}$$

Abbiamo anche il seguente enunciato.

Esercizio 7.20. *Sia* $f : X \to \mathbb{R}$. *Le seguenti due proposizioni sono equivalenti.*

1. *f è continua ai sensi della Definizione 5.11, cioè in ogni punto $x_0 \in X$ che è un punto di accumulazione per X abbiamo $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

2. *Per ogni $x_0 \in X$*

$$\forall x_0 \in X \,\&\forall \epsilon > 0 \,\exists \delta(\epsilon) > 0 \;\; t.c. \;\; |x - x_0| < \delta(\epsilon) \;\; e \;\; x \in X \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon. \tag{7.4}$$

Esempio 7.21. *La funzione di Dirichlet $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, vedi esempio 4.5, non è continua in alcun punto. In effetti, se fosse continua in un punto x_0, allora*

$$\forall \epsilon > 0 \,\exists \delta(\epsilon) > 0 \;\; t.c. \;\; |x - x_0| < \delta(\epsilon) \Longrightarrow |D(x) - D(x_0)| < \epsilon.$$

Scegliamo allora $\epsilon = 1/2$ ed il corrispondente $\delta(1/2)$. Per la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$, teorema 3.17, esiste un $q \in \mathbb{Q}$ con $|q - x_0| < \delta(1/2)$. Ma anche $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$è denso in $\mathbb{R}$, e pertanto esiste un $r \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ con $|r - x_0| < \delta(1/2)$. Ma allora

$$1 = D(q) - D(r) = |D(q) - D(r)| \leq |D(q) - D(x_0)| + |D(x_0) - D(r)| < 2\frac{1}{2} = 1.$$

Cioè $1 < 1$. Assurdo.

Esercizio 7.22. *Siano $Y \subset X \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f \in C^0(X)$. Dimostrare che la restrizione $f_{|Y} : Y \to \mathbb{R}$ è $f_{|Y} \in C^0(Y)$.*

Abbiamo il seguente risultato preliminare.

Lemma 7.23 (Teorema della costanza del segno)**.** *Sia $f \in C^0(X)$ e sia $x_0 \in X$ con $f(x_0) \neq 0$. Allora esiste $\delta > 0$ t.c. se $|x - x_0| < \delta$ e $x \in X$ il valore $f(x)$ ha il medesimo segno di $f(x_0)$.*

Dim. Per fissare le idee dimostriamo il caso $f(x_0) > 0$. Se scegliamo il numero positivo $\epsilon = \dfrac{f(x_0)}{2}$ la continuità $f \in C^0(X)$ implica che esiste $\delta > 0$ tale che

$$|x - x_0| < \delta_0 \text{ e } x \in X \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2} \Leftrightarrow -\frac{f(x_0)}{2} < f(x) - f(x_0) < \frac{f(x_0)}{2}$$

In particolare $-\dfrac{f(x_0)}{2} < f(x) - f(x_0)$ è equivalente a $f(x) > \dfrac{f(x_0)}{2}$. Siccome $\dfrac{f(x_0)}{2} > 0$ concludiamo che

$$|x - x_0| < \delta \text{ e } x \in X \Rightarrow f(x) > 0$$

□

A questo punto siamo pronti per l'importante teorema degli zeri.

Teorema 7.24 (Teorema degli zeri)**.** *Data f continua in un intervallo $[a, b]$e supponiamo che $f(a)f(b) < 0$, ossia che $f(a)$ e $f(b)$ siano diversi da 0 e con segno opposto. Allora esiste un $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$.*

Dim. Non è restrittivo considerare il caso $f(a) < 0 < f(b)$. Definiamo per induzione una sequenza (possibilmente finita) $\{[a_n, b_n]\}$ di intervalli dimezzati in $[a, b]$ tale che $f(a_n) < 0 < f(b_n)$ per ogni n. Per prima cosa definiamo $[a_0, b_0] = [a, b]$. Ovviamente

$$f(a) < 0 < f(b) \Leftrightarrow f(a_0) < 0 < f(b_0).$$

Supponiamo di essere arrivati fino a $[a_n, b_n]$. Decomponiamo

$$[a_n, b_n] = \left[a_n, \frac{a_n + b_n}{2}\right] \cup \left[\frac{a_n + b_n}{2}, b_n\right].$$

Ora calcoliamo $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)$. Se $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) = 0$ allora poniamo $c = \frac{a_n + b_n}{2}$ ed abbiamo finito la dimostrazione.
Se $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) > 0$ allora abbiamo $f(a_n) < 0 < f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)$. Poniamo $[a_{n+1}, b_{n+1}] := \left[a_n, \frac{a_n + b_n}{2}\right]$ ed abbiamo $f(a_{n+1}) < 0 < f(b_{n+1})$.
Se $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0$ allora abbiamo $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0 < f(b_n)$. Poniamo $[a_{n+1}, b_{n+1}] := \left[\frac{a_n + b_n}{2}, b_n\right]$ ed abbiamo $f(a_{n+1}) < 0 < f(b_{n+1})$.

Supponiamo ora che $\{[a_n, b_n]\}$ sia una successione di intervalli dimezzati in $[a, b]$, cioè che $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \neq 0$ per ogni n. Allora abbiamo $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = c \in [a, b]$. Verifichiamo che $f(c) = 0$ escludendo le alternative. Qui useremo il teorema della costanza del segno (cioè il lemma precedente).
Se fosse $f(c) > 0$ allora esisterebbe $\delta > 0$ t.c. se $|x - c| < \delta$ allora $f(x) > 0$. Ma siccome $\lim_{n\to+\infty} a_n = c$ segue che esiste $M(\delta)$ tale che $n > M(\delta)$ implica $|a_n - c| < \delta$. Questo implica che per $n > M(\delta)$ avremmo $f(a_n) > 0$ mentre abbiamo al contempo $f(a_n) < 0$. Pertanto $f(a_n) > 0 > f(a_n)$, che è assurdo.
Se invece fosse $f(c) < 0$ allora esisterebbe $\delta > 0$ t.c. se $|x - c| < \delta$ allora $f(x) < 0$. Ma siccome $\lim_{n\to+\infty} b_n = c$ segue che esiste $M(\delta)$ tale che $n > M(\delta)$ implica $|b_n - c| < \delta$. Questo implica che per $n > M(\delta)$ avremmo $f(b_n) < 0$ mentre abbiamo al contempo $f(b_n) > 0$. Pertanto $f(b_n) > 0 > f(b_n)$, che è assurdo.
Quindi siccome non possiamo avere ne' $f(c) > 0$ ne' $f(c) < 0$ non resta che $f(c) = 0$. $\square$

Esempio 7.25. *Sia* $p(x) = x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + ... + a_0$ *un polinomio di grado dispari a coefficienti in* $\mathbb{R}$. *Allora esiste* $c \in \mathbb{R}$ *tale che* $p(c) = 0$. *In effetti abbiamo* $\lim_{x\to+\infty} p(x) = +\infty$ *e* $\lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty$. *Questo significa che esistono* $a < b$ *in* $\mathbb{R}$ *con* $p(a) < 0 < p(b)$. *Siccome la restrizione di* p *nell'intervallo* $[a, b]$ *è continua, dal teorema degli zeri segue che esiste* $c \in (a, b)$ *tale che* $p(c) = 0$.

Esempio 7.26. *Ovviamente per polinomi di grado pari le precedenti considerazioni non si applicano. Basti pensare a* $p(x) = x^2 + 1$*, che non ha radici reali.*

Esercizio 7.27. *Sia* $p(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + ... + a_0$ *un polinomio di grado* $2n+1$ *a coefficienti in* $\mathbb{R}$*. Allora esiste* $c \in \mathbb{R}$ *tale che* $p(c) = 0$*.*

Esercizio 7.28 (Esercizio 2 esame del 23 giugno 2014)**.** *Si stabilisca il numero delle soluzioni* $z \in \mathbb{C}$ *dell'equazione* $z^3 + |z|^2 = 1$*.*

Il seguente teorema dei valori intermedi è un famoso corollario del teorema degli zeri.

Corollario 7.29 (Teorema dei valori intermedi)**.** *Data* f *continua in un intervallo* $[a, b]$ *sia* C *un numero compreso tra* $f(a)$ *ed* $f(b)$*. Allora esiste un* $c \in [a, b]$ *tale che* $f(c) = C$*.*

Dim. Se $f(a) = f(b)$ basta scegliere $c = a$ o $c = b$. Supponiamo ora che $f(a) \neq f(b)$. Non è restrittivo assumere $f(a) < f(b)$. Fissiamo $C \in (f(a), f(b))$ (ovviamente se $C = f(a)$ allora possiamo prendere $c = a$ mentre se $C = f(b)$ allora possiamo prendere $c = b$). Consideriamo la funzione

$$g(x) := f(x) - C.$$

Ovviamente anche g è continua in $[a, b]$. Inoltre

$$g(a) = f(a) - C < 0 \text{ e } g(b) = f(b) - C > 0.$$

Il teorema degli zeri garantisce che esiste $c \in (a, b)$ tale che $g(c) = 0$, il che è lo stesso di $f(c) = C$. □

Esercizio 7.30. *Sia* $p(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + ... + a_0$ *un polinomio di grado* $2n+1$ *a coefficienti in* $\mathbb{R}$*. Allora* $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *è una funzione suriettiva.*

Esercizio 7.31. *Sia* $f(x) = (x^3 + x^2 + 6x - 4)e^{x^2}$*. Allora* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *è una funzione suriettiva.*

Esercizio 7.32. *Sia* $f \in C^0(\mathbb{R})$ *una funzione con* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ *e* $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$*. Allora* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *è una funzione suriettiva.*

Esercizio 7.33. *Sia* $p(x) = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + ... + a_0$ *un polinomio di grado* $2n$ *a coefficienti in* $\mathbb{R}$*. Allora* $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *non è ne' una funzione suriettiva ne' una funzione iniettiva.*

Esercizio 7.34. *Sia* $f(x) = (x^6 + x^2 + 6x - 4)e^{x^2}$*. Allora* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *non è ne' una funzione suriettiva ne' una funzione iniettiva.*

Definizione 7.35. Un sottoinsieme $X \subseteq \mathbb{R}$ è detto *connesso* se X è o un intervallo (dove $\mathbb{R}$ o una semiretta sono considerati intervalli) oppure se X è formato da un unico punto

Un altro corollario del teorema degli zeri è il seguente (il seguente corollario è infatti equivalente al teorema dei valori intermedi) che enunciamo senza dimostrazione.

Corollario 7.36. *Sia I un intervallo e sia $f \in C^0(I)$. Allora $f(I)$ è un sottoinsieme connesso di $\mathbb{R}$.*

Dimostrazione omessa. $\square$

Esempio 7.37.

1. *Consideriamo $x^{2n+1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ per $n \in \mathbb{N}$. Da un precedente esercizio sappiamo che è suriettiva. E' una funzione strettamente crescente, e pertanto è iniettiva. Pertanto è una funzione biettiva. Per ogni $y \in \mathbb{R}$ chiamiamo radice $(2n+1)$–esima di y, e denotiamo con $\sqrt[2n+1]{y}$ e con $y^{\frac{1}{2n+1}}$ l'unico elemento di $\mathbb{R}$ tale che $(\sqrt[2n+1]{y})^{2n+1} = y$.*

2. *Consideriamo $x^{2n} : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ per $n \in \mathbb{N}$. Ovviamente $0^{2n} = 0$, $x^{2n} \geq 0$, mentre $\lim_{x \to +\infty} x^{2n} = +\infty$. L'immagine è un intervallo, necessariamente uguale a $[0, +\infty)$. E' una funzione strettamente crescente, e pertanto è iniettiva. Pertanto è una funzione biettiva da $[0, +\infty)$ in se stesso . Per ogni $y \in [0, +\infty)$ chiamiamo radice $2n$–esima di y, e denotiamo con $\sqrt[2n]{y}$ e con $y^{\frac{1}{2n}}$ l'unico elemento di $\mathbb{R}$ tale che $(\sqrt[2n]{y})^{2n} = y$.*

Esercizio 7.38. *Stabilire l'immagine di $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dove $f(x) = (x^3 + x^2 + 1)e^{x^2}$ Stabilire se f è biettiva da $\mathbb{R}_+$ nell'immagine $f(\mathbb{R}_+)$.*

Esercizio 7.39. *Sia I un intervallo e sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua e strettamente monotona. Mostrare che $J = f(I)$ è un intervallo*

Abbiamo il seguente teorema sulle funzioni inverse.

Teorema 7.40. *Sia I un intervallo e sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua e strettamente monotona. Consideriamo l'intervallo $J = f(I)$. Allora $f : I \to J$ è biettiva e la funzione inversa $g = f^{-1} : J \to I$ è continua e strettamente monotona. In particolare g è strettamente crescente se e solo se f è strettamente crescente.*

Dimostrazione omessa. $\square$

Esempio 7.41. *Le funzioni $\sqrt[2n+1]{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\sqrt[2n]{x} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ introdotte nell' esempio 7.37 sono continue e strettamente crescenti in quanto funzioni inverse di $x^{2n+1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x^{2n} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$.*

Sia $a > 1$. Presi $m \in \mathbb{N}$ ed $n \in \mathbb{N}$ definiamo $a^{\frac{m}{n}} := (a^m)^{\frac{1}{n}}$. E' facile dimostrare che $(a^m)^{\frac{1}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m$. Resta così definito a^q per ogni $q \in \mathbb{Q}$ con $q > 0$ (e si pone $a^q = \frac{1}{a^{-q}}$ se $q < 0$) Preso $x \in \mathbb{R}_+$ irrazionale si considerano gli insiemi

$$B = \{a^q : 0 < q < x\} \quad , \quad C = \{a^q : x < q\}.$$

Risulta (questo richiede una dimostrazione, che qui tralasciamo) che B e C sono classi separate ma contigue. L'elemento di separazione viene denotato con a^x. Quindi abbiamo definito (omettendo dimostrazioni) la potenza a^x se $a > 1$ e $x > 0$. La definizione si estende anche per $x \leq 0$ e per $0 < a < 1$. Resta definita la funzione $a^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si dimostra che le solite proprietà delle potenze sono vere.

Teorema 7.42. *Sia $a \in \mathbb{R}_+ \backslash \{1\}$. Allora per la funzione $x \to a^x$*

$$a > 1 \Rightarrow a^x \text{ è una funzione strettamente crescente}$$
$$0 < a < 1 \Rightarrow a^x \text{ è una funzione strettamente decrescente,}$$

ed abbiamo le regole

$$\begin{aligned}
&a^x\, a^y = a^{x+y}\\
&(a^x)^y = (a^y)^x = a^{x\,y}\\
&a^0 = 1\\
&a^{-x} = \frac{1}{a^x}\\
&(ab)^x = a^x b^x.
\end{aligned}$$

La dimostrazione è omessa. □

Esempio 7.43. *1. Consideriamo $b > 1$. La funzione $b^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ è strettamente crescente. Siccome $\lim_{x\to+\infty} b^x = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} b^x = 0$ segue che la funzione b^x è suriettiva, e pertanto biettiva. Denotiamo con $\log_b(x)$ la sua inversa. Denotiamo semplicemente con $\log(x)$ la funzione $\log_e(x)$.*

2. Se invece $0 < b < 1$ allora $b^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ è strettamente decrescente. Tuttavia la funzione b^x rimane biettiva e denotiamo sempre con $\log_b(x)$ la sua inversa.

Teorema 7.44. *Sia $a \in \mathbb{R}_+ \backslash \{1\}$. Allora*

$$\begin{aligned}
&\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y\\
&x \log_a y = \log_a(y^x)\\
&\log_a 1 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{se } a > 1,\ \log_a x \text{ è una funzione strettamente crescente}\\
&\text{se } a < 1 \text{ è una funzione strettamente decrescente}
\end{aligned}$$

La dimostrazione è omessa. □

Abbiamo già dimostrato che $b^x \in C^0(\mathbb{R})$. Ma allora il teorema 8.30 ci dice che $\log_b(x) \in C^0(\mathbb{R}_+)$.

Teorema 7.45 (Teorema sulla composizione di funzioni continue)**.** *Siano $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to \mathbb{R}$ con X e Y due sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. Se f è continua in $x_0 \in X$ e se g è continua in $f(x_0) \in Y$, allora $g(f(x))$ e' continua in $x_0 \in X$.*

Dimostrazione. $f(x)$ continua in $x_0 \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned}
&\forall \quad \sigma > 0 \quad \exists \quad \delta > 0 \text{ t.c.}\\
&|x - x_0| < \delta \text{ e } x \in X \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \sigma
\end{aligned} \tag{7.5}$$

$g(y)$ continua in $f(x_0) \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} &\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, \sigma > 0 \,\text{t.c.} \\ &|y - f(x_0)| < \sigma \text{ e } y \in Y \Rightarrow |g(y) - g(f(x_0))| < \epsilon. \end{aligned} \tag{7.6}$$

Allora $\forall\, \epsilon >$ fissato considera il corrispondente σ in (7.6). Per quel particolare σ considera il corrispondente δ in (7.5). Abbiamo per la (7.5) che $|x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| < \sigma$. Ma per la (7.6) abbiamo che $|f(x) - f(x_0)| < \sigma \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \epsilon$. Ossia per ogni $\epsilon >$ abbiamo trovato che esiste un $\delta > 0$ tale che per $|x - x_0| < \delta$ si ha $|g(f(x)) - g(f(x_0))| < \epsilon$. □

Esempio 7.46. *Sia $a \in \mathbb{R}$ fissato e consideriamo la funzione $x^a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$. Risulta che $x^a = e^{a \log(x)}$. In quanto composizione di funzione continue, la funzione potenza x^a è continua in $\mathbb{R}_+$.*

7.2.1 Limiti notevoli

Lemma 7.47. *Abbiamo il seguente limite:*

$$\lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1.$$

Dim Per $y = \frac{1}{x}$ e per $x \to \infty$

$$\frac{\log(1+y)}{y} = x \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

Ora per $x \to \infty$ abbiamo $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \to e$ e per la continuità del log abbiamo

$$\lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y)}{y} = \lim_{x\to\infty} \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{z\to e} \log z = 1.$$

□

Lemma 7.48. *Abbiamo il seguente limite:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Dim Per $y = e^x - 1$ e dal precedente lemma

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\log(1+y)} = 1.$$

□

Lemma 7.49. *Abbiamo il seguente limite:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

Dim. Posto $y = (1+x)^\alpha - 1$. Siccome $\lim_{x\to 0} y = 0$ (per la continuità della funzione x^α nel punto $x = 1$) segue

$$\begin{aligned} 1 = \lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y)}{y} &= \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+(1+x)^\alpha - 1)}{(1+x)^\alpha - 1} = \\ \lim_{x\to 0} \frac{\alpha \log(1+x)}{(1+x)^\alpha - 1} &= \lim_{x\to 0} \frac{\alpha x}{(1+x)^\alpha - 1} \frac{\log(1+x)}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\alpha x}{(1+x)^\alpha - 1}. \end{aligned}$$

Pertanto $\lim_{x\to 0} \frac{\alpha x}{(1+x)^\alpha - 1} = 1$, da cui si ricava la tesi. $\square$

8 La derivata

Definizione 8.1. Sia $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione e siano $x, x_0 \in X$ sue punti distinti. La quantità $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ è l'*incremento* di f da x_0 ad x e, per $\Delta x = x - x_0$, il *rapporto incrementale* da x_0 ad x è $\frac{\Delta f}{\Delta x} := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Il rapporto incrementale ha estrema importanza pratica.

Esempio 8.2. *Sia* $[t_0, t_1] \overset{t\to x(t)}{\to} \mathbb{R}$ *la funzione di moto di un punto mobile lungo la retta (per ogni valore del tempo* t*,* $x(t)$ *rappresenta la posizione del punto mobile sulla retta). La velocità media del punto mobile durante l'intervallo di tempo* $[t_0, t_1]$ *è* $v_{media} := \frac{x(t_1) - x(t_0)}{t_1 - t_0}$.

Esempio 8.3. *Sia* $[t_0, t_1] \overset{t\to n(t)}{\to} \mathbb{R}$ *la funzione che descrive il numero degli individui di una popolazione. Il tasso medio di crescita durante l'intervallo di tempo* $[t_0, t_1]$ *è la quantità* $\frac{\Delta n}{\Delta t} := \frac{n(t_1) - n(t_0)}{t_1 - t_0}$.

Ricordiamo il seguente elementare risultato relativo all'equazione di una retta passante per due punti dati del piano.

Lemma 8.4. *Siano* (x_0, y_0) *e* (x_1, y_1) *per* $x_0 \neq x_1$ *due punti dati del piano. Allora l'equazione della retta passante per questi due punti si può scrivere nella forma*

$$y = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + y_0. \tag{8.1}$$

Dim. Basta osservare che entrambi i punti soddisfano l'equazione. Infatti se sostituisco $(x, y) = (x_0, y_0)$ ottengo

$$\begin{aligned} &\text{termine di sinistra} = y_0 \\ &\text{termine di destra} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \underbrace{(x_0 - x_0)}_{0} + y_0 = y_0. \end{aligned}$$

Se invece sostituisco $(x, y) = (x_1, y_1)$ ottengo

$$\text{termine di sinistra} = y_1$$
$$\text{termine di destra} = \frac{y_1 - y_0}{\cancel{x_1 - x_0}}\cancel{(x_1 - x_0)} + y_0 = y_1 - y_0 + y_0 = y_1.$$

□

Il rapporto $\dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ è il coefficiente angolare o la pendenza della retta in (8.1).

Esempio 8.5. *Sia $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione e siano $x_0, x_1 \in X$ sue punti distinti. Allora l'equazione della retta passante per i due punti $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$ è data da*

$$y = \frac{\Delta f}{\Delta x}(x - x_0) + y_0$$

dove $\Delta f = f(x_1) - f(x_0)$ e $\Delta x = x_1 - x_0$.

Definizione 8.6 (Derivata)**.** Sia $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con I un intervallo aperto, e sia $x_0 \in I$. Allora, se il seguente limite di rapporti incrementali, $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, esiste ed è finito, diciamo che f è derivabile (o dfferenziabile) in x_0. Il limite viene denotato con $\dfrac{df}{dx}(x_0)$ o con $f'(x_0)$ e viene chiamato derivata di f in x_0. f si dice derivabile in I se è derivabile in tutti i punti di I. Se è derivabile in I, allora resta definita una nuova funzione $f' : I \to \mathbb{R}$ detta la derivata di f in I. Se $f' \in C^0(I)$, scriveremo che $f \in C^1(I)$.

Definizione 8.7 (Retta tangente)**.** Sia $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con I un intervallo aperto, e sia $x_0 \in I$ e supponiamo che $f'(x_0)$ esista. La retta tangente al grafico $y = f(x)$ nel punto $(x_0, f(x_0))$ è la retta di equazione

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0. \tag{8.2}$$

Osservazione 8.8. Il fatto che la retta tangente definita dalla formula 8.2 concide con il concetto intuitivo di retta tangente verrà descritto a lezione con un disegno.

Esempio 8.9. *Sia $[t_0, t_1] \overset{t \to x(t)}{\to} \mathbb{R}$ la funzione di moto di un punto mobile lungo la retta e sia $t_* \in (t_0, t_1)$. La velocità instantanea del punto mobile all'istante t_* è $v(t_*) := \lim_{t \to t_*} \dfrac{x(t) - x(t_*)}{t - t_*}$.*

Esempio 8.10. *Sia $[t_0, t_1] \overset{t \to n(t)}{\to} \mathbb{R}$ la funzione che descrive il numero degli individui di una popolazione e sia $t_* \in (t_0, t_1)$. L'incremento instantaneo all'istante t_* è $\lim_{t \to t_*} \dfrac{n(t) - n(t_*)}{t - t_*}$.*

Esempio 8.11. *La funzione costante c è derivabile in $\mathbb{R}$ con $(c)' = 0$. Infatti*

$$\lim_{y \to x} \frac{c - c}{y - x} = \lim_{y \to x} 0 = 0.$$

Esempio 8.12. *La funzione* e^x *è derivabile in* $\mathbb{R}$ *con* $(e^x)' = e^x$*. Infatti, da uno dei limiti notevoli ricaviamo*

$$\lim_{y\to x} \frac{e^y - e^x}{y - x} = \lim_{h\to 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} = e^x.$$

Esempio 8.13. *Abbiamo* $(\sin x)' = \cos x$ *e* $(\cos x)' = -\sin x$.

Infatti, per il seno abbiamo per $h \to 0$

$$\begin{aligned}
&\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin x\, \cos h + \sin h\, \cos x - \sin x}{h} = \\
&\frac{\sin x}{\cos h + 1} \frac{\cos^2 h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h} = \\
&- \frac{\sin x}{\cos h + 1} \frac{\sin^2 h}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h} \stackrel{h\to 0}{\to} \cos x.
\end{aligned}$$

Per il coseno abbiamo

$$\begin{aligned}
&\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \frac{\cos x\, \cos h - \sin h\, \sin x - \cos x}{h} = \\
&\frac{\cos x}{\cos h + 1} \frac{\cos^2 h - 1}{h} - \sin x \frac{\sin h}{h} = \\
&- \frac{\cos x}{\cos h + 1} \frac{\sin^2 h}{h} - \sin x \frac{\sin h}{h} \stackrel{h\to 0}{\to} - \sin x.
\end{aligned}$$

Esempio 8.14. *La funzione* x^α *è derivabile in* $\mathbb{R}_+$ *con* $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$*. Infatti, da uno dei limiti notevoli ricaviamo*

$$\lim_{y\to x} \frac{y^\alpha - x^\alpha}{y - x} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h} = \lim_{h\to 0} x^{\alpha-1} \frac{\left(1 + \frac{h}{x}\right)^\alpha - 1}{\frac{h}{x}} = x^{\alpha-1} \lim_{z\to 0} \frac{(1+z)^\alpha - 1}{z} = \alpha x^{\alpha-1}$$

Esempio 8.15. *La funzione* $\log x$ *è derivabile in* $\mathbb{R}_+$ *con* $(\log x)' = x^{-1}$*. Infatti, da uno dei limiti notevoli ricaviamo*

$$\begin{aligned}
&\lim_{y\to x} \frac{\log y - \log x}{y - x} = \lim_{h\to 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{\log x} + \log\left(1 + \frac{h}{x}\right) - \cancel{\log x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} x^{-1} \frac{\log\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} = \frac{1}{x} \lim_{z\to 0} \frac{\log(1+z)}{z} = \frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

Lemma 8.16. *Supponiamo di avere* $f : I \to \mathbb{R}$ *derivabile in un punto* x_0*. Allora* f *è continua in* x_0*.*

Dim. La continuità è equivalente a $\lim_{x\to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$. In effetti abbiamo

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x\to x_0} (x - x_0) = f'(x_0)0 = 0$$

per la regola del prodotto. $\square$

Teorema 8.17 (Regole delle derivate)**.** *Supponiamo di avere due funzioni* $f, g : I \to \mathbb{R}$ *derivabili in un punto* x_0*. Valgono*

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) \tag{8.3}$$
$$(fg)'(x_0) = g(x_0)f'(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \tag{8.4}$$
$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{1}{g^2(x_0)}g'(x_0) \tag{8.5}$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{g(x_0)f'(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)} \tag{8.6}$$

Dim. Notiamo che (8.5) è un caso particolare di (8.6). E' facile anche verificare che (8.4) e (8.5) implicano (8.6).

Dim. di (8.3). Abbiamo

$$\lim_{x\to x_0} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) + g(x) - (f(x_0) + g(x_0))}{x - x_0}$$
$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0)$$

dove abbiamo usato la regola della somma per i limiti.

Dim. di (8.4). Abbiamo

$$\lim_{x\to x_0} \frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0}$$
$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0}$$
$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}g(x) + \lim_{x\to x_0} f(x_0)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g(x_0)f'(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

dove abbiamo usato la regola della somma, del prodotto ed il lemma 8.16.

Dimostreremo (8.5) dopo avere dimostrato la *regola della catena.*

□

(8.4) implica, per c una costante,

$$(cf)'(x_0) = cf'(x_0). \tag{8.7}$$

Esempio 8.18. *Abbiamo* $(\tan(x))' = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$*. In effetti, per* (8.6),

$$(\tan(x))' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{(\sin(x))'\cos(x) - \sin(x)(\cos(x))'}{\cos^2(x)}$$
$$= \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

Teorema 8.19 (Regola della catena)**.** *Consideriamo due funzioni $f\colon I \to J$ e $g\colon J \to \mathbb{R}$ e supponiamo che in un punto x esistano le derivate $f'(x_0)$ e $g'(f(x))$. Allora la derivata di $g(f(x_0))$ esiste in x_0 ed e uguale a*

$$\frac{d}{dx} g \circ f(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0) \tag{8.8}$$

Dim. Incominciamo con una pseudo dimostrazione naif. Dobbiamo dimostrare

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{h} = g'(f(x_0))\, f'(x_0)$$

Viene naturale scrivere

$$\frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{h} = \frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{f(x_0+h) - f(x_0)} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}. \tag{8.9}$$

Se questo si può scrivere per un qualche $\delta_0 > 0$ e per ogni $0 < |h| < \delta_0$, allora passando al limite abbiamo

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{f(x_0+h) - f(x_0)} \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$
$$= \lim_{y\to f(x_0)} \frac{g(y) - g(f(x_0))}{y - f(x_0)} \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = g'(f(x_0))\, f'(x_0).$$

Tuttavia questa non può dirsi una dimostrazione sufficientemente generale del teorema, perchè richiede $f(x_0+h) \neq f(x_0)$ per $0 < |h| < \delta_0$ per un qualche $\delta_0 > 0$.
La vera dimostrazione del teorema è all'incirca la medesima ma è lievemente più tecnica. Definiamo in J la funzione

$$G(y) := \begin{cases} \frac{g(y)-g(f(x_0))}{y-f(x_0)} \text{ per } y \neq f(x_0) \\ g'(f(x_0)) \text{ per } y = f(x_0) \end{cases}$$

Si noti che

$$\lim_{y\to f(x_0)} G(y) = \lim_{y\to f(x_0)} \frac{g(y) - g(f(x_0))}{y - f(x_0)} = g'(f(x_0)).$$

Ora osserviamo che

$$\frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{h} = G(f(x_0+h)) \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}. \tag{8.10}$$

In effetti, se $f(x_0+h) \neq f(x_0)$ allora (8.10) è solo un modo diverso di scrivere (8.9), quest'ultima vera per le proprietà delle frazioni. Se invece $f(x_0+h) = f(x_0)$ quello che succede è che (8.9) non ha più senso, mentre (8.10) non solo ha senso ma è anche ver in quanto per $f(x_0+h) = f(x_0)$ abbiamo

$$\text{termine di sinistra di (8.10)} = \frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{h} = \frac{g(f(x_0)) - g(f(x_0))}{h} = 0$$
$$\text{termine di destra di (8.10)} = G(f(x_0+h)) \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = G(f(x_0)) \frac{f(x_0) - f(x_0)}{h} = 0.$$

Ma allora grazie all'uguaglianza (8.10) abbiamo

$$\frac{g(f(x_0+h))-g(f(x_0))}{h} = \lim_{h\to 0} G(f(x_0+h))\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} G(f(x_0+h)) \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{y\to f(x_0)} G(y)\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

□

Corollario 8.20 (Dimostrazione di (8.5))**.** *Vale la formula* $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{1}{g^2(x_0)}g'(x_0)$.

Dim. Sia $f = \frac{1}{x}$. Allora $\frac{1}{g} = f(g)$ e per la regola della catena

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0) = -\frac{1}{g^2(x_0)}g'(x_0).$$

□

Esercizio 8.21. *Dimostrare* $(e^{f(x)})' = e^{f(x)}f'(x)$.

Esempio 8.22. *Abbiamo* $(a^x)' = a^x \log a$. *In effetti*

$$(a^x)' = (e^{\log(a^x)})' = (e^{x\log a})' = e^{x\log a}(x\log a)' = e^{x\log a}\log a = a^x\log a.$$

Esempio 8.23 (Modello di Malthus)**.** *Sia* $\mathbb{R} \overset{t\to n(t)}{\to} \mathbb{R}$ *la funzione che descrive il numero degli individui di una popolazione. Il modello di Malthus postula che esiste una constante* $k \in \mathbb{R}$ *tale che per ogni intervallo* $[t_0, t]$ *l'incremento di popolazione è dato da*

$$n(t) - n(t_0) = k(t-t_0)n(t_0). \tag{8.11}$$

Questo è ragionevole e si applica per esempio per la diffusione di batteri. Per $k < 0$ (8.11) *si applica al decadimento radioattivo. In realtà* (8.11) *è una euristica. La forma rigorosa si ottiene dividendo per* $t - t_0$ *e prendendo il limite per* $t \to t_0$*:*

$$\lim_{t\to t_0}\frac{n(t)-n(t_0)}{t-t_0} = kn(t_0),$$

cioè

$$n'(t) = kn(t) \text{ per tutti i } t \in \mathbb{R} \tag{8.12}$$

che viene detta ***equazione di Malthus****. Risulta che*

$$n(t) = Ce^{kt} \tag{8.13}$$

per $C \in \mathbb{R}$ *qualsiasi (faremo l'esercizio più avanti). Il significato delle costante* C *si pone calcolando* (8.13) *per* $t = 0$, *ed ottenendo* $n(0) = C$. *Quindi la formula definitiva è*

$$n(t) = n(0)e^{kt}. \tag{8.14}$$

Si noti che il modello di Malthus (8.12) *è poco realistico, e che nell'analisi delle popolazioni (inclusi modelli prede–predatori e modelli epidemiologici) si introducono dei correttivi. Uno degli esempi più famosi di aggiustamento di* (8.12) *è la cosiddetta **equazione logistica** (qui* $k > 0$*)*

$$n'(t) = kn(t)\left(1 - \frac{n(t)}{\mathbf{N}}\right) \quad \textit{per tutti i } t \in \mathbb{R} \tag{8.15}$$

dove tipicamente $\mathbf{N} \gg 1$*. Per* $n(t) \ll \mathbf{N}$ *risulta che* $1 - \frac{n(t)}{\mathbf{N}} \approx 1$ *e* (8.15) *è indistinguibile da* (8.12)*. Tuttavia quando* $n(t)$ *incomincia ad avere il medesimo ordine di grandezza di* $\mathbf{N}$ *allora l'incremento della popolazione frena per il subentrare di nuovi effetti che invece sono ignorati dall' equazione di Malthus* (8.12)*. In questo senso* (8.15) *sembra più realistica di* (8.12)*. Si noti che le funzioni che soddisfano* (8.15) *hanno la forma*

$$n(t) = \frac{\mathbf{N}n(0)e^{kt}}{\mathbf{N} + n(0)(e^{kt} - 1)}. \tag{8.16}$$

Esempio 8.24. *Abbiamo già parlato nell'esempio 4.1 della funzione costo* $C(x)$*, che rappresenta il costo per una azienda di produrre* x *unità di un certo prodotto per ogni dato* x*. La funzione* $C'(x)$ *è detto il **costo marginale**.*

Esercizio 8.25. *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *la funzione* $f(x) = x^2 D(x)$ *dove* $D(x)$ *è la funzione di Dirichlet. Determinare i punti dove* f *è continua ed in punti dove* f *ha derivata.*

Definizione 8.26 (Derivata destra)**.** Sia $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $x_0 \in [a, b)$. Allora, se il seguente limite $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, esiste ed è finito, diciamo che f ammette derivata destra in x_0. La denotiamo con $f'_d(x_0)$.

Definizione 8.27 (Derivata sinistra)**.** Sia $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $x_0 \in (a, b]$. Allora, se il seguente limite $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, esiste ed è finito, diciamo che f ammette derivata destra in x_0. La denotiamo con $f'_s(x_0)$.

Esercizio 8.28. *Sia* $[x] : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ *la funzione parte intera di* x*, definita da* $[x] \le x < [x] + 1$*. Stabilire che la derivata destra esiste dappertutto. Verificare se questo è vero per la derivata sinistra.*

Esercizio 8.29. $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *e sia* $x_0 \in (a, b)$*. Dimostrare che le seguenti proposizioni sono equivalenti.*

1. $f'(x_0)$ *esiste.*
2. *Esistono* $f'_s(x_0)$ *e* $f'_d(x_0)$ *ed inoltre abbiamo* $f'_s(x_0) = f'_d(x_0)$

Dimostrare inoltre che quando le due proposizioni sono vere abbiamo $f'(x_0) = f'_s(x_0) = f'_d(x_0)$.

Teorema 8.30 (Della funzione inversa)**.** *Consideriamo I un intervallo, x_0 un punto interno di I, $f \in C^0(I)$ strettamente monotona con $f'(x_0) \neq 0$. Posto $J = f(I)$ sia $g : J \to I$ la funzione inversa e poniamo $y_0 = f(x_0)$. Allora y_0 è un punto interno di J, $g'(y_0)$ esiste ed abbiamo*

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \tag{8.17}$$

Dim. Sul fatto che y_0 è un punto interno di J ci torneremo dopo. Ora abbiamo

$$\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x}{f(x) - f(x_0)}$$

e pertanto

$$\lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

□

Esempio 8.31. *Sappiamo che* $\sin(x) : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ *è suriettiva (infatti è una funzione continua, è tale che* $\sin\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \pm 1$ *e pertanto la sua immagine deve essere tutto* $[-1, 1]$*). Vedremo dopo che il fatto che per* $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ *si ha* $(sinx)' = \cos x > 0$ *implica che* $\sin x$ *è strettamente crescente in* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *(si veda esercizio 9.11). Pertanto esiste una funzione inversa, che denotiamo con*

$$\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Ora abbiamo per $(-1, 1) \ni y = \sin(x)$

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}$$

dove sfruttiamo il fatto che $\cos x > 0$ *per* $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$*. Se ora nell'ultima formula sostituiamo* $y = \sin(x)$ *abbiamo*

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

o, tornando alla variabile x*,*

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Esempio 8.32. *Sappiamo che* $\tan(x) : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ *è suriettiva (infatti è continua e tale che* $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$ *e* $\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$*). Vedremo dopo che il fatto che per*

$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ *si ha* $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} > 0$ *implica che* $\tan x$ *è strettamente crescente in* $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ *(si veda esercizio 9.11). Pertanto esiste una funzione inversa, che denotiamo con*

$$\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Ora abbiamo per $\mathbb{R} \ni y = \tan(x)$

$$(\arctan y)' = \frac{1}{(\tan x)'} = \cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}$$

o, tornando alla variabile x*,*

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

8.1 Funzioni iperboliche

Sono le funzioni $\sinh(x) := \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh(x) := \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ e $\tanh(x) := \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

Esercizio 8.33. *Dimostrare che* $\sinh(x)$ *è dispari,* $\cosh(x)$ *è dispari,* $\tanh(x)$ *è dispari.*

Esercizio 8.34. *Dimostrare l'identità*

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \textit{ per ogni } x \in \mathbb{R}. \tag{8.18}$$

Esercizio 8.35. *Dimostrare*

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} \sinh(x) = +\infty \\
&\lim_{x\to-\infty} \sinh(x) = -\infty \\
&\lim_{x\to\infty} \cosh(x) = +\infty \\
&\lim_{x\to+\infty} \tanh(x) = 1 \\
&\lim_{x\to-\infty} \tanh(x) = -1.
\end{aligned}$$

Esercizio 8.36. *Dimostrare*

$$\begin{aligned}
&(\sinh(x))' = \cosh(x) \\
&(\cosh(x))' = \sinh(x) \\
&(\tanh(x))' = \frac{1}{\cosh^2(x)}.
\end{aligned} \tag{8.19}$$

Esercizio 8.37. *Dimostrare che* $\cosh(x) \geq 1$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$ *e che* $\cosh(x) = 1$ *se e solo se* $x = 0$.

Esempio 8.38. *Il fatto che* $(\sinh x)' = \cosh(x) \geq 1$ *implica (si veda esercizio 9.11) che* $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *è strettamente crescente. Inoltre* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sinh(x) = \pm\infty$ *e il fatto che è una funzione continua implicano che è suriettiva. Quindi ammette una funzione inversa. L'inversa di* $\sinh x$ *è la funzione*

$$\log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \tag{8.20}$$

In effetti consideriamo $y = \sinh x$*, cioè* $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ *o, equivalentemente,* $2y = e^x - e^{-x}$. *Moltiplicando quest'ultima per* e^x *otteniamo*

$$e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0.$$

Interpretando quest'ultima come una equazione del secondo ordine di incognita e^x*, e risolvendola, abbiamo che* $e^x \in \{(e^x)_+, (e^x)_-\}$ *dove*

$$(e^x)_\pm = y \pm \sqrt{y^2+1}.$$

Siccome $y - \sqrt{y^2+1} \leq 0$ *ed* $e^x > 0$*, abbiamo necessariamente*

$$e^x = y + \sqrt{y^2+1} \Leftrightarrow x = \log\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$$

il che ci da (8.20).

Esercizio 8.39. *Dimostrare che* $\sinh(x) \geq 0$ *per ogni* $x \in [0,\infty)$ *e che* $\sinh(x) = 0$ *se e solo se* $x = 0$.

Esempio 8.40. *Il fatto che* $(\cosh x)' = \sin(x) > 0$ *per* $x > 0$ *implica (si veda esercizio 9.11) che* $\cosh : [0,+\infty) \to [1,+\infty)$ *è strettamente crescente. Inoltre* $\lim\limits_{x\to+\infty} \cosh x(x) = +\infty$ *e il fatto che è una funzione continua implicano che è suriettiva. Quindi ammette una funzione inversa. L'inversa di* $\sinh x$ *è la funzione*

$$[1,+\infty) \ni x \to \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \tag{8.21}$$

In effetti consideriamo $y = \cosh x$*, cioè* $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ *o, equivalentemente,* $2y = e^x + e^{-x}$. *Moltiplicando quest'ultima per* e^x *otteniamo*

$$e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0.$$

Interpretando quest'ultima come una equazione del secondo ordine di incognita e^x*, e risolvendola, abbiamo che* $e^x \in \{(e^x)_+, (e^x)_-\}$ *dove*

$$(e^x)_\pm = y \pm \sqrt{y^2-1}.$$

Siccome $y - \sqrt{y^2-1} \leq 1$ *ed* $e^x > 1$ *per* $x > 0$*, abbiamo necessariamente*

$$e^x = y + \sqrt{y^2-1} \Leftrightarrow x = \log\left(y + \sqrt{y^2-1}\right)$$

il che ci da (8.21).

9 Applicazioni della derivata

Definizione 9.1. Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f : X \to \mathbb{R}$. Un punto $x_0 \in X$ si dice un punto di massimo locale (o relativo) di f se esiste

$$\exists \quad \delta > 0 \text{ tale che } |x - x_0| < \delta \text{ e } x \in X \Rightarrow f(x) \leq f(x_0). \tag{9.1}$$

Un punto $x_0 \in X$ si dice un punto di minimo locale (o relativo) di f se esiste

$$\exists \quad \delta > 0 \text{ tale che } |x - x_0| < \delta \text{ e } x \in X \Rightarrow f(x) \geq f(x_0). \tag{9.2}$$

Per distinguerli dai punti di massimo e di minimo locali o relativi, chiameremo i punti della definizione 7.1 punti di massimo e di minimo assoluti.

Definizione 9.2. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f : I \to \mathbb{R}$. Un punto $x_0 \in I$ si critico se $f'(x_0)$ esiste e se $f'(x_0) = 0$.

Teorema 9.3 (Fermat)**.** *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto e sia $f : I \to \mathbb{R}$. Sia $f \in C^0(I)$, sia $x_0 \in I$ un punto di massimo o di minimo locale e supponiamo che $f'(x_0)$ esista. Allora $f'(x_0) = 0$.*

Dim. Per fissare le idee, consideriamo il caso in cui $x_0 \in I$ è un punto di massimo locale, e quindi soddisfa (9.1).
Siccome $f'(x_0)$ esiste, sappiamo che

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

D'altra parte, (9.1) implica che

$$x \in (x_0 - \delta, x_0) \Longrightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0. \tag{9.3}$$

Ma allora per il teorema del confronto dei limiti, Teorema 5.19, si ha

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0. \tag{9.4}$$

In modo simile, (9.1) implica che

$$x \in (x_0, x_0 + \delta) \Longrightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0. \tag{9.5}$$

Di nuovo per il teorema del confronto dei limiti, Teorema 5.19, si ha

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0. \tag{9.6}$$

Quindi abbiamo $0 \leq f'(x_0) \leq 0 \Longrightarrow f'(x_0) = 0$.

$\square$

Il teorema di Fermat è importantissimo.

Esempio 9.4. *Cerchiamo massimo e minimo assoluti di* $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x$ *in* $[0, 4]$. f *è continua dunque per il teorema di Weierstrass sappiamo che esistono punti e valori di massimo e di minimo assoluti. Quando si hanno funzioni continue definite su intervalli chiusi e limitati, bisogna sempre guardare al comportamento di* f *agli estremi. Qui possiamo calcolare* $f(0) = 0$, $f(4) = 32$. *Per decidere se questi sono o no punti di massimo o di minimo dovremmo confrontarli con punti all'interno dell'intervallo. Naturalmente l'interno dell'intervallo è costituito da infiniti punti. In altre parole, sembrerebbe che per decidere se 0 e 4 sono o no punti di massimo o di minimo, dovremmo confrontare* $f(0) = 0$ *e* $f(4) = 32$ *con* $f(x)$ *per infiniti valori di* $x \in (0, 4)$. *Il teorema di Fermat ci viene in aiuto perchè ci dice che se* $f(x)$ *è differenziabile, e la nostra lo è, gli unici punti all'interno dell'intervallo che possono essere punti di massimo o di minimo di* $f(x)$ *sono punti critici. Cerchiamo dunque i punti critici. Abbiamo*

$$f'(x) = 6x^2 - 30x + 36 = 6(x^2 - 5x + 6) = 0 \text{ con soluzioni } x = 2,\ x = 3.$$

Nota che sia 2 che 3 sono in $(0, 4)$. *Quindi, gli unici possibili candidati ad essere punti di massimo o di minimo sono gli estremi 0,4 ed i punti critici 2,3 all'interno. Abbiamo* $f(2) = 28$, $f(3) = 27$. *Pertanto 0 è il punto di min ass. e 4 è il punto di max ass.*

Esempio 9.5. *Dimostriamo che* $1 + x \leq e^x$ *per ogni* x *e che se* $x \neq 0$ *si ha* $1 + x < e^x$. *Per prima cosa, se* $1 + x \leq 0$, *cioè se* $x \leq -1$ *ovviamente abbiamo* $1 + x < e^x$. *Quindi, posto* $f(x) = e^x - 1 - x$, *è sufficiente dimostrare che* $f(x) \geq 0$ *in* $[-1, +\infty)$ *con un unico punto di minimo assoluto* 0 *dove* $f(0) = 0$. *Per prima cosa osserviamo che siccome* $f(0) = 0$, $f(-1) > 0$ *e* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, *segue che esistono punti di minimo assoluto e che questi si trovano in* $(-1, +\infty)$. *Questo implica che sono punti critici, cioè sono soluzioni di* $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$. *Quindi 0 è l'unico punto di minimo assoluto e pertanto* $f(x) > 0$ *se* $x \neq 0$.

Esempio 9.6. *Trovare massimo e minimo valore di* $f(x) = e^x \sin x$ *in* $[0, 4\pi]$.

Abbiamo

$$f'(x) = e^x(\sin x + \cos x)$$

e i punti critici sono le soluzioni di

$$\sin x = -\cos x$$

che sono tutti e soli i punti $x = \frac{3}{4}\pi + n\pi$. *Qui* n *è un intero. Solo per i seguenti valori di* n *questi punti critici sono contenuti in* $[0, 4\pi]$: $n = 0, 1, 2, 3$. *Inoltre abbiamo*

$$f(\frac{3}{4}\pi) = e^{\frac{3}{4}\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad f(\frac{3}{4}\pi + \pi) = -e^{\frac{3}{4}\pi+\pi}\frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$f(\frac{3}{4}\pi + 2\pi) = e^{\frac{3}{4}\pi+2\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad f(\frac{3}{4}\pi + 3\pi) = -e^{\frac{3}{4}\pi+3\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Abbiamo $f(0) = f(4\pi) = 0$ *e pertanto massimo valore è* $f(\frac{3}{4}\pi + 2\pi) = e^{\frac{3}{4}\pi+2\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}$ *mentre minimo valore è* $f(\frac{3}{4}\pi + 3\pi) = -e^{\frac{3}{4}\pi+3\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Lemma 9.7 (Teorema di Rolle)**.** *Sia $f(x)$ continua in $[a,b]$, differenziabile in (a,b) e tale che $f(b)=f(a)$. Allora esiste un punto $c\in(a,b)$ tale che $f'(c)=0$.*

Dim. Se f è una funzione costante allora $f'(x)=0$ per tutti gli $x\in(a,b)$. Supponiamo pertanto che f non sia una funzione costante. Allora esisterà $x_0\in(a,b)$ con $f(x_0)\neq f(b)=f(a)$. Per fissare le idee supponiamo che $f(x_0)>f(b)=f(a)$. Per il teorema di Weierstrass esiste un punto di massimo assoluto $c\in[a,b]$. Inoltre siccome $f(c)\geq f(x_0)>f(b)=f(a)$ per forza deve essere $c\in(a,b)$. Per il teorema di Fermat abbiamo $f'(c)=0$. □

Una generalizzazione del teorema di Rolle è il seguente teorema.

Teorema 9.8 (Teorema di Lagrange)**.** *Sia $f(x)$ continua in $[a,b]$, differenziabile in (a,b). Allora esiste un punto $c\in(a,b)$ tale che $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

Dim. Il teorema di Lagrange è una conseguenza del teorema di Rolle. Si introduce un aggiustamento di f,

$$F(x)=f(x)-\alpha x$$

dove la costante α è scelta in modo che $F(a)=F(b)$, cioè

$$f(a)-\alpha a=f(b)-\alpha b\Rightarrow\alpha=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

In questo modo risulta $F(a)=F(b)$ e $F'(x)=f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Possiamo ora applicare il teorema di Rolle a F, concludendo che esiste $c\in(a,b)$ tale che $F'(c)=0$. Questo implica $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. □

Esercizio 9.9. *Sia f continua in un intervallo I sia differenziabile all'interno di I. Dimostrare che f è una funzione costante in I se e solo se $f'(x)=0$ per ogni x all'interno di I.*

Esercizio 9.10. *Sia f continua in un intervallo I sia differenziabile all'interno di I. Dimostrare che f è una funzione crescente in I se e solo se $f'(x)\geq 0$ per ogni x all'interno di I.*

Esercizio 9.11 (Significato geometrico del segno della derivata)**.** *Sia f continua in un intervallo I sia differenziabile all'interno di I. Supponamo che $f'(x)>0$ per ogni x all'interno di I. Dimostrare che f è una funzione strettamente crescente in I.*

Stabilire se anche il viceversa è vero, e cioè il fatto se f è una funzione strettamente crescente in I implichi $f'(x)>0$ per ogni x all'interno di I.

Esercizio 9.12. *Sia f continua in un intervallo I sia differenziabile all'interno di I. Dimostrare che f è una funzione decrescente in I se e solo se $f'(x)\leq 0$ per ogni x all'interno di I.*

Esempio 9.13. *Trovare massimo e minimo valore di* $f(x) = x\tan\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$ *in* $[3, +\infty]$.

Abbiamo

$$f'(x) = \tan\left(\frac{\pi}{x}\right) - \frac{\pi}{x\cos^2\left(\frac{\pi}{x}\right)} = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)}\left(\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) - \frac{\frac{\pi}{x}}{\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)}\right).$$

Risulta $f'(x) < 0$. *Infatti, per* $x \geq 3$ *si ha* $0 < \dfrac{\pi}{x} < \dfrac{\pi}{3}$ *e pertanto* $\cos\left(\dfrac{\pi}{x}\right) > \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$, *mentre per ogni* $x > 0$ *si ha* $\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right) < \dfrac{\pi}{x}$, *e quindi a maggior ragione* $\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right) < \dfrac{\pi}{x\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)}$ *visto che per* $x \geq 3$ *abbiamo* $\frac{1}{2} \leq \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) < 1$. *Allora visto che* $f'(x) < 0$ *risulta che* f *è strettamente decrescente, il punto di massimo è 3, mentre non c'è valore minimo.*

Esercizio 9.14 (Significato geometrico del segno della derivata)**.** *Sia* f *continua in un intervallo* I *sia differenziabile all'interno di* I. *Supponamo che* $f'(x) < 0$ *per ogni* x *all'interno di* I. *Dimostrare che* f *è una funzione strettamente decrescente in* I.

Stabilire se anche il viceversa è vero, e cioè se il fatto che f *è una funzione strettamente decrescente in* I *implichi* $f'(x) < 0$ *per ogni* x *all'interno di* I.

Esercizio 9.15. *Sia* f *continua in* $\mathbb{R}$ *e sia* $x_0 \in \mathbb{R}$. *Supponiamo che* $f'(x)$ *esista per ogni* $x \neq x_0$. *Dimostrare che*

$$f'(x) \geq 0 \text{ per ogni } x \neq x_0 \Rightarrow\ f \text{ è crescente}$$

e che

$$f'(x) > 0 \text{ per ogni } x \neq x_0 \Rightarrow\ f \text{ è strettamente crescente.}$$

Esercizio 9.16. *Sia* f *continua in* $\mathbb{R}$ *e sia* $X \subset \mathbb{R}$ *un sottoinsieme formato da un numero finito di elementi. Supponiamo che* $f'(x)$ *esista per ogni* $x \in \mathbb{R}\backslash X$. *Dimostrare che*

$$f'(x) \geq 0 \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}\backslash X \Rightarrow\ f \text{ è crescente}$$

e che

$$f'(x) > 0 \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}\backslash X \Rightarrow\ f \text{ è strettamente crescente.}$$

Esercizio 9.17. *Svolgere il precedente esercizio per* $X = \mathbb{N}, \mathbb{Z}$ *e, più in generale, per ogni sottoinsieme discreto di* $\mathbb{R}$ *(un sottoinsieme* X *di* $\mathbb{R}$ *si dice* ***discreto*** *se l'insieme dei suoi punti di accumulazione è vuoto).*

Una generalizzazione del teorema di Lagrange è il seguente teorema.

Teorema 9.18 (Teorema di Cauchy)**.** *Siano* f *e* g *continue in* $[a, b]$, *differenziabili in* (a, b). *Sia inoltre* $g'(x) \neq 0$ *per ogni* $x \in (a, b)$. *Allora esiste un punto* $c \in (a, b)$ *tale che* $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$.

Osservazione 9.19. Si noti che nell'ultima formula $g'(c) \neq 0$ per ipotesi e $g(b) - g(a) \neq 0$ come conseguenza del teorema di Rolle.

Osservazione 9.20. Il teorema di Cauchy si riduce al teorema di Lagrange quando la funzione $g(x)$ coincide con la funzione x.

Dim del teorema di Cauchy. Si introduce la funzione

$$F(x) = f(x) - \alpha g(x)$$

dove la costante α è scelta in modo che $F(a) = F(b)$, cioè

$$f(a) - \alpha g(a) = f(b) - \alpha g(b) \Rightarrow \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

In questo modo risulta $F(a) = F(b)$ e $F'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} g'(x)$. Possiamo ora applicare il teorema di Rolle a F, concludendo che esiste $c \in (a, b)$ tale che $F'(c) = 0$. Questo implica $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} g'(c)$ e quindi, dividendo per $g'(c)$, $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$. □

9.1 Regole dell'Hopital per forme indeterminate $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$

Citeremo tre regole dell'Hopital, due per $\frac{0}{0}$ ed una per $\frac{\infty}{\infty}$.

Teorema 9.21 (Prima regola dell'Hopital: forme indeterminate $\frac{0}{0}$)**.** *Siano f e g due funzioni definite in un intervallo $[a, b]$. Sia x_0 un punto in $[a, b]$. Supponiamo che esistano le derivate $f'(x_0)$ $g'(x_0)$ con $g'(x_0) \neq 0$ e che sia $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Risulta allora*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Dim. Abbiamo l'identità

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}.$$

Prendendo il limite per $x \to x_0$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

□

Esempio 9.22. $\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x) - 2x}{\sin x} =?$. *Abbiamo*

$$(\sin x)' = \cos x\,, \quad (\log(1 + x) - 2x)' = \frac{1}{1 + x} - 2.$$

Pertanto

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + x) - 2x}{\sin x} = \frac{\frac{1}{1+0} - 2}{\cos 0} = \frac{1 - 2}{1} = -1.$$

Teorema 9.23 (Seconda regola dell'Hopital: forme indeterminate $\frac{0}{0}$)**.** *Sia I un intervallo, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione di I (possibilmente, solo per questo enunciato, $x_0 = \pm\infty$). Siano f e g due funzioni a valori reali definite in un intervallo $I\backslash\{x_0\}$ derivabili in $I\backslash\{x_0\}$ e con $g(x) \neq 0$ e $g'(x) \neq 0$ per ogni x in $I\backslash\{x_0\}$. Siano inoltre*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0.$$

Allora, se il seguente limite esiste

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

con $L \in \overline{\mathbb{R}}$, abbiamo

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Dim. Dimostriamo solo il caso in cui $x_0 \in \mathbb{R}$. Per semplicità considererò solo il caso del limite da destra con $x_0 \in \mathbb{R}$. In questo caso estendo le due funzioni f e g anche nel punto x_0 ponendo $f(x_0) = g(x_0) = 0$ Si noti che in questo modo f e g sono continue in x_0. Stiamo assumendo che $\lim_{x\to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ e dobbiamo dimostrare $\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$. Per $x > x_0$ abbiamo per via di $f(x_0) = g(x_0) = 0$,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}.$$

Per via del Teorema di Cauchy applicato all'intervallo $[x_0, x]$ esiste

$$x_0 < c_x < x$$

tale che

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

Pertanto

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

Siccome $x_0 < c_x < x$ e siccome per via del Teorema dei Carabinieri abbiamo $c_x \overset{x\to x_0}{\to} x_0$. Siccome per ipotesi $\displaystyle\lim_{x\to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, abbiamo

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

Quindi $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$ $\square$

Esempio 9.24. *Abbiamo* $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$*. Infatti abbiamo applicando due volte la regola*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}.$$

La prima e la seconda equaglianza sono conseguenza della seconda regola dell'Hopital grazie al fatto che l'ultimo limite esiste.

Esempio 9.25. *Consideriamo ad esempio* $f(x) = x^2\cos(1/x)$ *e* $g(x) = x$ *per* $x > 0$*. Abbiamo*

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} g(x) = 0.$$

Abbiamo $g(x) = x \neq 0$ *per* $x \neq 0$*, e* $g'(x) = 1 \neq 0$*. Abbiamo* $f'(x) = 2x\cos(1/x) + \sin(1/x)$ *e quindi*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{2x\cos(1/x)+\sin(1/x)}{1} = \lim_{x\to 0^+} 2x\cos(1/x) + \lim_{x\to 0^+} \sin(1/x)\\ &= 0 + \lim_{x\to 0^+} \sin(1/x).\end{aligned}$$

Ma $\lim_{x\to 0^+} \sin(1/x)$ *non esiste, e quindi* $\lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *non esiste. Dobbiamo forse concludere dalla Regola dell'Hopital che anche* $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ *non esiste? Vediamo:*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2\cos(1/x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} x\cos(1/x) = 0$$

dove quest'ultimo limite segue dalle seguenti uguaglianze e dai carabinieri:

$$-x \leq x\cos(1/x) \leq x \text{ per ogni } x > 0.$$

Quindi il $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ *esiste anche se* $\lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *non esiste. È per caso questo in contrasto con la Seconda Regola dell' Hopital? No, per niente, e questo perchè la Seconda Regola dell' Hopital ci dice solo che se* $\lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *esiste allora, nel caso indeterminato, anche* $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ *esiste ed è uguale al limite del rapporto delle derivate. Ma la Seconda Regola dell' Hopital non pretende di dire che succede nel caso in cui* $\lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *non esiste.*

Teorema 9.26 (Terza regola dell'Hopital: forme indeterminate $\frac{\infty}{\infty}$)**.** *Sia* I *un intervallo,* $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ *un punto di accumulazione di* I *(possibilmente, solo per questo enunciato,* $x_0 = \pm\infty$*). Siano* f *e* g *due funzioni a valori reali definite in un intervallo* $I\backslash\{x_0\}$ *derivabili in* $I\backslash\{x_0\}$ *e con* $g'(x) \neq 0$ *per ogni* x *in* $I\backslash\{x_0\}$*. Siano inoltre*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty\,, \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty.$$

Allora, se il seguente limite esiste

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

con $L \in \overline{\mathbb{R}}$, *abbiamo*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Dim. La dimostrazione è omessa, ma comunque ci si riconduce alla dimostrazione della seconda regola dell'Hopital. □

Esempio 9.27. *Consideriamo* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{e^x}$ *con un qualche* $n \in \mathbb{N}$. *Siamo nel caso* $\frac{+\infty}{+\infty}$ *quindi non possiamo applicare la regola del quoziente. Possiamo però provare ad applicare Hopital. Abbiamo infatti*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \cdots = \lim_{x\to+\infty} \frac{n!x^0}{e^x} = \frac{n!}{\infty} = 0.$$

Esempio 9.28. *Consideriamo* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\epsilon}{\log x}$ *con un qualche* $\epsilon > 0$. *Siamo nel caso* $\frac{+\infty}{+\infty}$ *quindi non possiamo applicare la regola del quoziente. Possiamo però provare ad applicare Hopital. Abbiamo infatti*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\epsilon}{\log x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\epsilon x^{\epsilon-1}}{x^{-1}} = \lim_{x\to+\infty} \epsilon x^\epsilon = +\infty.$$

Osservazione 9.29. Percio' per $0 < \epsilon \ll 1$, $N \gg 1$ e $x \to +\infty$ abbiamo le seguenti comparazioni tra le diverse funzioni:

$$\log x \ll x^\epsilon \ll x^N \ll e^x.$$

Esempio 9.30. *Calcolare* $\lim\limits_{x\to0^+} x\log x$. *È un limite indeterminato della forma* $0(-\infty)$ *e le regole dell'Hopital non si applicano direttamente, perchè ci dobbiamo ricordare che esse sono formulate nel caso di quozienti. Abbiamo però* $\lim\limits_{x\to0^+} x\log x = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\log x}{\frac{1}{x}}$. *Ora siamo in un caso* $\dfrac{-\infty}{+\infty}$ *e possiamo applicare la regola dell'Hopital.*

$$\lim_{x\to0^+} x\log x = \lim_{x\to0^+} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to0^+} x = 0.$$

Esempio 9.31. *Calcolare* $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$. *Si tratta di un caso* $\frac{0}{0}$. *Se applichiamo Hopital direttamente un paio di volte, abbiamo*

$$\lim_{x\to0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} = \lim_{x\to0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{2x^3} = ...$$

e riusciamo a venire a capo di nulla. Proviamo a porre $y = 1/x$. $x \to 0^+$ è equivalente a $y \to +\infty$. Abbiamo quindi $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{y\to+\infty} \frac{e^{-y}}{1/y}$. Se applichiamo Hopital a quest'ultimo un paio di volte,

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{e^{-y}}{\frac{1}{y}} = \lim_{y\to+\infty} \frac{e^{-y}}{\frac{1}{y^2}} = \lim_{y\to+\infty} \frac{e^{-y}}{2\frac{1}{y^3}} = \dots$$

ossia sembra che si arrivi da nessuna parte. Osserviamo però che

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{e^{-y}}{\frac{1}{y}} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{e^y}.$$

Ora, come visto sopra, applicando Hopital abbiamo

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{y}{e^y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{e^y} = 0.$$

Quindi, qualche volta Hopital va applicata dopo alcune manipolazioni algebriche e/o opportuni cambi di variabile.

Esempio 9.32. *Consideriamo ora $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Applicando Hopital*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Ossia siamo venuti a capo di nulla. D'altra parte abbiamo che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1.$$

9.2 Derivate di ordine superiore

Ricordiamoci che in in definizione 8.6 abbiamo definito la nozione di derivata di una funzione $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con I un intervallo aperto in un punto $x_0 \in I$ denotandola con $f'(x_0)$. Useremo anche la notazione $f^{(1)}(x_0) := f'(x_0)$ e $f^{(0)}(x_0) := f(x_0)$. In altre parole la funzione f la posso occasionalmente denotare con $f^{(0)}$, chiamandola la derivata di ordine 0.

Definizione 9.33 (Derivate di ordine superiore)**.** Sia $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con I un intervallo aperto e supponiamo che la sua derivata i–esima $f^{(i)}(x)$ sia definita per ogni $x \in I$. Resta definita pertanto una funzione $f^{(i)} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Supponiamo che esista un punto $x_0 \in I$

in cui la derivata $(f^{(i)})'(x_0)$ esiste. Allora diciamo che f ammette derivata $i+1$–esima in x_0 (o derivata di ordine $i+1$ in x_0) e poniamo

$$f^{(i+1)}(x_0) = (f^{(i)})'(x_0). \tag{9.7}$$

Se $f^{(i+1)}(x)$ è definita per ogni $x \in I$ allora diciamo che f ammette ammette derivata $i+1$–esima (o derivata di ordine $i+1$) in I. Se $f^{(i)} \in C^0(I)$ scriviamo che $f \in C^i(I)$. Se questo succede per ogni $i \in \mathbb{N}$ scriviamo che $f \in C^\infty(I)$.

Esempio 9.34. *Ricordiamo la notazione di prodotto $\prod_{j=1}^n a_j := a_1 a_2 ... a_n$. Questo è definito per induzione con $\prod_{j=1}^1 a_j := a_1$ e con $\prod_{j=1}^{n+1} a_j := \prod_{j=1}^n a_j a_{n+1}$.*
Consideriamo ora la funzione $x^a : R_+ \to \mathbb{R}$. Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo

$$(x^a)^{(n)} = \prod_{j=1}^n (a-j+1) x^{a-n} \tag{9.8}$$

Dimostriamola per induzione su n. Per $n = 1$ si riduce a $(x^a)^{(1)} = \prod_{j=1}^1 (a-j+1)x^{a-1} = (a-1+1)x^{a-1} = ax^{a-1}$ che sappiamo essere vera. Supponiamo di averla dimostrata per n. Allora dalla definizione di derivata $n+1$–esima

$$\begin{aligned}
&(x^a)^{(n+1)} = ((x^a)^{(n)})' \text{ [alla definizione di derivata } n+1\text{–esima]}\\
&= (\prod_{j=1}^n (a-j+1) x^{a-n})' \text{ [dall'ipotesi che (10.10) è vera per } n]\\
&= \prod_{j=1}^n (a-j+1)(x^{a-n})' \text{ [dalla (8.7)]}\\
&= \prod_{j=1}^n (a-j+1)(a-n)x^{a-n-1} \text{ [dalla regola della potenza } (x^{a-n})'(a-n)x^{a-n-1}]
\end{aligned}$$

Infine osserviamo che

$$\prod_{j=1}^{n+1} (a-j+1) = \prod_{j=1}^n (a-j+1)(a-n).$$

Pertanto (10.10) resta dimostrata per n sostituito da $n+1$. Per il principio di induzione per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo (10.10).

Esempio 9.35. *Per $n \in \mathbb{N}$ abbiamo*

$$(x^n)^{(n)} = n!. \tag{9.9}$$

In effetti applicando (10.10) per $a = n$ otteniamo

$$(x^n)^{(n)} = \prod_{j=1}^n (n-j+1)x^{n-n} = (n-1+1)(n-2+1)\cdots(n-n+1) = n(n-1)\cdots 1 = n!.$$

Esempio 9.36. *Per $n, m \in \mathbb{N}$ abbiamo*

$$(x^m)^{(n)} = 0 \text{ se } n > m. \tag{9.10}$$

In effetti

$$(x^m)^{(n)} = ((x^m)^{(m)})^{(n-m)} = (m!)^{(n-m)}$$

perchè $m!$ è una costante e tutte le derivate di ordine positivo di una costante sono nulle.

Lemma 9.37. *Sia $n \in N$, I un intervallo aperto ed $x_0 \in I$. Valgono le seguenti proposizioni.*

1. *Se $f, g : I \to \mathbb{R}$ sono tali che $f^{(n)}(x_0)$ e $g^{(n)}(x_0)$ abbiamo*

$$(f + g)^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) + g^{(n)}(x_0).$$

2. *Se $c \in \mathbb{R}$ è una costante abbiamo $(cf)^{(n)}(x_0) = cf^{(n)}(x_0)$.*

3. *Se $n = l + j$ con $l, j \in \mathbb{Z}$ non negativi, abbiamo $f^{(n)}(x_0) = (f^{(i)})^{(j)}(x_0)$.*

Dimostrazione omessa.

Osservazione 9.38. Ci sono regole del prodotto e della catena per la derivata n–esima, ma non le trattiamo.

Esercizio 9.39. *Dimostrare che se $p(x)$ è un polinomio di grado m allora $(p)^{(n)} = 0$ per ogni $n > m$.*

Esempio 9.40. *Supponiamo che ci vengano assegnate le costanti $a_0, ..., a_n$. Allora il polinomio*

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} x^k \tag{9.11}$$

è l'unico polinomio di grado $\leq n$ tale che

$$p^{(m)}(0) = a_m \text{ per ogni } m = 0, ..., n. \tag{9.12}$$

Per prima cosa il polinomio p in (9.11) soddisfa (9.12). Per $0 \leq m \leq n$ abbiamo

$$p^{(m)}(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{a_k}{k!} \underbrace{(x^k)^{(m)}}_{0} + \frac{a_m}{m!} \underbrace{(x^m)^{(m)}}_{m!} + \sum_{k=m+1}^{2} \frac{a_k}{k!} (x^k)^{(m)}$$

dove $(x^m)^{(m)} = m!$ segue da (9.9), $(x^k)^{(m)}$ per $k < m$ segue da (9.10). Per $k > m$ abbiamo $(x^k)^{(m)} = \prod_{j=1}^{m} (k - j + 1) x^{k-m}$. Quando questo viene calcolato in $x = 0$ otteniamo 0. Pertanto

$$p^{(m)}(0) = a_m \text{ per ogni } m = 0, ..., n.$$

Un qualsiasi altro polinomio $p(x)$ di grado $\leq n$ è della forma

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k x^k$$

Ponendo $B_k = k! A_k$ lo posso sempre scrivere nella forma

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k} x^k.$$

Dal precedente conto sappiamo che $p^{(k)}(0) = B_k$ per ogni $k \leq n$. Ma se p deve soddisfare la condizione (9.12), allora abbiamo necessariamente $B_k = a_k$ per ogni $k \leq n$.

Esempio 9.41. *Più in generale, se vengano assegnate le costanti $a_0, ..., a_n$ allora il polinomio*

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} (x - x_0)^k \tag{9.13}$$

è l'unico polinomio di grado $\leq n$ tale che

$$p^{(m)}(x_0) = a_m \textit{ per ogni } m = 0, ..., n. \tag{9.14}$$

Esempio 9.42. *Abbiamo*

$$\begin{aligned}
(\sin(x))^{(0)} &= \sin(x) \\
(\sin(x))^{(1)} &= \cos(x) \\
(\sin(x))^{(2)} &= (\cos(x))^{(1)} = -\sin(x) \\
(\sin(x))^{(3)} &= (-\sin(x))^{(1)} = -\cos(x) \\
(\sin(x))^{(4)} &= (-\cos(x))^{(1)} = \sin(x).
\end{aligned}$$

Quindi in altre parole notiamo che $(\sin(x))^{(4)} = (\sin(x))^{(0)}$. Ci chiediamo ora cosa sia $(\sin(x))^{(n)}$ per $n \in \mathbb{N}$ generico. Dividiamo

$$n : 4 = q \textit{ con resto } r \textit{ dove } r \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Abbiamo $n = 4m + r$. Ora scriviamo

$$(\sin(x))^{(n)} = (\sin(x))^{(4m+r)} = \left((\cdots (\sin(x) \underbrace{)^{(4)} \cdots)^{(4)}}_{m \textit{ volte}} \right)^{(r)} = (\sin(x))^{(r)} = \begin{cases} \sin(x) \textit{ se } r = 0 \\ \cos(x) \textit{ se } r = 1 \\ -\sin(x) \textit{ se } r = 2 \\ -\cos(x) \textit{ se } r = 3 \end{cases}$$

Notare in particolare che $(\sin)^{(2n)}(0) = 0$ e che $(\sin)^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$.

Esempio 9.43. *In modo analogo per*

$$n : 4 = q \text{ con resto } r \text{ dove } r \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

abbiamo

$$(\cos(x))^{(n)} = (\cos(x))^{(r)} = \begin{cases} \cos(x) \text{ se } r = 0 \\ -\sin(x) \text{ se } r = 1 \\ -\cos(x) \text{ se } r = 2 \\ \sin(x) \text{ se } r = 3 \end{cases}$$

Notare in particolare che $(\cos)^{(2n)}(0) = (-1)^n$ *e che* $(\cos)^{(2n+1)}(0) = 0$.

Esercizio 9.44. *Dimostrare che* $(e^x)^{(n)} = e^x$ *per ogni* n.

Esempio 9.45. *Per* $n \geq 1$ *abbiamo* $(\log(1 + x))^{(n)} = (-1)^{n-1}(n - 1)!(1 + x)^{-n}$.
In effetti sappiamo che

$$\begin{aligned} &(\log(1 + x))^{(n)}\Big|_{n=1} = (1 + x)^{-1} \text{ e} \\ &(-1)^n(n - 1)!(1 + x)^{-n}\big|_{n=1} = (-1)^0 0!(1 + x)^{-1} = (1 + x)^{-1} \end{aligned}$$

Quindi l'uguaglianza è vera per $n = 1$. *Se per induzione assumiamo che la formula sia corretta per* n, *abbiamo*

$$\begin{aligned} &(\log(1 + x))^{(n+1)} = \left((\log(1 + x))^{(n)}\right)' = \left((-1)^{n-1}(n - 1)!(1 + x)^{-n}\right)' \\ &= (-1)^{n-1}(n - 1)! \left((1 + x)^{-n}\right)' = (-1)^{n-1}(n - 1)!(-n)(1 + x)^{-n-1} = (-1)^n n!(1 + x)^{-n-1}. \end{aligned}$$

Notare in particolare che $(\log(1 + x))^{(n)}(0) = (-1)^n(n - 1)!$.

Osservazione 9.46. C'è una nozione di derivata n–esima destra $f_d^{(n)}(x_0)$ e di derivata n–esima sinistra $f_s^{(n)}(x_0)$ analoga a quella del caso $n = 1$ e come nel caso $n = 1$ risulta che $f^{(n)}(x_0)$ esiste se e solo se $f_d^{(n)}(x_0)$ e $f_s^{(n)}(x_0)$ esistono e sono uguali.

Svariati esercizi di esame sono collegati alla seguente situazione.

Esempio 9.47. *Supponiamo di avere due funzioni* $f, g \in C^n(a, b)$ *e che* $x_0 \in (a, b)$. *Consideriamo la funzione*

$$F(x) = \begin{cases} g(x) \text{ se } x > x_0 \\ f(x) \text{ se } x \leq x_0. \end{cases} \tag{9.15}$$

ottenuta "incollando" f *e* g *nel punto* x_0. *Vogliamo dimostrare che*

$$F \in C^n(a, b) \text{ se e solo se } f^{(l)}(x_0) = g^{(l)}(x_0) \text{ per ogni } l \leq n. \tag{9.16}$$

Va osservato che l'esercizio consiste solo nel dimostrare la continuità di F *e l'esistenza e la continuità delle sue derivate nel punto* x_0. *Questo perchè nell'intervallo* (a, x_0) *abbiamo* $F = f \in C^n(a, x_0)$ *e nell'intervallo* (x_0, b) *abbiamo* $F = g \in C^n(x_0, b)$.

Si procede per induzione. Comiciano con $\boxed{n=0}$. *Allora* $f \in C^0(a,b)$ *implica*

$$F(x_0^-) := \lim_{x\to x_0^-} F(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0) = F(x_0)$$

e $g \in C^0(a,b)$ *implica*

$$F(x_0^+) := \lim_{x\to x_0^+} F(x) = \lim_{x\to x_0^+} g(x) = g(x_0).$$

Pertanto, $F \in C^0(a,b) \Leftrightarrow F(x_0^-) = F(x_0^-) = F(x_0) \Leftrightarrow f(x_0) = g(x_0)$.
Consideriamo ora il caso $\boxed{n=1}$. *Siccome il caso* $n=0$ *è già stato dimostrato, utilizziamo* $F \in C^0(a,b)$ *e* $f(x_0) = g(x_0)$. *Abbiamo*

$$F'_s(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \overset{Hopital}{=} \lim_{x\to x_0^-} f'(x) \overset{f\in C^1(a,b)}{=} f'(x_0). \tag{9.17}$$

In modo analogo

$$F'_d(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} \overset{F(x_0)=g(x_0)}{=} \lim_{x\to x_0^+} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \overset{Hopital}{=} \lim_{x\to x_0^+} g'(x) \overset{g\in C^1(a,b)}{=} g'(x_0). \tag{9.18}$$

Abbiamo quindi dimostrato che quando $g(x_0) = f(x_0)$ *allora* $F'_s(x_0)$ *e* $F'_d(x_0)$ *esistono. Inoltre* $F'_s(x_0) = f'(x_0)$ *e* $F'_d(x_0) = g'(x_0)$. *Ma a questo punto abbiamo dimostrato*

$$F'(x_0) \text{ esiste } \Leftrightarrow F'_s(x_0) = F'_d(x_0) \Leftrightarrow f'(x_0) = g'(x_0). \tag{9.19}$$

Per completare la dimostrazione di (9.16) *per* $n=1$ *dobbiamo dimostrare che* $f(x_0) = g(x_0)$ *e* $f'(x_0) = g'(x_0)$ *implicano non solo* $F \in C^0(a,b)$ *(già dimostrato prima al passo* $n=0$*) e l'esistenza di* $F'(x_0)$ *ma anche che* F' *è continua in* x_0. *In realtà questo segue automaticamente dal fatto che usando l'Hopital abbiamo visto sopra che* $\lim_{x\to x_0^-} F'(x) = \lim_{x\to x_0^-} f'(x) = F'_s(x_0) = F'(x_0)$ *e* $\lim_{x\to x_0^+} F'(x) = \lim_{x\to x_0^+} g'(x) = F'_d(x_0) = F'(x_0)$ *e cioè* $\lim_{x\to x_0} F'(x) = F'(x_0)$.
Supponiamo di avere dimostrato (9.16) *per* n *e che* $f, g \in C^{n+1}(a,b)$ *e dimostriamo* (9.16) *per* $n+1$. *Per l'ipotesi induttiva risulta che* $F^{(n)} \in C^0(a,b)$. *Inoltre*

$$F^{(n)}(x) = \begin{cases} g^{(n)}(x) \ \text{se } x \geq x_0 \\ f^{(n)}(x) \ \text{se } x \leq x_0 \end{cases}$$

dove qui utilizziamo $f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0)$. *Grazie al passaggio* $n=1$ *abbiamo*

$$F^{(n)} \in C^1(a,b) \Leftrightarrow (f^{(n)})'(x_0) = (g^{(n)})'(x_0).$$

Ma $F^{(n)} \in C^1(a,b) \Leftrightarrow F \in C^{n+1}(a,b)$ *e* $(f^{(n)})'(x_0) = (g^{(n)})'(x_0) \Leftrightarrow f^{(n+1)}(x_0) = g^{(n+1)}(x_0)$.
Pertanto abbiamo dimostrato

$$F^{(n)} \in C^{n+1}(a,b) \Leftrightarrow f^{(n+1)}(x_0) = g^{(n+1)}(x_0)$$

(dove qui si assume implicitamente che $f^{(l)}(x_0) = g^{(l)}(x_0)$ per ogni $l \leq n$). Pertanto abbiamo dimostrato che (9.16) *per n implica* (9.16) *per $n+1$ e pertanto* (9.16) *è vera per ogni n.*

Analizziamo il seguente esercizio, preso dall'esame del 8 giugno 2015. Per $p(x)$ un polionomio si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} p(x) + \sin(x) + e^x - 1 \text{ se } x > 0 \\ 1 - \cos(x) \text{ se } x \leq 0 \end{cases}$$

La prima domanda è la seguente:

1) *Si determini il $p(x)$ di grado minimo per il quale si ha $f \in C^2(\mathbb{R})$.*

Per l'esempio 9.47 $f \in C^2(\mathbb{R})$ se e solo se per $n = 0, 1, 2$

$$(p(x) + \sin(x) + e^x - 1)^{(n)}(0) = (1 - \cos(x))^{(n)}(0) \text{ per ogni } n \leq 2. \tag{9.20}$$

Per $n = 0$ abbiamo $p(0) + \sin(0) + e^0 - 1 = p(0)$ e $1 - \cos(0) = 0$ cioè $p(0) = 0$.

Per $n = 1$ abbiamo $p^{(1)}(0) + \cos(0) + e^0 = p^{(1)}(0) + 2$ e $\sin(0) = 0$ cioè $p^{(1)}(0) = -2$.

Per $n = 2$ abbiamo $p^{(2)}(0) - \sin(0) + e^0 = p^{(2)}(0) + 1$ e $\cos(0) = 1$ cioè $p^{(2)}(0) = 0$.

Da (9.11) segue che il polinomio $p(x) = -2x$ soddisfa le proprietà ed è il polinomio cercato.

La seconda domanda è la seguente:

2) *Si determini il $p(x)$ di grado minimo per il quale si ha $f \in C^{10}(\mathbb{R})$.*

Questa volta la condizione è (9.20) per tutti gli $n \leq 10$. Siccome se $f \in C^{10}(\mathbb{R})$ a maggior ragione si ha $f \in C^2(\mathbb{R})$, per quanto abbiamo visto sopra segue che si deve avere $p(0) = 0$, $p^{(1)}(0) = -2$, $p^{(2)}(0) = 0$. Vediamo le condizioni da imporre sulle derivate $p^{(n)}(0)$ per $3 \leq n \leq 10$.

Per $n = 2m + 1$ dispari abbiamo

$$p^{(2m+1)}(0) + \cos^{(2m)}(0) + 1 = p^{(2m+1)}(0) + (-1)^m + 1 = 0$$

il che ci da

$$p^{(2m+1)}(0) = -1 - (-1)^m = \begin{cases} -2 \text{ per } m = 0 \\ 0 \text{ per } m = 1 \\ -2 \text{ per } m = 2 \\ 0 \text{ per } m = 3 \\ -2 \text{ per } m = 4 \end{cases}$$

mentre per $n = 2m$ pari abbiamo

$$p^{(2m)}(0) + \sin^{(2m)}(0) + 1 = p^{(2m)}(0) + 1 = -\cos^{(2m)}(0) = -(-1)^m$$

il che ci da per $m \geq 2$

$$p^{(2m)}(0) = -1 - (-1)^m = \begin{cases} -2 \text{ per } m = 2 \\ 0 \text{ per } m = 3 \\ -2 \text{ per } m = 4 \\ 0 \text{ per } m = 5 \end{cases}$$

Il polinomio cercato esiste, ha grado 9 ed è dato da

$$p(x) = \sum_{k=0}^{9} \frac{p^{(k)}(0)}{k!} x^k,$$

vedere sopra l'esempio 9.40.

Infine l'ultima domanda è la seguente.

3) *Si stabilisca se esiste un polinomio $p(x)$ per il quale si ha $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.*

Questo non è possibile perchè richiederebbe che (9.20) fosse vera per ogni n. Per n maggiore del grado di p avremmo

$$\sin^{(n)}(0) + 1 = -\cos^{(n)}(0).$$

Che questo non è possibile lo vediamo ad esempio con $n = 4m$ per il quale avremmo

$$\sin^{(4m)}(0) + 1 = -\cos^{(4m)}(0)$$

dove $\sin^{(4m)}(0) = 0$ e $\cos^{(4m)}(0) = 1$. Cioè avremmo $1 = -1$. Impossibile. □

10 Polinomi di Taylor

Definizione 10.1 (Polinomi di Taylor)**.** Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in (a, b)$. Supponiamo che f ammetta derivate fino all'ordine n in x_0. Allora il polinomio di Taylor di ordine n in x_0 è il polinomio

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \tag{10.1}$$

Per $x_0 = 0$ si parla anche di polinomio di McLaurin, che è dato da

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \tag{10.2}$$

Esercizio 10.2. *Dimostrare che il polinomio* (10.1) *è l'unico polinomio di grado $\leq n$ tale che $p_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ per ogni $k = 0, ..., n$.*

Esempio 10.3. *I polinomi di McLaurin di e^x sono dati da*

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}. \tag{10.3}$$

Basta osservare che per $f(x) = e^x$ abbiamo $f^{(k)}(0) = 1$ per ogni k e poi inserire in (10.2) *ottenendo così* (10.3)*.*

Esempio 10.4. *I polinomi di McLaurin di* $\sin(x)$ *sono dati da*

$$p_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \tag{10.4}$$

Basta osservare che $\sin^{(m)}(0) = \begin{cases} 0 \text{ se } m \text{ è pari} \\ (-1)^k \text{ se } m = 2k+1 \end{cases}$ *ottenendo così* (10.4).

Esercizio 10.5. *Qual'è il polinomio di Maclaurin* p_{100} *di ordine 100 di* $\sin(x)$*?*

Esempio 10.6. *I polinomi di McLaurin di* $\cos(x)$ *sono dati da*

$$p_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}. \tag{10.5}$$

Basta osservare che $\cos^{(m)}(0) = \begin{cases} 0 \text{ se } m \text{ è dispari} \\ (-1)^k \text{ se } m = 2k \end{cases}$ *ottenendo così* (10.5).

Esercizio 10.7. *Qual'è il polinomio di Maclaurin* p_{97} *di ordine 97 di* $\cos(x)$*?*

Definizione 10.8. Per $a \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ poniamo

$$\binom{a}{k} = \begin{cases} 1 \text{ se } k = 0 \\ a \text{ se } k = 1 \\ \frac{a \ldots (a-k+1)}{k!} \text{ se } k \geq 2. \end{cases} \tag{10.6}$$

Equivalentemente possiamo scrivere

$$\binom{a}{k} = \begin{cases} 1 \text{ se } k = 0 \\ \frac{\prod_{j=1}^{k}(a-j+1)}{k!} \text{ se } k \geq 1. \end{cases} \tag{10.7}$$

Questa definizione generalizza la formula (1.3).

Esercizio 10.9. *Calcolare* $\binom{0}{k}$, $\binom{1}{k}$ *e* $\binom{2}{k}$ *per ogni* $k \in \mathbb{N}$.

Esercizio 10.10. *Verificare che se* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *e* $k > n$ *allora* $\binom{n}{k} = 0$.

Esercizio 10.11. *Sia* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *una funzione e sia* $x_0 \in \mathbb{R}$. *Dimostrare che* $f \in C^n(a,b)$ *se e solo se la funzione* $f(x - x_0)$ *è in* $f \in C^n(a + x_0, b + x_0)$. *Inoltre* $(f(x - x_0))^{(k)}(x) = f^{(k)}(x - x_0)$ *per ogni* $k \leq n$.

Esempio 10.12. *Ricordiamoci che* $x^a \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$. *Questo, si veda l'esercizio precedente, è equivalente a* $(1+x)^a \in C^\infty(-1,+\infty)$. *Allora risulta che i suoi polinomi di McLaurin sono dati da*

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k} x^k. \tag{10.8}$$

In effetti, per definizione di polinomio di McLaurin

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{((1+x)^a)^{(k)}(0)}{k!} x^k. \tag{10.9}$$

D'altra parte, dalla formula (10.10) *abbiamo per* $k \geq 1$

$$((1+x)^a)^{(k)} = \prod_{j=1}^{k} (a-j+1)(1+x)^{a-k} \Rightarrow ((1+x)^a)^{(k)}(0) = \prod_{j=1}^{k} (a-j+1). \tag{10.10}$$

Pertanto, inserendo in (10.11) *otteniamo*

$$p_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\prod_{j=1}^{k}(a-j+1)}{k!} x^k \overset{da\ (10.7)}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k} x^k. \tag{10.11}$$

Esempio 10.13. *Consideriamo il polinomio di McLaurin di ordine* n *della funzione* $f(x) = (1+x)^n$. *Dalla formula* (10.8) *esso è*

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k. \tag{10.12}$$

D'altra parte, dall'esercizio 10.2 sappiamo che $p_n(x)$ *è l'unico polinomio di grado* $\leq n$ *tale che* $p_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ *per ogni* $k = 0, ..., n$. *Ma* $f(x) = (1+x)^n$ *è un polinomio di grado* n *tale che le uguaglianze sono soddisfatte. Quindi* $p_n = f$. *Ma allora abbiamo ridimostrato la formula di Newton*

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

10.1 Formula di Lagrange

Data una funzione $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ ed un punto $x_0 \in (a,b)$ vorremmo approssimare vicino ad x_0 la funzione $f(x)$ con uno dei suoi polinomi di Taylor. Questo però comporta che si ha un errore che vorremmo controllare in qualche modo. Ci sono molti modi per valutare l'errore. Il seguente teorema è una generalizzazione del Teorema 9.8.

Teorema 10.14 (Formula di Lagrange). *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in (a, b)$. Supponiamo che $f^{(n+1)}(x)$ (e quindi anche $f^{(k)}(x)$ per ogni $k \leq n$) esista per ogni $x \in (a, b)$ e consideriamo il polinomio di Taylor di ordine n di f in x_0, dato dalla formula* (10.1). *Allora risulta che*

$$f(x) = p_n(x) + R_n(x) \text{ per ogni } x \in (a, b) \tag{10.13}$$

dove per il resto $R_n(x_0) = 0$ e se $x \neq x_0$ abbiamo la seguente formula (di Lagrange)

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_{n,x})}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \tag{10.14}$$

per un qualche punto $\xi_{n,x}$ contenuto nell'intervallo aperto di estremi i punti x e x_0.

Omettiamo la dimostrazione

Osservazione 10.15. Il caso particolare $n = 0$ si riduce al teorema 9.8. In quel caso $p_0(x) = f(x_0)$ e la formula (10.13) si riduce a $f(x) - f(x_0) = f'(\xi_{n,x})(x - x_0)$ dove nel caso ad esempio $x_0 < x$, il $\xi_{n,x}$ non è nient'altro che il c di teorema 9.8 mentre $x_0 = a$ e $x = b$.

Dimostreremo fra poco che il numero di Neper e è irrazionale.

Esempio 10.16. *Approssimare e con un numero razionale facendo un errore $< 10^{-3}$. Se consideriamo la formula di McLaurin di e^x in* (10.3) *osserviamo che per ogni n*

$$p_n(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \in \mathbb{Q}.$$

Quindi sembra ragionevole approssimare il numero di Neper e con $p_n(1)$. Abbiamo $e = p_n(1) + R_n(1)$ dove possiamo stimare l'errore $R_n(1)$ dove

$$R_n(1) = \frac{e^{\xi_n}}{(n+1)!} \text{ dove } \xi_n \in (0, 1)$$

Abbiamo $0 < e^{\xi_n} < e < 3$. Quindi l'errore è maggiorato da

$$0 < R_n(1) < \frac{3}{(n+1)!}$$

e per trovare un n adeguato (lo si vuole non troppo grande) basta richiedere che sia tale che $\frac{3}{(n+1)!} < 10^{-3} \Leftrightarrow (n+1)! > 3000$. Ora, andando per tentativi, abbiamo

$$(n+1)! = \begin{cases} 2 < 3000 \text{ se } n = 1 \\ 6 < 3000 \text{ se } n = 2 \\ 24 < 3000 \text{ se } n = 3 \\ 120 < 3000 \text{ se } n = 4 \\ 720 < 3000 \text{ se } n = 5 \\ \boxed{5040 > 3000} \text{ se } n = 6 \end{cases}$$

Quindi se approssimiamo il numero di Neper e con $p_6(1)$ commettiamo un errore $< 10^{-3}$.

Esercizio 10.17. *Dimostrare che per ogni* $x \in \mathbb{R}$ *si ha* $e^x = \lim_{n\to+\infty} p_n(x)$ *dove* $p_n(x)$ *sono i polinomi di McLaurin di* e^x.

Esercizio 10.18. *Dimostrare che per ogni* $x \in \mathbb{R}$ *si ha* $\sin(x) = \lim_{n\to+\infty} p_n(x)$ *dove* $p_n(x)$ *sono i polinomi di McLaurin di* $\sin(x)$.

Esercizio 10.19. *Dimostrare che per ogni* $x \in \mathbb{R}$ *si ha* $\cos(x) = \lim_{n\to+\infty} p_n(x)$ *dove* $p_n(x)$ *sono i polinomi di McLaurin di* $\cos(x)$.

Esempio 10.20. *Dimostriamo ora che* $e \notin \mathbb{Q}$. *Supponiamo per assurdo che* $e = \frac{a}{b}$ *con* $a, b \in \mathbb{N}$ *e per un* $n \in \mathbb{N}$ *consideriamo*

$$e = p_n(1) + R_n(1) = p_n(1) + \frac{e^{\xi_n}}{(n+1)!}.$$

Dalla formula osserviamo che

$$p_n(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \Rightarrow n!p_n(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} \in \mathbb{N}$$

poichè $\frac{n!}{0!} = n!$ *e per* $k \geq 1$

$$\frac{n!}{k!} = n(n-1)...(k+1) \in \mathbb{N}.$$

Scegliamo ora $n \geq b$. *Allora* $n!e = n!\frac{a}{b} \in \mathbb{N}$. *Pertanto, avendo sulla destra una differenza di numeri naturali,*

$$n!R_n(1) = n!e - n!p_n(1) \in \mathbb{Z}.$$

Inoltre, siccome $n!R_n(1) > 0$ *segue che* $n!R_n(1) \in \mathbb{N}$. *In particolare questo implica che* $n!R_n(1) \geq 1$. *Abbiamo pertanto*

$$1 \leq n!\frac{e^{\xi_n}}{(n+1)!} \leq 3\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{3}{n+1} < 1 \text{ per } n \geq \max\{3, b\}.$$

Assurdo.

10.2 o Piccolo

Definizione 10.21. Sia $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$. Scriveremo che $f = o(1)$ in x_0. Qui $x \in \overline{R}$.

Definizione 10.22. Supponiamo di avere $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in X$ un punto di accumulazione per X (oppure sia $x_0 \in \{-\infty, +\infty\}$ e $X \subseteq \mathbb{R}$ abbia x_0 come estremo inferiore o superiore), $g : X \to \mathbb{R}$ con $g(x) \neq 0$ per $x \neq x_0$, e una funzione $f : X \backslash \{x_0\} \to \mathbb{R}$. Allora scriviamo che

$$f(x) = o(g(x)) \text{ se } \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \tag{10.15}$$

Esempio 10.23. *A* $+\infty$ *abbiamo* $1 - \tanh(x) = o(x^{-n})$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$. *In effetti abbiamo*

$$1 - \tanh(x) = 1 - \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\cancel{e^x} + e^{-x} - (\cancel{e^x} - e^{-x})}{e^x + e^{-x}} = \frac{2e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 2e^{-2x}\frac{1}{1 + e^{-2x}}.$$

Si noti che $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+e^{-2x}} = 1$ *e quindi possiamo porre* $\frac{1}{1+e^{-2x}} = 1 + o(1)$. *Pertanto*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1 - \tanh(x)}{x^{-n}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^{-2x}(1 + o(1))}{x^{-n}} = 2 \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-2x}}{x^{-n}} = 2 \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^{2x}} = 0.$$

Pertanto $1 - \tanh(x) = o(x^{-n})$.

10.3 O Grande

Definizione 10.24. Supponiamo di avere $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in X$ (oppure sia $x_0 \in \{-\infty, +\infty\}$ e $X \subseteq \mathbb{R}$ abbia x_0 come estremo inferiore o superiore). Siano $f, g : X\backslash\{x_0\} \to \mathbb{R}$ due funzioni. Allora scriviamo che

$$\begin{aligned}&f(x) = O(g(x)) \text{ se esistono un intorno } U \text{ di } x_0 \text{ ed una costante } C > 0 \text{ t.c.}\\ &\text{per ogni } x \in U \cap X \text{ si ha } |f(x)| \le C|g(x)|.\end{aligned} \tag{10.16}$$

Ad esempio $\sin(x) = O(1)$ visto che $|\sin(x)| \le 1$ per ogni x. Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ limitata in $\mathbb{R}$, cioè t.c. $\exists\, C > 0$ t.c. $|f(x)| \le C$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ è tale che $f(x) = O(1)$.

10.4 Formula di Peano per resto

Esiste un'altra formula del resto oltre alla formula di Lagrange del teorema 10.14

Teorema 10.25 (Formula di Peano)**.** *Sia* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *e sia* $x_0 \in (a, b)$. *Supponiamo che* $f^{(k)}(x)$ *per* $k < n$ *esista per ogni* $x \in (a, b)$ *e che* $f^{(n)}(x_0)$ *sia definita (per* $n = 0$ *assumiamo* f *continua in* x_0*). Si consideri il polinomio di Taylor* $p_n(x)$ *dato dalla formula* (10.1) *e l'espansione*

$$f(x) = p_n(x) + R_n(x) \text{ per ogni } x \in (a, b).$$

Allora abbiamo

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0 \tag{10.17}$$

che viene espresso scrivendo $R_n(x) = o((x - x_0)^n))$.

Omettiamo la dimostrazione

Osservazione 10.26. Ad esempio nel caso $n = 1$, dove $p_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, la formula (10.17) segue da

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_1(x)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)\right] = 0$$

In termini di stime di errori, la formula $R_n(x) = o((x-x_0)^n))$ è inutile. Tuttavia a noi la formula di Peano $R_n(x) = o((x-x_0)^n))$ sarà utile per generare polinomi di Taylor con "poco sforzo".

Lemma 10.27. *Sia $p(x)$ un polinomio di grado n, sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e supponiamo che $p(x) = o((x-x_0)^n)$. Allora $p = 0$.*

Dim. Dall'esempio 9.41 sappiamo che

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Per ipotesi

$$\lim_{x\to x_0} \frac{p(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

Se la tesi è falsa esiste un $k_0 \in \{0,...,n\}$ tale che $p^{(l)}(x_0) = 0$ per $l < k$ e $p^{(k_0)}(x_0) \neq 0$ Allora

$$p(x) = \sum_{k=k_0}^{n} \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

e

$$0 = \lim_{x\to x_0} \frac{p(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{p^{(k_0)}(x_0)}{k_0!}\frac{(x-x_0)^{k_0}}{(x-x_0)^n}\left[1 + \sum_{k=k_0+1}^{n} \frac{\frac{p^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}{\frac{p^{(k)}((k_0))}{k_0!}(x-x_0)^{k_0}}\right]$$

$$= \frac{p^{(k_0)}(x_0)}{k_0!}\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^{n-k_0}[1+o(1)] = \frac{p^{(k_0)}(x_0)}{k_0!}\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^{n-k_0}.$$

Se $k_0 = n$ il limite a destra è $\frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}$. Il che significa che $p^{(n)}(x_0) = 0$, mentre per ipotesi $p^{(n)}(x_0) \neq 0$. Se invece $k_0 < n$ il limite a destra non esiste. D'altra parte, l'ipotesi che $p^{(k_0)}(x_0) \neq 0$ implica invece che esiste ed è uguale a 0, assurdo. Pertanto concludiamo che $p^{(k)}(x_0) = 0$ per ogni k e che $p(x)$ è il polinomio costante di valore 0. $\square$

Corollario 10.28. *Sia f che soddisfa le ipotesi del Teorema di Peano e sia $p(x)$ un polinomio di grado $\leq n$ tale che $f(x) = p(x) + o((x-x_0)^n)$. Allora $p(x)$ è il polinomio di Taylor di ordine n di f in x_0.*

Dim. Sia $p_n(x)$ il polinomio di Taylor di ordine n di f in x_0. Dal teorema di Peano segue $f(x) = p_n(x) + o((x-x_0)^n)$. Per ipotesi $f(x) = p(x) + o((x-x_0)^n)$. Confrontando le due formula segue $p_n(x) - p(x) = o((x-x_0)^n)$ (si noti che questo o piccolo è la differenza degli altri due o piccoli: stiamo usando la notazione o piccolo per funzioni distinte). La funzione $p_n(x) - p(x)$ è un polinomio di grado $\leq n$ che soddisfa le ipotesi del precedente lemma. Segue allora che $p_n(x) - p(x) = 0$ per ogni x, cioè $p = p_n$. $\square$

Il precedente corollario ha grossa rilevanza pratica.

Esempio 10.29. *Trovare tutti i polinomi di McLaurin di* $x^2\sin(x^3)$*. Si parte dalla formula* (10.4) *che unitamente alla formula di Peano ci dice che*

$$\sin(y) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(y^{2n+1}),$$

Sostituiamo $y = x^3$ *ottenendo*

$$\sin(x^3) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{3(2k+1)}}{(2k+1)!} + o(x^{3(2n+1)}),$$

Infine moltiplicando per x^2 *otteniamo*

$$x^2\sin(x^3) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{3(2k+1)+2}}{(2k+1)!} + x^2 o(x^{3(2n+1)}),$$

La sommatoria è un polinomio di grado $3(2n+1)+2$*. D'altra parte*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^2} o(x^{3(2n+1)})}{x^{3(2n+1)+\cancel{2}}} = \lim_{x\to 0}\frac{o(x^{3(2n+1)})}{x^{3(2n+1)}} = 0$$

per la definizione di o piccolo. Ma allora $x^2 o(x^{3(2n+1)}) = o(x^{3(2n+1)+2})$ *e la sommatoria ci da il polinomio di McLaurin di di ordine* $3(2n+1)+2 = 6n+5$*. Questo esaurisce la riceca dei polinomi. Infatti da questa formula per* $n = 0$ *vediamo che*

$$x^2\sin(x^3) = x^5 + o(x^5).$$

I termini sulla destra sono sia $o(1)$*, che* $o(x)$*, che* $o(x^2)$*, che* $o(x^3)$*, che* $o(x^4)$*. In altra parole anche* $x^2\sin(x^3)$ *soddisfa questa proprietà. Il che vuole dire* $p_0 = p_1 = p_2 = p_2 = p_4 = 0$ *perchè ad esempio*

$$x^2\sin(x^3) = o(x^4) = 0 + o(x^4) \overset{\textit{corollario 10.28}}{\Rightarrow} p_4 = 0.$$

In modo simile si dimostra che per $6n+5 \leq N < 6(n+1)+5$ *si ha* $p_N = p_{6n+5}$*.*

Esempio 10.30. *Sia* $f(x) = x^2\sin(x^3)$*. Per ogni* $l \in \mathbb{N}$ *calcolare* $f^{(l)}(0)$*. Si parte da*

$$p_{6n+5}(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{6k+5} = \sum_{l=0}^{6n+5}\frac{f^{(l)}(0)}{l!}x^l.$$

Comparando i coefficienti dei polinomi, osserviamo che se $l \neq 6k+5$ *per ogni* $k \leq n$ *allora* $f^{(l)}(0) = 0$*. Se invece* $l = 6k+5$ *per un qualche* $k \leq n$ *allora* $\dfrac{f^{(6k+5)}(0)}{(6k+5)!} = \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!}$ *da cui ricaviamo* $f^{(6k+5)}(0) = \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!}(6k+5)!$*.*

Esercizio 10.31. *Dimostrare l'ultima asserzione del precedente esempio.*

Esempio 10.32. *Verificare che i polinomi di McLaurin $p_n(x)$ di $f(x) = \frac{1}{1-x}$ sono dati da*

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} x^j. \tag{10.18}$$

In effetti sappiamo dal teorema 1.5 che

$$\sum_{j=0}^{x} x^j = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Ma ovviamente $\frac{x^{n+1}}{1-x} = o(x^n)$, visto che $\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^{\cancel{n}+1}}{1-x}}{\cancel{x^n}} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{1-x} = 0$. Ma allora concludiamo

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{j=0}^{n} x^j + o(x^n) \tag{10.19}$$

e quindi dal corollario 10.28 si ottiene (10.18).

Verificare che i polinomi di McLaurin $p_n(x)$ di $f(x) = \frac{1}{1+x}$ sono dati da

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j x^j. \tag{10.20}$$

In effetti, partendo da (10.19) *e sostituido x con $-x$ otteniamo*

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j x^j + o((-1)^n x^n) \tag{10.21}$$

Ma $\lim_{x\to 0} \dfrac{o((-1)^n x^n)}{x^n} = (-1)^n \lim_{x\to 0} \dfrac{o((-1)^n x^n)}{(-1)^n x^n} = 0$ e pertanto $o((-1)^n x^n) = o(x^n)$. Dal corollario 10.28 e da (10.21) *si conclude quindi* (10.20).

Esempio 10.33. *Calcolare tutte le derivate $f^{(l)}(0)$ per $f(x) = \frac{x^3}{1-x^3}$. Abbiamo*

$$p_{3n+3}(x) = \sum_{j=0}^{n} x^{3j+3} = \sum_{l=0}^{3n+3} \frac{f^{(l)}(0)}{l!} x^l.$$

Se $l \neq 3(k+1)$ per ogni $k \leq n$ allora $f^{(l)}(0) = 0$. Per $k \leq n$, $f^{(3(k+1))}(0) = (3(k+1))!$.

Esempio 10.34. *Dall'esame del 13 gennaio 2014. Calcolare* $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{1+2x^a}-1-x^2}{\log(1+x+x^2)-x}$ *al variare di* $a \in \mathbb{R}_+$.

Per prima cosa osserviamo che è un limite $\frac{0}{0}$. *L'uso della regola dell'Hopital sembra poco promettente perchè le derivarte sono funzioni relativamente complicate. Un modo possibile di risolvere il problema consiste nell'esprimere numeratore nella forma* $A_1 x^{A_2}(1+o(1)$ *e denominatore nella forma* $B_1 x^{B_2}(1+o(1)$, *per* $A_2 > 0$, $B_2 > 0$, $A_1 \neq 0$ *e* $B_1 \neq 0$ *da determinarsi. Allora il precedente limite si riduce a* $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{A_1}{B_1} x^{A_2-B_2}$.

Per realizzare il nostro programma ricordiamo da esempio 9.45 che

$$\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2).$$

Pertanto

$$\log(1+x+x^2) = (1+x+x^2) - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \Rightarrow \log(1+x+x^2) - x = \frac{x^2}{2} + o(x^2) = \frac{x^2}{2}(1+o(1)).$$

E quindi abbiamo ottenuto la formula desiderata per il denominatore. Ora ricordiamoci da (10.8) *che*

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{y}{2} + \binom{\frac{1}{2}}{2} y^2 + o(y^2) \text{ dove } \binom{\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2} = -\frac{1}{8}.$$

Pertanto

$$\sqrt{1+2x^a} = 1 + x^a - \frac{1}{2}x^{2a} + o(x^{2a}).$$

Quindi

$$\sqrt{1+2x^a} - 1 - x^2 = x^a - \frac{1}{2}x^{2a} - x^2 + o(x^{2a}).$$

In conclusione

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+2x^a}-1-x^2}{\log(1+x+x^2)-x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^a - \frac{1}{2}x^{2a} - x^2 + o(x^{2a})}{\frac{x^2}{2}} = \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} 2x^{a-2} = +\infty \text{ se } a < 2 \\ \lim_{x\to 0^+} -x^2 = 0 \text{ se } a = 2 \\ \lim_{x\to 0^+} -2 = -2 \text{ se } a > 2. \end{cases}$$

11 Funzioni convesse

Un insieme D del piano (o della retta, o dello spazio, o di un qualsiasi spazio Euclideo di qualsiasi dimensione) è *convesso* se presi due qualsiasi suoi punti $P_1, P_2 \in D$ risulta che il segmento di estremi $P_1 \,\&\, P_2$ è contenuto in$D$. Una funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$ definita su un intervallo I si dice convessa se e' convesso

$$D = \{(x,y)\colon x \in I,\, y \geq f(x)\}$$

ossia l'insieme che sta sopra il grafico. L'esempio più classico di funzione convessa è $f(x) = x^2$. Infatti essa è strettamente convessa, nel senso che $D = \{(x, y) \colon x \in I,\, y \geq f(x)\}$ è strettamente convesso (un insieme si dice strettamente convessa se presi due qualsiasi suoi punti $P_1, P_2 \in D$ risulta che il segmento di estremi $P_1 \,\&\, P_2$ è contenuto in D e che, a parte eventalmente gli estremi, il segmento è contenuto nell'*interno* di D). La condizione di convessità si può caratterizzare in termini della funzione $f(x)$ mediante il seguente lemma.

Lemma 11.1. *Data $f \colon I \to \mathbb{R}$ definita su un intervallo I, $f(x)$ è convessa se e solo se abbiamo*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \text{ per ogni coppia } x, y \in I \text{ e per ogni } t \in [0,1]. \quad (11.1)$$

La dimostrazione è omessa.
Prenderemo (11.1) direttamente come definizione di funzione convessa.

Esercizio 11.2. *Premesso che dati $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ e $t_1, ..., t_n \in [0,1]$ tali che $t_1 + ... + t_n = 1$ scriviamo che la seguente è una combinazione lineare convessa degli $x_1, ..., x_n$:*

$$\sum_{j=1}^{n} t_j x_j.$$

Fatta questa premessa, per $f \colon I \to \mathbb{R}$ definita su un intervallo I e si dimostri quanto segue:

1. *ogni combinazione lineare convessa di punti $x_1, ..., x_n \in I$ è contenuta in I;*
2. *f è convessa se e solo se*

$$f\left(\sum_{j=1}^{n} t_j x_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} t_j f(x_j) \quad (11.2)$$

per ogni scelta di punti $x_1, ..., x_n \in I$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni loro combinazione lineare convessa.

Risposta all'esercizio. Qui mi limito a dimostrare che (11.1) implica (11.2) assumendo per dimostrato tutto il resto. La (11.2) può essere assunta per $n = 2$. Infatti (11.2) per $n = 2$ è semplicemente un modo un po' diverso di scrivere (11.1). Supponiamo che (11.2) sia vera per un $n \geq 2$. Vogliamo dimostrare

$$f\left(\sum_{j=1}^{n+1} t_j x_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n+1} t_j f(x_j). \quad (11.3)$$

Posto $t = t_{n+1}$ risulta $t \in [0,1]$ e $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} t_j = 1 - t$. Se $t = 1$ non c'è alcunchè da dimostrare. Quindi assume $t < 1$. Allora risulta che

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{t_j}{1-t} = 1 \text{ con } \frac{t_j}{1-t} \geq 0 \text{ per ogni } 1 \leq j \leq n.$$

Ora scrivo

$$\sum_{j=1}^{n+1} t_j x_j = \sum_{j=1}^{n} t_j x_j + t x_{n+1} = (1-t) \sum_{j=1}^{n} \frac{t_j}{1-t} x_j + t x_{n+1}.$$

Siccome f è convessa

$$f\left((1-t)\sum_{j=1}^{n} \frac{t_j}{1-t} x_j + t x_{n+1}\right) \leq (1-t) f\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{t_j}{1-t} x_j + t x_{n+1}\right) + t f(x_{n+1}).$$

Siccome (11.2) è vera per il valore n ho

$$f\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{t_j}{1-t} x_j + t x_{n+1}\right) \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{t_j}{1-t} f(x_j).$$

Pertanto

$$(1-t) f\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{t_j}{1-t} x_j + t x_{n+1}\right) \leq \sum_{j=1}^{n} t_j f(x_j).$$

e resta dimostrato che

$$f\left((1-t)\sum_{j=1}^{n} \frac{t_j}{1-t} x_j + t x_{n+1}\right) \leq \sum_{j=1}^{n} t_j f(x_j) + t f(x_{n+1}).$$

Questa, per $t = t_{n+1}$, è esattamente le formula (11.3). □

Abbiamo il seguente risultato

Lemma 11.3. *Data $f\colon I \to \mathbb{R}$ definita su un intervallo I. Le seguenti proposizioni sono equivalenti.*

(1) $f(x)$ è convessa in I, nel senso che soddisfa (11.1).

(2) Per ogni $y \in I$ la funzione $x \to \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$ definita in $I \backslash \{y\}$ è crescente.

Dimostrazione. Incominciamo assumendo la (1) e dimostriamo (2).
Siano $x_1 < x_2$ due punti in $I \backslash \{y\}$. Per fissare le idee assumiamo $x_1 < x_2 < y$. Possiamo esprimere il punto mediano di questi tre punti (cioè il punto x_2) nel seguente modo (esercizio: verificare questo conto):

$$x_2 = \frac{x_2 - y}{x_1 - y} x_1 + \left(1 - \frac{x_2 - y}{x_1 - y}\right) y. \tag{11.4}$$

Siccome qui $\frac{x_2-y}{x_1-y} \in [0,1]$, dalla (11.1) concludo

$$f(x_2) \leq \frac{x_2 - y}{x_1 - y} f(x_1) + \left(1 - \frac{x_2 - y}{x_1 - y}\right) f(y). \tag{11.5}$$

Da questo ricavo (notare che $x_1 - y < 0$)

$$(x_1 - y)f(x_2) \geq (x_2 - y)f(x_1) + ((x_1 - y) - (x_2 - y))\, f(y). \tag{11.6}$$

Da qui ricavo

$$(x_1 - y)\,(f(x_2) - f(y)) \geq (x_2 - y)\,(f(x_1) - f(y)) \tag{11.7}$$

e, dividendo per $(x_1 - y)(x_2 - y)$, ricavo

$$\frac{f(x_2) - f(y)}{x_2 - y} \geq \frac{f(x_1) - f(y)}{x_1 - y} \tag{11.8}$$

che è il risultato desiderato visto che $x_1 < x_2$. Abbiamo considerato solo il caso $x_1 < x_2 < y$ ma infatti, con opportune modifiche del ragionamento si riesce a dimostrare (11.8) per ogni coppia $x_1 < x_2$ in $I\backslash\{y\}$.

Ora assumiamo la (2) e dimostriamo (1). Si tratta di dimostrare che per ogni coppia di punti, che possiamo sempre assumere $x_1 < y$, si ha il seguente analogo di (11.1)

$$f(tx_1 + (1-t)y) \leq tf(x_1) + (1-t)f(y) \text{ per ogni } t \in [0,1]. \tag{11.9}$$

Basta ovviamente considerare $t \in (0,1)$. Fissiamo un tale $t \in (0,1)$. Denotiamo

$$x_2 = tx_1 + (1-t)y. \tag{11.10}$$

Notare allora che $t = \frac{x_2 - y}{x_1 - y}$ e che $x_1 < x_2 < y$. Per ipotesi (11.8) è vera. Ma allora sono vere, andando a ritroso, anche (11.7), (11.6),(11.5). Ma se in (11.5) sostituisco (11.10) e $t = \frac{x_2 - y}{x_1 - y}$ ottengo esattamente (11.9).

$\square$

Corollario 11.4. *Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ definita su un intervallo I e convessa in I. Allora in ogni punto x_0 interno ad I esistono sia $f'_s(x_0)$ che $f'_d(x_0)$ e si ha $f'_s(x_0) \leq f'_d(x_0)$.*

Dim. In effetti $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ per via del fatto che la funzione $x \to \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ è crescente. $\square$

Esercizio 11.5. *Data una funzione convessa $f\colon I \to \mathbb{R}$ con $I = (a,b)$ dimostrare che $f \in C^0(I)$.*

Stabilire se lo stesso risultato continua ad essere vero nei casi $I = \begin{cases} [a,b) \\ (a,b] \\ [a,b] \end{cases}$ *producendo delle dimostrazioni o dei controesempi.*

Abbiamo il seguente utile teorema.

Lemma 11.6. *Data $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, supponiamo che $f'(x)$ sia definita per ogni x Le seguenti proposizioni sono equivalenti.*

(a) $f(x)$ è convessa.

(b) $f'(x)$ è crescente.

(a)$\Rightarrow$ (b). Vogliamo verificare che per ogni coppia $x_1 < x_2$ abbiamo $f'(x_1) \leq f'(x_2)$. Prendiamo $x_1 < x < x_2$. Allora $f(x)$ convessa implica

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Da qui ricaviamo

$$f'(x_1) = \lim_{x \to x_1^+} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

$f(x)$ convessa implica che

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Da qui ricaviamo

$$f'(x_2) = \lim_{x \to x_2^-} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Per confronto segue che per $x_1 < x_2$ abbiamo $f'(x_1) \leq f'(x_2)$.

(a)$\Leftarrow$ (b). Dimostriamo ora che $f'(x)$ crescente implica $f(x)$ convessa, cioè che $x_1 < x_2$ implica $\frac{f(x_1)-f(y)}{x_1-y} \leq \frac{f(x_2)-f(y)}{x_2-y}$. Dimostriamo solo il caso $x_1 < y < x_2$ Per il teorema di Lagrange esistono $c_1 \in (x_1, y)$ tale che

$$\frac{f(x_1) - f(y)}{x_1 - y} = f'(c_1)$$

e $c_2 \in (y, x_2)$ tale che

$$\frac{f(x_2) - f(y)}{x_2 - y} = f'(c_2).$$

Evidentemente $c_1 < c_2$ e $f'(c_1) \leq f'(c_2)$ e quindi otteniamo $\frac{f(x_1)-f(y)}{x_1-y} \leq \frac{f(x_2)-f(y)}{x_2-y}$. □

Corollario 11.7. *Data $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, supponiamo che $f''(x)$ sia definita per ogni x Le seguenti proposizioni sono equivalenti.*

(a) $f(x)$ è convessa.

(b) $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a,b)$.

Quest'ultima caratterizzazione è particolarmente utile. Ci dice immediatamente che $f(x) = x^2$, per la quale $f''(x) = 2$, $f(x) = x^2 - x + 2$, sono convesse. Per esempio, $f(x) = e^{x^2}$ è convessa. Infatti

$$f'(x) = 2xe^{x^2}, \quad f''(x) = (4x^2 + 2)e^{x^2} > 0.$$

Definizione 11.8. Una funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$ si dice concava in I se $-f$ è convessa.

Esercizio 11.9. *Dimostrare che funzione $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ tale che $f''(x)$ è definita per ogni $x \in (a,b)$ è concava se e solo se $f''(x) \leq 0$ per ogni $x \in (a,b)$*

Definizione 11.10. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione su un intervallo I. Un punto x_0 interno di I viene detto punto di flesso se si verifica una delle due seguenti alternative:

- esiste un intervallo $(a,b) \subset I$ con $x_0 \in (a,b)$ tale che f è convessa in (a,x_0) e f è concava in (x_0,b);
- esiste un intervallo $(a,b) \subset I$ con $x_0 \in (a,b)$ tale che f è concava in (a,x_0) e f è convessa in (x_0,b)

Esempio 11.11. *La funzione x^3 è in $C^\infty(\mathbb{R})$. In particolare $(x^3)'' = 6x \begin{cases} > 0 \text{ per } x > 0, \\ < 0 \text{ per } x < 0. \end{cases}$ Pertanto si tratta di una funzione concava in $\mathbb{R}_-$ e convessa in $\mathbb{R}_+$. Il punto 0 è un ponto di flesso.*

Esercizio 11.12. *Dimostrare che data funzione $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ tale che $f''(x)$ è definita per ogni $x \in (a,b)$ allora se $x_0 \in (a,b)$ è di flesso si ha $f''(x_0) = 0$.*

Esercizio 11.13. *Dimostrare che $\log x$ è una funzione concava.*

Esercizio 11.14. *Siano I e J due intervalli con $f : I \to J$ una funzione biettiva e convessa. Dimostrare che la funzione inversa $g : J \to I$ è concava.*

Esercizio 11.15. *Per $f\colon I \to \mathbb{R}$ definita su un intervallo I e si dimostri che f è concava se e solo se*

$$f\left(\sum_{j=1}^{n} t_j x_j\right) \geq \sum_{j=1}^{n} t_j f(x_j)$$

per ogni scelta di punti $x_1, ..., x_n \in I$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni loro combinazione lineare convessa.

Esempio 11.16. *Come esempio di applicazione delle proprietà del logaritmo occupiamoci di medie di n numeri reali. Siano $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$. Allora abbiamo le seguenti definizioni di media:*

1. *il numero $\dfrac{x_1 + ... + x_n}{n} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{n}$ è la loro media aritmetica;*

2. se $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}_+$ *il numero* $\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n x_j}$ *è la loro media geometrica.*

Si noti che se $x_1 = ... = x_n = x > 0$ *allora entrambe le medie sono uguali ad* x.
Dimostriamo ora che se $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}_+$ *allora*

$$\text{media geometrica} = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n x_j} \leq \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{n} = \text{media aritmetica.} \tag{11.11}$$

In effetti, siccome log *è una funzione concava, applicando l'enunciato dell'esercizio 11.15 abbiamo*

$$\log\left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{n} x_j\right) \geq \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \log(x_j) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \log(x_j) = \log\left(\sqrt[n]{\prod_{j=1}^n x_j}\right).$$

Infine, utilizzando il fatto che log *è una funzione strettamente crescente otteniamo la dimostrazione di* (11.11).

Esempio 11.17. *Dall'esame del 30 gennaio 2012. Si consideri* $f_\alpha(x) = \alpha x^3 - x + 1 + \log x$.

i) Per prima cosa studiare la convessità di f_α.

Abbiamo $f'_\alpha(x) = 3\alpha x^2 - 1 + x^{-1}$ *e* $f''_\alpha(x) = 6\alpha x - x^{-2}$. *Osserviamo che, per via del* $\log x$, *il dominio di* f_α *è uguale ad* $\mathbb{R}_+$.
Se $\alpha \leq 0$ *risulta allora* $f''_\alpha(x) \leq -x^{-2} < 0$ *e pertanto la funzione è concava.*
Consideriamo $\alpha > 0$. *I punti di flesso sono soluzioni di* $f''_\alpha(x) = 6\alpha x - x^{-2} = 0$. *L'unica soluzione di quest'ultima equazione è* $x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{6\alpha}}$. *E' un flesso perchè per* $0 < x < \frac{1}{\sqrt[3]{6\alpha}}$ *abbiamo* $f''_\alpha(x) < 0$ *e quindi* f_α *è concava in* $\left(0, \dfrac{1}{\sqrt[3]{6\alpha}}\right)$ *e per* $x > \frac{1}{\sqrt[3]{6\alpha}}$ *abbiamo* $f''_\alpha(x) > 0$ *e quindi* f_α *è convessa in* $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{6\alpha}}, +\infty\right)$.

ii) Si determinino gli eventuali punti di flesso dove la tangente al grafico di f_α *è orizzontale.*

Si tratta di verificare se ci sono $\alpha \in \mathbb{R}_+$ *tali che* $f'_\alpha\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{6\alpha}}\right) = 0$. *Abbiamo*

$$f'_\alpha\left(\frac{1}{\sqrt[3]{6\alpha}}\right) = 3\alpha \frac{1}{(\sqrt[3]{6\alpha})^2} - 1 + \sqrt[3]{6\alpha} = \frac{1}{2} 6\alpha \frac{1}{(\sqrt[3]{6\alpha})^2} - 1 + \sqrt[3]{6\alpha} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{6\alpha} - 1.$$

Quindi questo è nullo per

$$\sqrt[3]{6\alpha} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 6\alpha = \frac{2^3}{3^3} \Leftrightarrow \alpha = \frac{2^2}{3^4}.$$

12 L'integrale

In classe viene fatta una breve discussione sul significato geometrico che si vuole dare all'integrale $\int_a^b f(x)dx$ per una data funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Poi si comincia il lavoro per definire l'integrale. Ci sono due nozioni di integrale, l'integrale di Darboux e l'integrale di Riemann. Un teorema, che enunceremo soltanto, garantisce che queste due nozioni di integrale coincidono. Noi ora lavoreremo perlopiù con l'integrale di Darboux. L'integrale di Darboux riguarda solo funzioni limitate definite in un intervallo chiuso e limitato. In altre parole funzioni $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ con $a, b \in \mathbb{R}$ tali che esistono due costanti reali $m < M$ tali che $m \le f(x) \le M$ per ogni $x \in [a,b]$.

Definizione 12.1. Una decomposizione Δ di $[a,b]$ è un insieme finito di intervalli chiusi I contenuti in $[a,b]$ tali che $\cup_{I\in\Delta} I = [a,b]$ e per ogni coppia $I, J \in \Delta$ di intervalli distinti abbiamo che l'intersezione $I \cap J$ è o vuota o un singolo punto.

Osservazione 12.2. Tutte le decomposizioni Δ di $[a,b]$ si ottengono considerando $n \in \mathbb{N}$ ed una scelta di punti $x_0, x_1, ..., x_n \in [a,b]$ con

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < .... < x_{n-1} < x_n = b$$

e prendendo

$$\Delta = \{[x_{j-1}, x_j] : j = 1, ..., n\} = \{[x_0, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_{n-1}, x_n]\}.$$

In particolare per questa come per una qualsiasi decomposizione abbiamo

$$\sum_{I\in\Delta} |I| = \sum_{j=1}^{n} |[x_{j-1}, x_j]| = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) = x_n - x_0 = b - a. \tag{12.1}$$

Definizione 12.3. Dato un intervallo limitato I denotiamo con $|I|$ la sua lunghezza.
Data una decomposizione Δ la sua lunghezza o calibro è

$$|\Delta| = \max\{|I| : I \in \Delta\}.$$

Definizione 12.4. Data due decomposizioni Δ e Δ' diciamo che Δ' è un raffinamento di Δ e scriviamo $\Delta' \preceq \Delta$ se per ogni $I \in \Delta$ si ha

$$I = \cup_{\substack{I'\in\Delta' \\ I'\subseteq I}} I'. \tag{12.2}$$

Esempio 12.5. *Dati* $a < x_1 < x_2 < b$ *e*

$$\Delta = \{[a, x_1], [x_1, x_2], [x_2, b]\}.$$

allora se $x_1 < c < x_2$ *e se definiamo*

$$\Delta' = \{[a, x_1], [x_1, c], [c, x_2], [x_2, b]\}.$$

abbiamo $\Delta' \preceq \Delta$. *Infatti per ogni intervallo di* Δ *è vera* (12.2).

Ora fissiamo una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ con $a,b \in \mathbb{R}$. La prendiamo limitata, cioè esistono due costanti $m < M$ tali che $m \leq f(x) \leq M$ per ogni $x \in [a,b]$.

Definizione 12.6 (Sommatorie $S(\Delta)$ e $s(\Delta)$)**.** Data una decomposizione Δ poniamo

$$\begin{aligned} S(\Delta) &= \sum_{I \in \Delta} |I| \sup f(I) \\ s(\Delta) &= \sum_{I \in \Delta} |I| \inf f(I). \end{aligned} \tag{12.3}$$

Osservazione 12.7. Si noti che poichè esistono due costanti $m < M$ tali che $m \leq f(x) \leq M$ per ogni $x \in [a,b]$, per ogni $I \in \Delta$ abbiamo

$$m \leq \inf f([a,b]) \leq \inf f(I) \leq \sup f(I) \leq \sup f([a,b]) \leq M$$

e pertanto le sommatorie $S(\Delta)$ e $s(\Delta)$ sono ben definiti numeri reali.

Esercizio 12.8. *Dimostrare che se $m \leq f(x) \leq M$ sono due costanti $m < M$ tali che $m \leq f(x) \leq M$ per ogni $x \in [a,b]$ allora per ogni Δ*

$$m(b-a) \leq s(\Delta) \leq S(\Delta) \leq M(b-a) \text{ per ogni } \Delta.$$

Esempio 12.9. *Consideriamo la funzione costante $f = c$ definita in $[a,b]$ e sia Δ una decomposizione. Allora per ogni intervallo $I \subseteq [a,b]$ abbiamo $f(I) = \{c\}$. In particolare $\sup f(I) = \inf f(I) = c$ e quindi*

$$\begin{aligned} S(\Delta) &= \sum_{I \in \Delta} |I| \sup f(I) = \sum_{I \in \Delta} |I| c = c(b-a) \\ s(\Delta) &= \sum_{I \in \Delta} |I| \inf f(I) = \sum_{I \in \Delta} |I| c = c(b-a) \end{aligned} \tag{12.4}$$

dove abbiamo utilizzato (12.1).

Esercizio 12.10. *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e siano m ed M due costanti tali che $m \leq f(x) \leq M$ per ogni $x \in [a,b]$. Dimostrare che*

$$m(b-a) \leq s(\Delta) \leq S(\Delta) \leq M(b-A) \text{ per ogni decomposizione } \Delta. \tag{12.5}$$

Esempio 12.11. *Consideriamo la funzione di Dirichlet $f = D$ definita in $[a,b]$ da*

$$D(x) = \begin{cases} 1 \text{ per } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ per } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

e sia Δ una decomposizione. Notare che $D([a,b]) = \{0,1\}$, e che per ogni intervallo $I \subseteq [a,b]$ abbiamo $D(I) = \{0,1\}$. In particolare $\sup D(I) = 1$ e $\inf D(I) = 0$ e quindi

$$\begin{aligned} S(\Delta) &= \sum_{I \in \Delta} |I| \sup D(I) = \sum_{I \in \Delta} |I| = b-a \\ s(\Delta) &= \sum_{I \in \Delta} |I| \inf D(I) = \sum_{I \in \Delta} |I| 0 = 0. \end{aligned} \tag{12.6}$$

Esempio 12.12. *Consideriamo una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ crescente e consideriamo una decomposizione*

$$\Delta = \{[x_{j-1}, x_j] : j = 1, ..., n\} = \{[x_0, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_{n-1}, x_n]\}$$

ottenuta considerando $n \in \mathbb{N}$ ed una scelta di punti $x_0, x_1, ..., x_n \in [a, b]$ con

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < .... < x_{n-1} < x_n = b.$$

Siccome f è crescente abbiamo

$$\inf f([x_{j-1}, x_j]) = f(x_{j-1}) \text{ e } \sup f([x_{j-1}, x_j]) = f(x_j).$$

Pertanto

$$\begin{aligned} S(\Delta) &= \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \sup f([x_{j-1}, x_j]) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) f(x_j) \\ s(\Delta) &= \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \inf f([x_{j-1}, x_j]) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) f(x_{j-1}). \end{aligned} \tag{12.7}$$

Esercizio 12.13. *Dimostrare che presa una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ decrescente e considerata una decomposizione*

$$\Delta = \{[x_{j-1}, x_j] : j = 1, ..., n\} = \{[x_0, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_{n-1}, x_n]\}$$

ottenuta considerando $n \in \mathbb{N}$ ed una scelta di punti $x_0, x_1, ..., x_n \in [a, b]$ con

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < .... < x_{n-1} < x_n = b$$

si ha

$$\begin{aligned} S(\Delta) &= \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) f(x_{j-1}) \\ s(\Delta) &= \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) f(x_j). \end{aligned} \tag{12.8}$$

Lemma 12.14. *Fissata $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata e due decomposizioni Δ e Δ' con Δ' un raffinamento di Δ , allora*

$$s(\Delta) \leq s(\Delta') \leq S(\Delta') \leq S(\Delta) \tag{12.9}$$

Dim. Dimostriamo $S(\Delta') \leq S(\Delta)$ nel caso particolare

$$\begin{aligned} \Delta &= \{[a, b]\} \\ \Delta' &= \{[a, c], [c, b]\} \end{aligned}$$

dove $a < c < b$. Il caso generale si dimostra in modo fondamentalmente simile. Osserviamo preliminarmente che essendo $f([a, c]) \subseteq f([a, b])$ e $f([c, b]) \subseteq f([a, b])$, risulta, si veda l' esercizio 3.14,

$$\sup f([a, c]) \le \sup f([a, b]) \text{ così come } \sup f([c, b]) \le \sup f([a, b]).$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} S(\Delta) &:= (b - a) \sup f([a, b]) = (c - a) \sup f([a, b]) + (b - c) \sup f([a, b]) \\ &\ge (c - a) \sup f([a, c]) + (b - c) \sup \sup f([c, b]) =: S(\Delta') \end{aligned}$$

Dimostriamo $s(\Delta') \ge s(\Delta)$ nel caso particolare

$$\begin{aligned} \Delta &= \{[a, b]\} \\ \Delta' &= \{[a, c], [c, b]\} \end{aligned}$$

dove $a < c < b$. Il caso generale si dimostra in modo fondamentalmente simile. Osserviamo preliminarmente che essendo $f([a, c]) \subseteq f([a, b])$ e $f([c, b]) \subseteq f([a, b])$, risulta, si veda l' esercizio 3.14,

$$\inf f([a, c]) \ge \inf f([a, b]) \text{ così come } \inf f([c, b]) \ge \inf f([a, b]).$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} s(\Delta) &:= (b - a) \inf f([a, b]) = (c - a) \inf f([a, b]) + (b - c) \inf f([a, b]) \\ &\le (c - a) \inf f([a, c]) + (b - c) \inf \sup f([c, b]) =: s(\Delta') \end{aligned}$$

□

Senza dimostrazione enunciamo il seguente lemma

Lemma 12.15. *Date due decomposizioni Δ e Δ' esiste una terza decomposizione Δ'' che è un raffinamento di entrambe.*

Si tratta di un lemma molto semplice che illustriamo con un esempio. Se ad esempio l'intervallo è $[0, 1]$ e le decomposizioni sono

$$\begin{aligned} \Delta &= \left\{ \left[0, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, 1\right] \right\} \\ \Delta' &= \left\{ \left[0, \frac{1}{3}\right], \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \left[\frac{1}{3}, 1\right] \right\} \end{aligned}$$

allora il seguente è un raffinamento di entrambe

$$\Delta'' = \left\{ \left[0, \frac{1}{3}\right], \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right] \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right], \left[\frac{1}{3}, 1\right] \right\}.$$

Corollario 12.16. *Date due decomposizioni Δ e Δ' abbiamo $s(\Delta) \le S(\Delta')$.*

Dim. In effetti consideriamo una terza decomposizione Δ'' che è un raffinamento di Δ e Δ'. Allora dal Lemma 12.14 risulta

$$s(\Delta) \leq s(\Delta'') \leq S(\Delta'') \leq S(\Delta').$$

$\square$

Corollario 12.17. *La coppia di insiemi $\{s(\Delta)\}_\Delta$ e $\{S(\Delta)\}_\Delta$ sono sue classi separate e risulta*

$$\sup\{s(\Delta)\}_\Delta \leq \inf\{S(\Delta)\}_\Delta$$

Definizione 12.18. Fissata $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata poniamo

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\{s(\Delta)\}_\Delta$$
$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf\{S(\Delta)\}_\Delta.$$

Il primo lo chiamiamo integrale inferiore di f in $[a, b]$, il secondo lo chiamiamo integrale superiore di f in $[a, b]$.

Osservazione 12.19. Dal precedente corollario abbiamo che per ogni fissata $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata si ha

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Esercizio 12.20. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e siano m ed M due costanti tali che $m \leq f(x) \leq M$ per ogni $x \in [a, b]$. Dimostrare che*

$$m(b - a) \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq M(b - A) \tag{12.10}$$

Esempio 12.21. *Sia f la funzione costante di valore c in $[a, b]$. Abbiamo visto nell'esempio 12.9 che per ogni Δ*

$$S(\Delta) = s(\Delta) = c(b - a).$$

Ma allora

$$\underline{\int_a^b} cdx = \sup\{s(\Delta)\}_\Delta = c(b - a)$$
$$\overline{\int_a^b} cdx = \inf\{S(\Delta)\}_\Delta = c(b - a).$$

Esempio 12.22. *Consideriamo in $[a, b]$ la funzione di Dirichlet $f = D$ definita in $[a, b]$. Abbiamo visto nell'esempio 12.11 che per ogni Δ*

$$S(\Delta) = b - a\,, \quad s(\Delta) = 0.$$

Ma allora

$$\underline{\int_a^b} c dx = \sup\{s(\Delta)\}_\Delta = 0$$

$$\overline{\int_a^b} c dx = \inf\{S(\Delta)\}_\Delta = b - a.$$

Esercizio 12.23. *Siano $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ uguali dappertutto eccetto che in un punto $x_0 \in [a,b]$. Dimostrare che*

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} g(x)dx$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} g(x)dx.$$

Definizione 12.24. Diremo che una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è integrabile secondo Darboux in $[a,b]$ se

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Nel qual caso il comune valore dell'integrale inferiore e superiore lo chiameremo l'integrale di Darboux di f in $[a,b]$ e lo denoteremo col simbolo

$$\int_a^b f(x)dx. \tag{12.11}$$

Esempio 12.25. *Ogni funzione costante c è integrabile secondo Darboux in $[a,b]$ con*

$$\int_a^b c dx = c(b-a).$$

La funzione di Dirichlet non è integrabile secondo Darboux in $[a,b]$.

Esercizio 12.26. *Dimostrare che f è integrabile secondo Darboux in $[a,b]$ se e solo se le classi separate $\{s(\Delta)\}_\Delta$ e $\{S(\Delta)\}_\Delta$ sono contigue.*

Teorema 12.27. *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata. Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

(1) f è integrabile secondo Darboux.

(2) $\forall\, \epsilon > 0$ esiste una decomposizione Δ_ϵ tale che $S(\Delta_\epsilon) - s(\Delta_\epsilon) < \epsilon$.

Dim. Per prima cosa osserviamo che per un qualsiasi $\epsilon > 0$ esistono decomposizioni Δ e Δ' tali che

$$\underline{\int_a^b} f(x) - \frac{\epsilon}{2} < s(\Delta) \leq \underline{\int_a^b} f(x) \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq S(\Delta') \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx + \frac{\epsilon}{2}.$$

Ora, se assumiamo (1) la precedente formula diviene

$$\int_a^b f(x) - \frac{\epsilon}{2} < s(\Delta) \leq S(\Delta') < \int_a^b f(x)dx + \frac{\epsilon}{2}.$$

D'altra parte considerato un raffinamento Δ'' di Δ e Δ' abbiamo

$$\int_a^b f(x) - \frac{\epsilon}{2} < s(\Delta) \leq s(\Delta'') \leq S(\Delta'') \leq S(\Delta') \leq \int_a^b f(x)dx + \frac{\epsilon}{2}$$

e quindi abbiamo trovato una decomposizione Δ'' tale che $S(\Delta'') - s(\Delta'') < \epsilon$. Pongo allora $\Delta_\epsilon = \Delta''$

Viceversa assumiamo (2). Allora per ogni Δ abbiamo

$$s(\Delta) \leq \underline{\int_a^b} f(x) \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq S(\Delta)$$

che implica

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x) \leq S(\Delta) - s(\Delta)$$

In particolare per $\Delta = \Delta_\epsilon$ ottengo

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x) < \epsilon \text{ per ogni } \epsilon > 0 \Rightarrow \overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x).$$

□

In primo corollario è il seguente.

Corollario 12.28. *Le funzioni $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monotone sono integrabili secondo Darboux.*

Di. consideriamo una decomposizione

$$\Delta_n = \{[x_{j-1}, x_j] : j = 1, ..., n\} = \{[x_0, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_{n-1}, x_n]\}$$

ottenuta considerando $n \in \mathbb{N}$ ed una scelta di punti $x_j = a + j\dfrac{b-a}{n}$ per $j = 0, ..., n$. Tutti gli intervallini hanno lunghezza $\dfrac{b-a}{n}$. Dalla formula (12.8) otteniamo

$$S(\Delta_n) = \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_j)$$

$$s(\Delta_n) = \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_{j-1}).$$

Quindi sottraendo

$$S(\Delta_n) - s(\Delta_n) = \frac{b-a}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} f(x_j) - \sum_{j=1}^{n} f(x_{j-1})\right) = \frac{b-a}{n}(f(x_n) - f(x_0)) = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)).$$

Ma allora per ogni fissato $\epsilon > 0$ se scelgiamo $n > \frac{b-a}{\epsilon}(f(b) - f(a))$ otteniamo

$$S(\Delta_n) - s(\Delta_n) < \epsilon.$$

Quindi f soddisfa la proposizione (2) del precedente teorema, e pertanto è integrabile per Darboux. □

Corollario 12.29. *Le funzioni $f \in C^0([a,b])$ sono integrabili secondo Darboux.*

La dimostrazione è omessa. Dimostriamo invece un risultato un po' meno generale.

Corollario 12.30. *Le funzioni $f \in C^1([a,b])$ sono integrabili secondo Darboux.*

Qui si intende che $f'(x)$ esiste in (a,b) ed estende in una funzione continua in $[a,b]$.
Dim. Consideriamo la decomposizione del corollario 12.28. Allora

$$\begin{aligned} S(\Delta_n) &= \frac{b-a}{n}\sum_{j=1}^{n} \sup f([x_{j-1}, x_j]) = \frac{b-a}{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_j^*) \\ s(\Delta_n) &= \frac{b-a}{n}\sum_{j=1}^{n} \inf f([x_{j-1}, x_j]) = \frac{b-a}{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_j^{**}) \end{aligned} \tag{12.12}$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che $f \in C^0([x_{j-1}, x_j])$ implica l'esistenza di $x_j^*, x_j^{**} \in [x_{j-1}, x_j]$ con

$$f(x_j^*) = \sup f([x_{j-1}, x_j]) \quad , \quad f(x_j^{**}) = \inf f([x_{j-1}, x_j]).$$

Per Lagrange risulta che per un $\overline{x}_j$ tra x_j^{**} e x_j^*

$$f(x_j^*) - f(x_j^{**}) = f'(\overline{x}_j)(x_j^* - x_j^{**}).$$

Siccome $f' \in C^0([a,b])$ segue che esiste una costante K tale che $|f'(x)| \leq K$ per ogni $x \in [a,b]$. Pertanto

$$0 \leq f(x_j^*) - f(x_j^{**}) = |f'(\overline{x}_j)|\, |x_j^* - x_j^{**}| \leq K\frac{b-a}{n}.$$

Allora facendo la differenza delle due righe di (12)

$$S(\Delta_n) - s(\Delta_n) = \frac{b-a}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(f(x_j^*) - f(x_j^{**})\right) \leq K\frac{b-a}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{b-a}{n} = K\frac{(b-a)^2}{n}.$$

Quindi per ogni $\epsilon > 0$ per $n > K\frac{(b-a)^2}{\epsilon}$ otteniamo $S(\Delta_n) - s(\Delta_n) < \epsilon$. Quindi f soddisfa la proposizione (2) del precedente teorema, e pertanto è integrabile per Darboux. □

Definizione 12.31 (Somme di Riemann)**.** Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ data. Sia Δ una decomposizione di $[a, b]$ ed infine sia x_I^* un punto di I per ogni $I \in \Delta$. La somma di Riemann associata a questi dati è la somma

$$\sum_{I \in \Delta} |I|\ f(x_I^*). \tag{12.13}$$

Osservazione 12.32. Si noti che mentre le sommatorie $S(\Delta)$ e $s(\Delta)]$ introdotte in definizione 12.6 per essere ben definite richiedono che $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sia limitata, le somme di Riemann (12.13) sono perfettamente ben definite anche quando la funzione f non è limitata.

Esercizio 12.33. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata. Sia Δ una decomposizione di $[a, b]$ e sia x_I^* un punto di I per ogni $I \in \Delta$. Dimostrare che*

$$s(\Delta) \le \sum_{I \in \Delta} |I|\ f(x_I^*) \le S(\Delta). \tag{12.14}$$

Definizione 12.34. Una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ si dice integrabile secondo Riemann se esiste $A \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $\delta_\epsilon > 0$ tale che

$$\begin{gathered}\text{per ogni decomposizione } \Delta \text{ con } |\Delta| < \delta_\epsilon \text{ e per ogni somma di Riemann}\\ \text{a lei associata si ha } \left| \sum_{I \in \Delta} |I|\ f(x_I^*) - A \right| < \epsilon.\end{gathered} \tag{12.15}$$

Teorema 12.35 (Equivalenza di integrali di Darboux e di Riemann)**.** *Abbiamo i seguenti fatti.*

(1) Se una funzione limitata $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è integrabile per Darboux allora è integrabile anche per Riemann ed inoltre

$$\int_a^b f(x)dx = A \tag{12.16}$$

dove a sinistra abbiamo scritto l'integrale di Darboux ed a destra l'integrale di Riemann.

(2) Se una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è integrabile per Riemann allora è una funzione limitata, è integrabile per Darboux e l'uguaglianza (12.16) *è vera.*

La dimostrazione è omessa.
L'integrale soddisfa alcune importanti proprietà, di cui omettiamo le dimostrazioni.

Teorema 12.36 (Linearità dell'integrale)**.** *Abbiamo i seguenti fatti.*

(1) Se f, g sono due funzioni integrabili in $[a, b]$ anche $f + g$ lo è si ha

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \tag{12.17}$$

(2) Se f è funzione integrabile in $[a,b]$ e se $c \in \mathbb{R}$ allora anche cf è integrabile e si ha

$$\int_a^b c\ f(x)dx = c\int_a^b f(x)dx. \tag{12.18}$$

Denoteremo con $L[a,b]$ l'insieme delle funzioni integrabili in $[a,b]$. Il teorema 12.36 ci dice che $L[a,b]$ è uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$ e che la funzione che associa ad ogni $f \in L[a,b]$ il suo integrale $\int_a^b f(x)dx$ è un operatore lineare $L[a,b] \to \mathbb{R}$.
Prima di enunciare la prossima proprietà dell'integrale ricordiamoci che nell'insieme $L[a,b]$ si può introdurre una relazione d'ordine dicendo che date due funzioni $f, g \in L[a,b]$ abbiamo $f \leq g$ se $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [a,b]$.

Teorema 12.37 (Monotonia dell'integrale)**.** *Date due funzioni $f, g \in L[a,b]$ con $f \leq g$ abbiano*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx. \tag{12.19}$$

In particolare se f e g sono distinte e sono in $C^0([a,b])$ allora $f \leq g$ implica

$$\int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx. \tag{12.20}$$

Esercizio 12.38. *Utilizzando la definizione di integrale di Darboux, dimostrare la disuguaglianza* (12.19)*.*

Definizione 12.39 (Media di una funzione)**.** Data $f \in L[a,b]$ la sua media in $[a,b]$ è

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}. \tag{12.21}$$

Un importante corollario del teorema 12.37 è il seguente.

Corollario 12.40 (Teorema della media)**.** *Data $f \in C^0([a,b])$ esiste $c \in [a,b]$ t.c.*

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}. \tag{12.22}$$

Dim. Siccome $f \in C^0([a,b])$ esistono punti x_m e x_M in $[a,b]$ tali che $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$ per ogni $x \in [a,b]$. Dalla monotonia dell'integrale segue allora

$$f(x_m) \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq f(x_M).$$

Dal teorema dei valori intermedi 7.29 segue che esiste $c \in [a,b]$ t.c. (12.22) è vera. □

Un'altra proprietà importante è la seguente.

Teorema 12.41 (Disuguaglianza triangolare)**.** *Data $f \in L[a,b]$ abbiamo $|f| \in L[a,b]$ e vale la*

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx. \tag{12.23}$$

Esercizio 12.42. *Assumendo la prima parte dell'enunciato, cioè che $f \in L[a,b]$ implica $|f| \in L[a,b]$, dimostrare la disuguaglianza* (12.23)*.*

Altro teorema è il seguente.

Teorema 12.43. *Date $f, g \in L[a,b]$ il loro prodotto è in $L[a,b]$.*

Dimostrazione omessa.

Lemma 12.44. *Sia $f \in L[a,b]$ e sia $[\alpha,\beta] \subseteq [a,b]$. Allora la restrizione di f in $[\alpha,\beta]$ è in $L[\alpha,\beta]$*

Esercizio 12.45. *Dimostrare il lemma 12.44.*

Esercizio 12.46. *Dimostrare che la funzione $f(x) = \begin{cases} x \text{ per } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ per } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ non è integrabile per Darboux in alcun intervallo.*

Teorema 12.47. *Data $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $c \in (a,b)$ le seguenti proposizioni sono equivalenti.*

(1) $f \in L[a,b]$

(2) Per $f|_{[a,c]}$ la restrizione di f a $[a,c]$ abbiamo $f|_{[a,c]} \in L[a,c]$ e per $f|_{[c,b]}$ la restrizione di f a $[c,b]$ abbiamo $f|_{[c,b]} \in L[c,b]$

Inoltre quando le due proposizioni (1) e (2) sono vere si ha

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{12.24}$$

Dimostrazione omessa.

Definizione 12.48 (Locale integrabilità)**.** Sia I un intervallo e sia $f : I \to \mathbb{R}$. Diciamo che f è localmente integrabile in I e scriviamo $f \in L_{loc}(I)$ se per ogni coppia $a, b \in I$ con $a < b$ si ha $f|_{[a,b]} \in L[a,b]$ dove con $f|_{[a,b]}$ denotiamo la restrizione di f a $[a,b]$.

Definizione 12.49 (Funzione integrale)**.** Sia $f \in L_{loc}(I)$ e sia $x_0 \in I$ definiamo la funzione $\int_{x_0}^x f(t)dt : I \to \mathbb{R}$ nel seguente modo

$$\int_{x_0}^x f(t)dt = \begin{cases} \text{l'integrale di Darboux–Riemann } f \text{ nell'intervallo } [x_0, x] \text{ se } x > x_0 \\ 0 \text{ se } x = x_0 \\ -\int_x^{x_0} f(t)dt \text{ se } x < x_0. \end{cases} \tag{12.25}$$

Per semplicità denoteremo la funzione in (12.25) con $F(x)$.

Lemma 12.50 (Continuità della funzione integrale)**.** *Sia $f \in L_{loc}(I)$ e sia $x_0 \in I$. La funzione F è continua.*

Dim Verifichiamo che preso un punto $x_1 \in I$ abbiamo $\lim_{x \to x_1} \int_{x_0}^{x} f(t)dt = \int_{x_0}^{x_1} f(t)dt$. Per fissare le idee supponiamo $x_1 \geq x_0$ e siano $a, b \in I$ con $a < x_1 < x \leq b$. Mi limiterò a dimostrare $\lim_{x \to x_1^+} F(x) = F(x_1)$. Ricordiamoci che

$$F(x) - F(x_1) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt - \int_{x_0}^{x_1} f(t)dt = \cancel{\int_{x_0}^{x_1} f(t)dt} + \int_{x_1}^{x} f(t)dt - \cancel{\int_{x_0}^{x_1} f(t)dt} = \int_{x_1}^{x} f(t)dt.$$

Siccome $f \in L[a, b]$ risulta che f è limitata in $[a, b]$ e che quindi esistono $m < M$ tali che

$$m \leq f(t) \leq M \text{ per ogni } t \in [a, b].$$

Ma allora per la monotonia dell'integrale

$$m(x - x_1) \leq F(x) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x} f(t)dt \leq M(x - x_1) \text{ per ogni } x_1 < x \leq b.$$

e per i Carabinieri segue $\lim_{x \to x_1^+} \int_{x_1}^{x} f(t)dt = \lim_{x \to x_1^+} (F(x) - F(x_1)) = 0$. □

Teorema 12.51 (Teorema fondamentale del calcolo)**.** *Sia $f \in L_{loc}(I)$ e sia $x_0 \in I$. Supponiamo che in un punto $x_1 \in I$ abbia senso ed esista finito il limite $\lim_{x \to x_1^+} f(x) = f(x_1^+)$. Allora la funzione integrale ammette derivata destra in x_1 che è data da*

$$F_d'(x_1) = f(x_1^+). \tag{12.26}$$

Se invece ha senso ed esiste finito il limite $\lim_{x \to x_1^-} f(x) = f(x_1^-)$ allora la funzione integrale ammette derivata sinistra in x_1 che è data da

$$F_s'(x_1) = f(x_1^-). \tag{12.27}$$

Quindi se $f(x_1^+) = f(x_1^-) \in \mathbb{R}$ allora la funzione integrale ha derivata in x_1 con $F'(x_1) = f(x_1)$.

Dim. Ci limiteremo a dimostrare (12.26). Consideriamo per $x > x_1$

$$\begin{aligned}
\frac{F(x) - F(x_1)}{x - x_1} - f(x_1^+) &= \frac{\int_{x_0}^{x} f(t)dt - \int_{x_0}^{x_1} f(t)dt}{x - x_1} - f(x_1^+) \\
&= \frac{\int_{x_1}^{x} f(t)dt - f(x_1^+)(x - x_1)}{x - x_1} = \frac{1}{x - x_1} \int_{x_1}^{x} \left(f(t) - f(x_1^+)\right) dt.
\end{aligned}$$

Usando la disuguaglianza triangolare abbiamo

$$\left|\frac{F(x)-F(x_1)}{x-x_1}-f(x_1^+)\right| \leq \frac{1}{x-x_1}\int_{x_1}^{x}\left|f(t)-f(x_1^+)\right| dt.$$

Ora siccome $\lim_{x\to x_1^+} f(x) = f(x_1^+)$ sappiamo che per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $\delta_\epsilon > 0$ tale che per $x_1 < t \leq x < x_1 + \delta_\epsilon$ abbiamo

$$-\epsilon < f(t) - f(x_1^+) < \epsilon.$$

Pertanto inserendo nella formula precedente otteniamo che per $x_1 < x < x_1 + \delta_\epsilon$

$$\left|\frac{F(x)-F(x_1)}{x-x_1}-f(x_1^+)\right| \leq \frac{1}{x-x_1}\int_{x_1}^{x}\epsilon dt = \epsilon.$$

Questo significa che

$$\lim_{x\to x_1^+}\left(\frac{F(x)-F(x_1)}{x-x_1}-f(x_1^+)\right) = 0$$

e cioè (12.26). □

Il precedente teorema implica immediatamente quanto segue.

Corollario 12.52 (Teorema fondamentale del calcolo per funzioni continue)**.** *Sia $f \in C^0(I)$ e sia $x_0 \in I$. Allora la funzione F definita in* (12.25) *è in $C^1(I)$ con $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in I$.*

Definizione 12.53. Una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ si dice primitivabile in (a, b) se esiste una funzione derivabile $G : (a, b) \to \mathbb{R}$ tale che $G'(x) = f(x)$ per ogi $x \in (a, b)$. La funzione G viene detta una primitiva di f.

Esempio 12.54. *Ogni funzione $f \in C^0(a, b)$ è primitivabile in (a, b) visto che F è una sua primitiva.*

Esercizio 12.55. *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ primitivabile e sia G_1 una sua primitiva. Dimostrare:*

1. *Per ogni costante $c \in \mathbb{R}$ anche $G_2 := G_1 + c$ è una primitiva di f.*

2. *Sia G_3 un'altra primitiva di f. Allora esiste una costante c_0 tale che $G_3 = G_1 + c_0$.*

Esempio 12.56. *La funzione gradino di segno $sign : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ̀definita da*

$$sign(x) = \begin{cases} 1 \ per\ x > 0 \\ 0 \ per\ x = 0 \\ -1 \ per\ x < 0 \end{cases}$$

non è primitivabile in $\mathbb{R}$. Per assurdo supponiamo che lo sia, e che abbia una primitiva G. Siccome su $\mathbb{R}_+$ abbiamo $G' = (x)' = sign$, dall'esercizio 12.55 abbiamo che $G = x + c_+$

su $\mathbb{R}_+$. *Siccome su* $\mathbb{R}_-$ *abbiamo* $G' = (-x)' = sign$, *dall'esercizio 12.55 abbiamo che* $G = -x + c_-$ *su* $\mathbb{R}_-$. *Siccome* G, *essendo derivabile su* $\mathbb{R}$ *deve essere continua su* $\mathbb{R}$, *per la continuità di* G *in 0 abbiamo*

$$c_- = G(0^-) = G(0) = G(0^+) = c_+ \Longrightarrow c_- = c_+ = c$$

per un fissato $c \in \mathbb{R}$. *Da*

$$G(x) = \begin{cases} x + c \text{ per } x > 0 \\ c \text{ per } x = 0 \\ -x + c \text{ per } x < 0 \end{cases}$$

segue evidentemente che $G = |x| + c$. *Ma questo implica* $(|x|)'(0) = sign(0) = 0$ *che è falso perchè sappiamo che* $(|x|)'_s(0) = -1 \neq 0$ *e* $(|x|)'_d(0) = 1 \neq 0$.

Esercizio 12.57. *Dimostrare che la funzione gradino di Heaviside* $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$H(x) = \begin{cases} 1 \text{ per } x > 0 \\ \frac{1}{2} \text{ per } x = 0 \\ 0 \text{ per } x < 0 \end{cases}$$

non è primitivabile in $\mathbb{R}$.

Esercizio 12.58. *Dimostrare che la funzione parte intera* $[x] : \mathbb{R} \to \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ *non è primitivabile in* $\mathbb{R}$.

Esercizio 12.59. *Supponiamo di avere due funzioni* $f_1, f_2 \in C^0(a,b)$ *e che* $x_0 \in (a,b)$. *Consideriamo la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) \text{ se } x > x_0 \\ f_2(x) \text{ se } x \leq x_0. \end{cases} \tag{12.28}$$

ottenuta "incollando" f_1 *e* f_2 *nel punto* x_0. *Dimostrare che*

$$f \text{ è primitivabile in } (a,b) \text{ se e solo se } f_1(x_0) = f_2(x_0),$$

Esempio 12.60. *Non tutte le funzioni primitivabili sono continue. Ad esempio, la funzione* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ per } x \neq 0 \\ 0 \text{ per } x = 0, \end{cases}$$

è primitivabile in $\mathbb{R}$ *pur non essendo continua nello 0. Per dimostrarlo ricordiamoci dell'esempio 9.25. Risulta che posto*

$$G(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \text{ per } x \neq 0 \\ 0 \text{ per } x = 0, \end{cases}$$

si ha che

$$G'(x) = \begin{cases} 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ per } x \neq 0 \\ 0 \text{ per } x = 0, \end{cases}$$

La funzione

$$k(x) = \begin{cases} 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) & per\ x \neq 0 \\ 0 & per\ x = 0, \end{cases}$$

è continua in $\mathbb{R}$ *e dunque è primitivable. Sia* K *una sua primitiva. Siccome* $f(x) = G'(x) - K'(x) = (G-K)'(x)$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$*, possiamo concludere che* f *è primitivable.*

Abbiamo il seguente utile corollario del Teorema fondamentale del calcolo.

Corollario 12.61 (Teorema di valutazione)**.** *Sia* $f \in C^0([a,b])$ *e sia* $G \in C^1([a,b])$ *una primitiva di* f *in* (a,b)*. Allora*

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a). \tag{12.29}$$

Osservazione 12.62. Data $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ poniamo $G(x)]_a^b := G(b) - G(a)$. Quindi la formula (12.29) può essere scritta come

$$\int_a^b f(x)dx = G(x)]_a^b. \tag{12.30}$$

Dim. Sia $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$. Allora dal Teorema fondamentale del calcolo F è una primitiva di f in (a,b). Inoltre dal lemma 12.50 abbiamo $F \in C^0([a,b])$. La differenza $F - G$ è una funzione in $C^0([a,b])$ con derivata nulla in (a,b). Dall'esercizio 9.9 segue che $F - G$ è una funzione di valore costante $c \in \mathbb{R}$. Ma allora

$$F(b) - F(a) = (G(b) + \cancel{c}) - (G(a) + \cancel{c}) = G(b) - G(a)$$

e siccome

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) = F(b) - F(a)$$

segue anche (12.29). $\square$

Ecco alcuni esempi di primitive importanti, dove C è una qualsiasi costante.

1. x^α per $\alpha \neq -1$, primitive $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
2. x^{-1} , primitive $\log|x| + C$
3. e^x , primitive $e^x + C$
4. $\frac{1}{1+x^2}$, primitive $\arctan x + C$
5. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, primitive $\arcsin x + C$
6. $\sin x$, primitive $-\cos x + C$

7. $\cos x$, primitive $\sin x + C$

8. $\sinh x$, primitive $\cosh x + C$

9. $\cosh x$, primitive $\sinh x + C$

10. $\frac{1}{\cos^2 x}$, primitive $\tan x + C$

11. $\frac{1}{\cosh^2 x}$, primitive $\tanh x + C$

Esempio 12.63. *Calcoliamo i polinomi di McLaurin di* $\arctan(x)$*. Abbiamo* $(\arctan(x))' = \dfrac{1}{1+x^2}$ *e l'espansione*

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j x^{2j} + o(x^{2n}). \tag{12.31}$$

Pertanto

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^x \left(\sum_{j=0}^{n} (-1)^j t^{2j} + o(t^{2n}) \right) dt = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \int_0^x t^{2j} dt + \int_0^x o(t^{2n}) dt$$

$$= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{2j+1} + \int_0^x o(t^{2n}) dt.$$

Osserviamo che la funzione $o(x^{2n})$ *in* (12.31) *è in* $C^\infty(\mathbb{R})$*. Lo funzione* $o(x^{2n})$ *nell'integrale è la stessa della* $o(x^{2n})$ *in* (12.31)*. Osserviamo anche che*

$$\int_0^x o(t^{2n}) dt = o(x^{2n+1}).$$

Questo lo si vede ad esempio applicando la regola dell'Hopital ed il teorema fondamentale del calcolo

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x o(t^{2n}) dt}{x^{2n+1}} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\int_0^x o(t^{2n}) dt\right)'}{(x^{2n+1})'} = \lim_{x \to 0} \frac{o(x^{2n})}{(2n+1)x^{2n}} = 0.$$

Ma allora

$$\arctan(x) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{2j+1} + o(x^{2n+1})$$

ci da i polinomi di McLaurin di ordine $2n+1$.

Esempio 12.64. *Dall'esame del 20/06/2016. Calcolare il polinomio di McLaurin* p_6 *di* $\arctan(1+x^2)$.

Partiamo da

$$(\arctan(1+x^2))' = \frac{2x}{1+(1+x^2)^2} = \frac{2x}{2+2x^2+x^4} = x \frac{1}{1+x^2+\frac{x^4}{2}}.$$

Ora a partire da

$$\frac{1}{1+y} = \sum_{j=0}^{2}(-1)^j y^j + o(y^2) \text{ sostituendo } y = x^2 + \frac{x^4}{2}$$

otteniamo

$$\frac{1}{1+x^2+\frac{x^4}{2}} = 1 - \left(x^2 + \frac{x^4}{2}\right) + \left(x^2 + \frac{x^4}{2}\right)^2 + o\left(\left(x^2 + \frac{x^4}{2}\right)^2\right).$$

Notare che

$$o\left(\left(x^2 + \frac{x^4}{2}\right)^2\right) = o(x^4)$$

e che

$$\frac{1}{1+x^2+\frac{x^4}{2}} = 1 - \left(x^2 + \frac{x^4}{2}\right) + x^4 + o(x^4) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

ci da il polinomio di McLaurin di ordine 4 della frazione. Pertanto

$$x\frac{1}{1+x^2+\frac{x^4}{2}} = x - x^3 + \frac{x^5}{2} + o(x^5)$$

ci da il polinomio di McLaurin di ordine 5 di $(\arctan(1+x^2))'$.
Infine

$$\arctan(1+x^2) = \arctan(1) + \int_0^x (\arctan(1+t^2))' dt = \frac{\pi}{4} + \int_0^x (t - t^3 + \frac{t^5}{2} + o(t^5))dt$$
$$= \frac{\pi}{4} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{12} + o(x^6)$$

ci da il polinomio di McLaurin di ordine 6 di $\arctan(1+x^2)$.

Esempio 12.65. *Dall'esame del 16/06/2016. Approssimare* $\displaystyle\int_0^1 \sin(x^2)dx$ *con un numero razionale e con un errore minore di* 100^{-1}.
Consideriamo l'espansione

$$\sin(y) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j \frac{y^{2j+1}}{(2j+1)!} + E_{2n+1}(y)$$

Notare per la formula di Lagrange

$$|E_{2n+1}(y)| \leq \frac{|\sin^{(2n+2)}(c)|}{(2n+2)!} y^{2n+2} \text{ per un } c \text{ compreso tra 0 e } y \Rightarrow |E_{2n+1}(y)| \leq \frac{1}{(2n+2)!} y^{2n+2}.$$

Allora sostituendo $y = x^2$

$$\sin(x^2) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{x^{4j+2}}{(2j+1)!} + E_{2n+1}(x^2) \text{ con } |E_{2n+1}(x^2)| \leq \frac{1}{(2n+2)!} x^{4n+4}.$$

Allora

$$\int_0^1 \sin(x^2) dx = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \int_0^1 \frac{x^{4j+2}}{(2j+1)!} dx + \int_0^1 E_{2n+1}(x^2) dx \tag{12.32}$$

con la sommatoria un numero razionale e con

$$\int_0^1 |E_{2n+1}(x^2)| dx \leq \frac{1}{(2n+2)!(4n+5)} = \begin{cases} 2 \cdot 5 = 10 \text{ per } n = 0 \\ 4! \cdot 9 = 216 \text{ per } n = 1 \end{cases}$$

Pertanto la sommatoria per $n = 1$ *in* (12.32) *soddisfa la richiesta.*

Esempio 12.66. *Verificare che*

$$\frac{d}{dx} \int_{e^{x^3}}^{x^2+2x} \arctan(t) dt = (2x+2) \arctan(x^2+2x) - 3x^2 e^{x^3} \arctan(e^{x^3}).$$

Definizione 12.67 (Integrale indefinito)**.** Dato un intervallo I e data una funzione $f \in C^0(I)$ denoteremo con $\int f(x)dx$ la generica funzione primitiva di f. Il simbolo $\int f(x)dx$ viene chiamato l'*integrale indefinito* di f.

Quindi ad esempio $\int \sin(x)dx = -\cos(x) + C$. Integrali del tipo $\int_1^2 \sin(x)dx$ vengono invece chiamati *integrali definiti.*

12.1 Integrazione per parti

Proposizione 12.68 (Integrazione per parti)**.** *Dato un intervallo* I *e date* $f, g \in C^1(I)$ *vale la seguente formula per integrali indefiniti:*

$$\int f'(x)\, g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x) g'(x) dx. \tag{12.33}$$

Dato un intervallo $[a, b]$ *e date* $f, g \in C^1([a, b])$ *vale la seguente formula per integrali efiniti:*

$$\int_a^b f'(x)\, g(x) dx = f(x)\, g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)\, g'(x) dx. \tag{12.34}$$

Dim. La formula (12.33) è basata su

$$f'\, g = (f\, g)' - f\, g'.$$

Integrando otteniamo

$$\int f'(x)\, g(x) dx = \int (f(x)\, g(x))' dx - \int f(x)\, g'(x) dx.$$

Per definizione
$$\int (f(x)\, g(x))' dx = f(x)\, g(x) + C.$$
Ignorando la costante C, che si può sempre pensare come contenuta in $\int f(x)\, g'(x)dx$, otteniamo (12.33).
La formula (12.34) è basata su (12.33). Infatti, utilizzando il teorema di valutazione (corollario 12.61) abbiamo
$$\begin{aligned}\int_a^b f'(x)\, g(x)dx &= \left(\int f'(x)\, g(x)dx\right)\Big]_a^b \\ &= \left(f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx\right)\Big]_a^b\end{aligned} \tag{12.35}$$
dove abbiamo ottenuto la seconda riga sostituendo il termine a sinistra di (12.33) col termine a destra. Ora utilizziamo il fatto, facile da verificare, che $(h(x) - k(x))]_a^b = h(x)]_a^b - \ k(x)]_a^b$ per concludere che
$$\begin{aligned}&\left(f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx\right)\Big]_a^b = f(x)g(x)]_a^b - \left(\int f(x)g'(x)dx\right)\Big]_a^b \\ &= f(x)\, g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)\, g'(x)dx.\end{aligned} \tag{12.36}$$
dove all'ultimo abbiamo utilizzato ancora una volta il teorema di valutazione, che garantisce
$$\int_a^b f(x)\, g'(x)dx = \left(\int f(x)g'(x)dx\right)\Big]_a^b.$$
Le formula (12.35)–(12.36) implicano (12.34). □

Esempio 12.69. $\int xe^x = \int x(e^x)'dx = x\, e^x - \int e^x dx = x\, e^x - e^x + C$
$\int x^n e^x = \int x^n (e^x)'dx = x^n\, e^x - n \int x^{n-1} e^x dx$
$\int x^2 e^x = x^2\, e^x - 2x\, e^x + 2e^x + C$
$\int x \sin x = \int x(-\cos x)'dx = -x\, \cos x + \int \cos x dx = -x\, \cos x + \sin x + C$
$\int x^n \sin x = \int x^n (-\cos x)'dx = -x^n\, \cos x + n \int x^{n-1} \cos x dx$
$\int (x + x^2) e^x = \int xe^x + \int x^2 e^x = x^2\, e^x - x\, e^x + e^x + C$

Esempio 12.70. *In generale per $p(x)$ polinomio $\int p(x)e^x dx = p(x)e^x - \int p'(x)e^x$*

$\int p(x) \sin x dx = -p(x) \cos x + \int p'(x) \cos x$
$\int p(x) \cos x dx = p(x) \sin x - \int p'(x) \sin x$ *dove la logica sottostante è che $p'(x)$ ha grado di una unità minore del grado di $p'(x)$. Pertanto applicando la formula un numero sufficiente di volte ci si riduce agli integrali $\int e^x$, $\int \cos x$ e $\int \sin x$.*

Esempio 12.71. *Caso con integrazione per parti 2 volte. Partiamo da*

$$\int e^x \sin x dx.$$

Iniziamo con l'integrare per parti.

$$\int e^x \sin x dx = \int (e^x)' \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx.$$

A prima vista non sembra che ci abbiamo guadagnato tanto, visto che partiti da $\int e^x \sin x dx$ *siamo arrivati a* $\int e^x \cos x dx$ *che in termini di difficoltà è ovviamente uguale. Tuttavia, proseguiamo nell'integrazione per parti ponendo* $e^x \cos x = (e^x)' \cos x$ *(e non* $e^x \cos x = e^x(-\sin x)'$*, perchè altrimenti si torna indietro)*

$$\int e^x \sin x dx = \int (e^x)' \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx =$$
$$= e^x \sin x - \int (e^x)' \cos x dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx.$$

Arrivati a questo punto, a prima vista non ci si è guadagnato tanto, visto che partiti da $\int e^x \sin x dx$ *siamo tornati a* $\int e^x \sin x dx$*. Se però confrontiamo il primo termine della formula con l'ultimo scrivendo*

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx$$

ci accorgiamo che questa può essere pensata come una equazione con incognita $\int e^x \sin x dx$ *che, risolta, ci da*

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{2}.$$

Ovviamente non dobbiamo dimenticare la costante di integrazione, ossia la risposta finale è

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{2} + C.$$

Esempio 12.72. *Abbiamo*

$$\int \log x dx = \int 1 \; \log x dx = \int (x)' \log x dx = x \log x - \int x \frac{1}{x} dx = x \log x - x + c.$$

12.2 Cambio di variabile

Lemma 12.73 (Cambio di variabile per integrale indefinito)**.** *Siano* I *e* J *due intervalli. Siano* $u(x) : I \to J$ *e* $f(u) : J \to \mathbb{R}$ *con* $u \in C^1(I)$ *ed* $f \in C^0(J)$*. Denotiamo con* $\int f(u)du$ *le primitive di* $f(u)$*. Vale la formula*

$$\int f(u(x))\, u'(x) dx = \left(\int f(u) du \right) (u(x)). \tag{12.37}$$

Osservazione 12.74. La formula viene spesso scritta come

$$\int f(u(x))\, u'(x)dx = \int f(u)du \tag{12.38}$$

dove è implicitamente inteso che il termine di destra va composto con la funzione $u(x)$.

Dim del lemma. Abbiamo per definizione

$$\frac{d}{dx}\int f(u(x))\, u'(x)dx = f(u(x))\, u'(x). \tag{12.39}$$

Poniamo ora $F(u) = \int f(u)du$. Notare che $F'(u) = f(u)$ Abbiamo, applicando la regola della catena

$$\frac{d}{dx}F(u(x)) = F'(u(x))u'(x) = f(u(x))u'(x). \tag{12.40}$$

Quindi, essendo le derivate in (12.39)–(12.40) uguali, i due termini di (12.37) hanno la medesima derivata e differiscono per una costante. Ma la costante è assorbita dentro gli integrali.

Esempio 12.75. *Partendo da* $\int \frac{x}{1+x^2}dx$ *poni* $u = 1 + x^2$. *Allora* $du = 2xdx$

$$\int \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\log u + C = \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C.$$

Esempio 12.76. *Partendo da* $\int \frac{dx}{x^2+2}$ *poni* $\sqrt{2}u = x$, *allora* $\sqrt{2}du = dx$ *ed abbiamo*

$$\int \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan u + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\frac{x}{\sqrt{2}}) + C.$$

In generale si ha $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a}) + C$.

Esempio 12.77. *Partendo da* $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx$, *poni* $u = \cos x$, $du = -\sin x$ *ed allora*

$$\int \tan x dx = -\int \frac{du}{u} = -\log|u| + C = -\log|\cos x| + C.$$

Esempio 12.78. *Partendo da* $\int \frac{x+1}{x+7}dx$ *poni* $u = x + 7$, $du = dx$, *ottenendo*

$$\int \frac{u-6}{u}du = \int (1 - \frac{6}{u})du = u - 6\log|u| + C = x - 6\log|x+7| + C.$$

Esempio 12.79. *Abbiamo*

$$\int \arctan x dx = x\ \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}dx = x\ \arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C.$$

Esempio 12.80. *Partendo da* $\int \sqrt{ax+b}dx$ *poni* $u = ax + b$, $du = a\,dx$, *ottenendo*

$$a^{-1}\int \sqrt{u}du = \frac{2}{3a}u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3a}(ax+b)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Esempio 12.81. *Partendo da*

$$\int \cos^{2n+1}(x)\sin^m(x)dx = \int (1-\sin^2(x))^n \cos(x)\sin^m(x)dx$$

poni $u=\sin(x)$, $du=\cos(x)$, *ottenendo*

$$\int \cos^{2n+1}(x)\sin^m(x)dx = \int (1-u^2)^n u^m du.$$

Esempio 12.82. *Partendo da*

$$\int \sin^{2n+1}(x)\cos^m(x)dx = \int (1-\cos^2(x))^n \sin(x)\cos^m(x)dx$$

poni $u=\cos(x)$, $du=-\sin(x)$, *ottenendo*

$$\int \sin^{2n+1}(x)\cos^m(x)dx = -\int (1-u^2)^n u^m du.$$

Esempio 12.83. *Partendo da*

$$\int \sin^{2n}(x)\cos^{2m}(x)dx$$

conviene sostituire $\cos^2(x)=\frac{1+\cos(2x)}{2}$ *e* $\sin^2(x)=\frac{1-\cos(2x)}{2}$ *ottenendo*

$$\int \sin^{2n}(x)\cos^{2m}(x)dx = \int \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^n \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^m dx.$$

Ad esempio

$$\int \sin^2(x)dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos(2x)dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + C.$$

Esempio 12.84. *Sia* ax^2+bx+c *un polinomio con* $\Delta = b^2-4ac<0$.*Calcoliamo*

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx.$$

Preliminarmente scriviamo

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right) \\ &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{|\Delta|}{4a^2}\right]. \end{aligned}$$

Allora

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{|\Delta|}{4a^2}}dx \text{ [per } y = x+\frac{b}{2a},\ dy = dx \text{ diventa]}$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{1}{y^2+\frac{|\Delta|}{4a^2}}dy \text{ [per } y = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}z,\ dy = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}dz \text{ diventa]}$$

$$= \frac{1}{a}\frac{\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}}{\frac{\Delta}{4a^2}}\int \frac{1}{z^2+1}dz = \frac{2}{\sqrt{|\Delta|}}\arctan(z)+C = \frac{2}{\sqrt{|\Delta|}}\arctan\left(\frac{2a}{\sqrt{|\Delta|}}y\right)+C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{|\Delta|}}\arctan\left(\frac{2a}{\sqrt{|\Delta|}}(x+\frac{b}{2a})\right)+C.$$

Lemma 12.85 (Cambio di variabile per integrale definito)**.** *Siano* $[a,b]$ *e* J *due intervalli e siano* $u(x):[a,b]\to J$ *e* $f(u):J\to\mathbb{R}$ *con* $u\in C^1([a,b])$ *ed* $f\in C^0(J)$*. Vale la formula*

$$\int_a^b f(u(x))\,u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du. \tag{12.41}$$

Dim. Dal teorema di valutazione applicato due volte e dal Lemma di cambio di variabile per integrale indefinito

$$\int_a^b f(u(x))\,u'(x)dx = \left(\int f(u(x))\,u'(x)dx\right)\Big|_a^b$$
$$= \left(\int f(u)du\right)(u(x))\Big|_a^b = \int f(u)du\Big|_{u(a)}^{u(b)} = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du.$$

□

Esempio 12.86. *Calcoliamo*

$$\int_0^1 dx\,\sqrt{1+4x^2} = \frac{1}{2}\int_0^2 dx\,\sqrt{1+x^2}.$$

Utilizziamo il cambiamento di variabile $x=\sinh t$ *e* $dx=\cosh t\,dt$*. Abbiamo inoltre*

$$(1+\sinh^2 t)^{\frac{1}{2}} = \cosh t.$$

Per t_0 *tale che* $\sinh t_0 = 2$ *abbiamo*

$$\frac{1}{2}\int_0^2 dx\,\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{2}\int_0^{t_0} dt\,\cosh^2 t.$$

Utilizziamo ora l'identità (da dimostrare per esercizio)

$$\cosh^2 t = \frac{\cosh(2t)+1}{2}$$

Pertanto

$$\frac{1}{2}\int_0^{t_0} dt\,\cosh^2 t = \frac{1}{4}\int_0^{t_0} dt + \frac{1}{4}\int_0^{t_0}\cosh(2t)dt = \frac{t_0}{4} + \frac{1}{4}\sinh(2t_0)$$

$\sinh(2t_0)$ *si può calcolare da*

$$\sinh(2t_0) = 2\sinh(t_0)\cosh(t_0) = 2\sinh(t_0)\sqrt{\sinh^2(t_0)+1} = 4\sqrt{5}.$$

t_0 *lo otteniamo da* (8.20) *che ci da*

$$t_0 = \log\left(2+\sqrt{5}\right)$$

Quindi

$$\int_0^1 dx\,\sqrt{1+4x^2} = \frac{1}{4}\log\left(2+\sqrt{5}\right) + \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

12.3 Espansioni di Hermite di funzioni razionali

Cominciamo con un esempio

Esempio 12.87. *Per opportune costanti A, B e C scrivere*

$$\frac{1}{x^3-3x^2+2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}. \tag{12.42}$$

Per prima cosa osserviamo che $x^3-3x^2+2x = x(x-1)(x-2)$. Questo stabilisce un nesso tra le funzioni a sinistra ed a destra in (12.42)*. Quindi si tratta di trovare costanti A, B e C tali che*

$$\frac{1}{x(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}. \tag{12.43}$$

Per trovare A incominciamo col moltiplicare (12.43) *per x ottenendo*

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = A + \frac{Bx}{x-1} + \frac{Cx}{x-2}.$$

Ponendo $x=0$ otteniamo

$$A = \left.\frac{1}{(x-1)(x-2)}\right|_{x=0} = \frac{1}{2}.$$

Per trovare B moltiplichiamio (12.43) *per $x-1$ ottenendo*

$$\frac{1}{x(x-2)} = \frac{A(x-1)}{x} + B + \frac{C(x-1)}{x-2}.$$

Ponendo $x=1$

$$B = \left.\frac{1}{x(x-2)}\right|_{x=1} = -1.$$

Per trovare B moltiplichiamio (12.43) per $x-2$ ottenendo

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{A(x-2)}{x} + \frac{B(x-2)}{x-1} + C.$$

Ponendo $x = 2$ otteniamo

$$C = \left.\frac{1}{x(x-1)}\right|_{x=2} = \frac{1}{2}.$$

Quindi

$$\frac{1}{x^3 - 3x^2 + 2x} = \frac{\frac{1}{2}}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{x-2}. \tag{12.44}$$

Notare che il fatto che in questo particolare esempio

$$A + B + C = \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} = 0. \tag{12.45}$$

non è casuale e ci ritorneremo

Esempio 12.88. *Abbiamo*

$$\int \frac{1}{x^3 - 3x^2 + 2x} dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x} - \int \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-2} = \log\left(\frac{\sqrt{|x(x-2)|}}{|x-1|}\right) + C.$$

L'espansione (12.44) è un caso particolare di espansione di Hermite.

Teorema 12.89. *Sia $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ con $P(z)$ e $Q(z)$ due polinomi. Sia $\boxed{\text{grado di } P < \text{grado di } Q}$. Sia $n \geq 1$ il grado di Q, $\{z_j\}_{j=1}^k$ le sue radici, $m_j \in \mathbb{N}$ la molteplicità di ciascuna radice z_j e sia*

$$Q(z) = a_n(z - z_1)^{m_1} .... (z - z_k)^{m_k}.$$

la fattorizzazione dal Teorema fondamentale dell'algebra, se veda teorema 2.2. Allora esistono per ogni $j = 1, ..., k$ delle costanti $A_{j,\ell}$ con $\ell = 1, ..., m_j$ tali che

$$R(z) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{\ell=1}^{m_j} \frac{A_{j,\ell}}{(z - z_j)^\ell}. \tag{12.46}$$

La scelta di costanti è univoca, ed inoltre le costanti sono date dalle seguenti formula:

$$A_{j,\ell} = \frac{1}{(m_j - \ell)!} \left(\frac{d}{dz}\right)^{m_j - \ell} \left(R(z)(z - z_j)^{m_j}\right)\big|_{z=z_j}. \tag{12.47}$$

Non dimostriamo il teorema, anche perchè formula (12.47) travalica in contenuti del corso di analisi matematica 1.

Osservazione 12.90. Attenzione che per grado di $P \geq$ grado di Q il teorema è falso!

Esempio 12.91. *Consideriamo* $R(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}$. *Quindi* $\pm i$ *sono le due radici del denominatore, entrambe di molteplicità 2. Pertanto* (12.46) *in questo caso diventa*

$$\frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2} = \frac{A}{z-i} + \frac{B}{z+i} + \frac{C}{(z-i)^2} + \frac{D}{(z+i)^2}.$$

I termini più facili da calcolare sono C *e* D. *Per calcolare* C *applichiamo* (12.47) *per* $m_j = \ell = 2$ *e* $z_j = i$:

$$C = R(z)(z-i)^2\big|_{z=i} = \frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}(z-i)^2\bigg|_{z=i} = \frac{1}{(z+i)^2}\bigg|_{z=i} = -\frac{1}{4}$$

Per calcolare C *applichiamo* (12.47) *per* $m_j = \ell = 2$ *e* $z_j = -i$:

$$C = R(z)(z+i)^2\big|_{z=i} = \frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}(z+i)^2\bigg|_{z=i} = \frac{1}{(z-i)^2}\bigg|_{z=i} = -\frac{1}{4}$$

Per calcolare A *applichiamo* (12.47) *per* $m_j = 2$, $\ell = 1$ *e* $z_j = i$:

$$\begin{aligned} A &= \frac{d}{dz}(R(z)(z-i)^2)\bigg|_{z=i} = \frac{d}{dz}\frac{1}{(z+i)^2}\bigg|_{z=i} = \frac{-2}{(z+i)^3}\bigg|_{z=i} \\ &= \frac{-2}{(2i)^3} = \frac{-2}{-2^3 i} = -\frac{i}{4}. \end{aligned}$$

Per calcolare B *applichiamo* (12.47) *per* $m_j = 2$, $\ell = 1$ *e* $z_j = -i$:

$$\begin{aligned} B &= \frac{d}{dz}(R(z)(z+i)^2)\bigg|_{z=-i} = \frac{d}{dz}\frac{1}{(z-i)^2}\bigg|_{z=-i} = \frac{-2}{(z-i)^3}\bigg|_{z=-i} \\ &= \frac{-2}{(2i)^3} = \frac{-2}{-2^3 i} = \frac{i}{4}. \end{aligned}$$

Pertanto abbiamo

$$\frac{1}{(z^2+1)^2} = -\frac{i}{4}\ \frac{1}{z-i} + \frac{i}{4}\ \frac{1}{z+i} - \frac{1}{4}\ \frac{1}{(z-i)^2} - \frac{1}{4}\ \frac{1}{(z+i)^2}. \tag{12.48}$$

Notare che formalmente

$$-\frac{1}{4}\ \frac{1}{(z-i)^2} - \frac{1}{4}\ \frac{1}{(z+i)^2} = \frac{1}{4}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z-i} + \frac{1}{z+i}\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dz}\frac{z}{z^2+1}$$

Notare che

$$\frac{i}{4}\left(\frac{1}{z+i} - \frac{1}{z-i}\right) = \frac{i}{4}\ \frac{-2i}{z^2+1} = \frac{1}{2}\ \frac{1}{z^2+1}$$

Questo giustifica per $z = x \in \mathbb{R}$ *abbiamo*

$$\frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\ \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\frac{x}{x^2+1}$$

ed in particolare la formula

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\arctan(x) + \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + C.$$

Esempio 12.92. *Calcolare* $\int \frac{(x^2+3)}{x^3-3x^2+2x}dx$
Dal teorema 12.89 abbiamo

$$\frac{x^2+3}{x^3-3x^2+2x} = \frac{x^2}{x(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}$$

per una scelta di A, B C. Una volta trovate le costanti si ha

$$\int \frac{(x^2+3)}{x^3-3x^2+2x}dx = A\log|x| + B\log|x-1| + C\log|x-2| + c.$$

Applicando (12.47) *per $m_j = 1 = \ell$ abbiamo*

$$\begin{aligned} A &= \left.\frac{(x^2+3)}{(x-1)(x-2)}\right|_{x=0} = \frac{3}{2} \\ B &= \left.\frac{(x^2+3)}{x(x-2)}\right|_{x=1} = -4 \\ C &= \left.\frac{(x^2+3)}{x(x-1)}\right|_{x=2} = \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

Ricordiamo che nell'esempio 12.87 si aveva $A+B+C=0$ e si era detto che questo non avveniva per caso. Qui invece

$$A+B+C = \frac{3}{2} - 4 + \frac{7}{2} = 1 \neq 0, \tag{12.49}$$

ed anche questo non è per caso. Ci ritorneremo dopo.

Esempio 12.93. *Come abbiamo già osservato in Osservazione 12.90 una formula del tipo*

$$\frac{x^3+3}{x^3-3x^2+2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}$$

è falsa per qualsiasi scelta di A, B C. Infatti se fosse vera per un scelta di A, B C avremmo

$$1 = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+3}{x^3-3x^2+2x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}\right) = 0$$

che è assurdo.

Discutiamo ora la decomposizione di Hermite per funzioni $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ con $P(z)$ e $Q(z)$ due polinomi con $\boxed{\text{grado di } P \geq \text{grado di } Q}$. In questo caso, si divide P per Q. Il quoziente è un polinomio q, c'è un resto r con $\boxed{\text{grado di } r < \text{grado di } Q}$ e vale l'uguaglianza

$$P(z) = Q(z)q(z) + r(z).$$

Allora

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{Q(z)q(z) + r(z)}{Q(z)} = q(z) + \frac{r(z)}{Q(z)}$$

dove $q(z)$ è un polinomio ed a $\frac{r(z)}{Q(z)}$ si può applicare il teorema 12.89.

Esempio 12.94. *Possiamo scrivere*

$$\frac{x^3+3}{x^3-3x^2+2x} = \frac{x^3-3x^2+2x}{x^3-3x^2+2x} + \frac{3x^2-2x+3}{x^3-x^2+2x} = 1 + \frac{3x^2-2x+3}{x(x-1)(x-2)} = 1 + \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}$$

dove

$$A = \left.\frac{3x^2-2x+3}{(x-1)(x-2)}\right|_{x=0} = \frac{3}{2}$$
$$B = \left.\frac{3x^2-2x+3}{x(x-2)}\right|_{x=1} = -4$$
$$C = \left.\frac{3x^2-2x+3}{x(x-1)}\right|_{x=2} = \frac{11}{2}.$$

Esercizio 12.95. *Dimostrare che l'uguaglianza*

$$\frac{\sum_{j=0}^{n} x^j}{\prod_{j=1}^{n}(x-j)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{A_j}{x-j}$$

è falsa per qualsiasi scelta di A_1, A_2,…, A_n.

Esercizio 12.96. *Sia* $f(x) = \dfrac{x^2}{x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0} = \dfrac{A_1}{x-x_1} + \dfrac{A_2}{x-x_2} + \dfrac{A_3}{x-x_3} + \dfrac{A_4}{x-x_4}$ *la decomposizione di Hermite della funzione razionale $f(x)$, dove supponiamo $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Dimostrare che $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 0$.*

Risposta. Abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty} xf(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0} = 0.$$

Abbiamo anche

$$\lim_{x\to+\infty} xf(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \frac{A_3}{x-x_3} + \frac{A_4}{x-x_4}\right) = A_1 + A_2 + A_3 + A_4.$$

Confrontando i limiti si ottiene il risultato indicato. □

13 Integrali impropri

Esempi sono

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4}dx\,, \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx\,, \quad \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx.$$

Si noti che si tratta di integrali o su intervalli infiniti o di funzioni non limitate.

Definizione 13.1. Sia $f \in L_{loc}([a,b))$ (vedere def. 12.48) dove $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Diciamo che f è integrabile (o sommabile) in $[a,b)$ se esiste ed è finito il limite

$$\lim_{R \to b^-} \int_a^R f(x)dx. \tag{13.1}$$

Denotiamo questo limite con $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ e lo chiamiamo integrale di f in $[a,b)$.

Definizione 13.2. Sia $f \in L_{loc}((a,b])$ (vedere def. 12.48) dove $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ e $b \in \mathbb{R}$. Diciamo che f è integrabile (o sommabile) in $(a,b]$ se esiste ed è finito il limite

$$\lim_{R \to a^+} \int_R^b f(x)dx. \tag{13.2}$$

Denotiamo questo limite con $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ e lo chiamiamo integrale di f in $(a,b]$.

Esercizio 13.3. *Sia $f \in L_{loc}([a,b))$ e sia $c \in (a,b)$. Dimostrare che f è integrabile in $[a,b)$ se e solo se è integrabile in $[c,b)$.*

Esempio 13.4. *La funzione x^{-p} è integrabile in $[1,+\infty)$ se e solo se $p > 1$.*
In effetti per $p \neq 1$ abbiamo

$$\int_1^R \frac{1}{x^p}dx = \frac{1}{1-p}\left(R^{1-p} - 1\right)$$

ed abbiamo

$$\lim_{R \to +\infty} \frac{1}{1-p}\left(R^{1-p} - 1\right) = \begin{cases} +\infty & per \ p < 1 \\ \frac{1}{p-1} & per \ p > 1. \end{cases}$$

Per $p = 1$ abbiamo $\int_1^R \frac{1}{x}dx = \log R \to +\infty$.

Esempio 13.5. *La funzione x^{-p} è integrabile in $[0,1]$ se e solo se $p < 1$.*
In effetti per $p \neq 1$ abbiamo

$$\int_\epsilon^1 \frac{1}{x^p}dx = \frac{1}{1-p}\left(1 - \epsilon^{1-p}\right)$$

ed abbiamo

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{1-p}\left(1 - \epsilon^{1-p}\right) = \begin{cases} +\infty & per \ p > 1 \\ \frac{1}{1-p} & per \ p < 1. \end{cases}$$

Per $p = 1$ abbiamo $\int_\epsilon^1 \frac{1}{x}dx = -\log \epsilon \to +\infty$.

Varie proprietà dell'integrale definito

- f e g integrabili in $[a,b) \Rightarrow f+g$ integrabile in $[a,b)$ con

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

- $C \in \mathbb{R}$ e f integrabile in $[a,b) \Rightarrow Cf$ integrabile in $[a,b)$
  $\int_a^b C\,f = C\int_a^b f$
- f e g integrabili in $[a,b)$, $f(x) \le g(x)\,\forall\, x \in [a,b) \Rightarrow \int_a^b f \le \int_a^b g$.
- per $c \in (a,b)$,

$$\int_a^b f dx = \int_a^c f dx + \int_c^b f dx.$$

Teorema 13.6 (Aut aut)**.** *Sia $f \in L_{loc}([a,b))$ con $f(x) \ge 0$ per ogni x. Allora il limite*

$$\lim_{R\to b^-} \int_a^R f(x)dx \tag{13.3}$$

esiste, finito o infinito.

Dim. Poniamo $F(R) = \displaystyle\int_a^R f(x)dx$. Risulta che $F : [a,b) \to \mathbb{R}$ è crescente. Infatti, se $R_1 < R_2$ abbiamo

$$F(R_2) = \int_a^{R_2} f(x)dx = \int_a^{R_1} f(x)dx + \int_{R_1}^{R_2} f(x)dx \ge \int_a^{R_1} f(x)dx = F(R_1)$$

dove abbiamo utilizzato $\displaystyle\int_{R_1}^{R_2} f(x)dx \ge 0$ che segue da $f(x) \ge 0$ per ogni x. Ma allora da teorema 5.31 o dal teorema 4.61 abbiamo

$$\lim_{R\to b^-} \int_a^R f(x)dx = \lim_{R\to b^-} F(R) = \sup F([a,b)).$$

□

Teorema 13.7 (Confronto)**.** *Siano $f,g \in L_{loc}([a,b))$ con $0 \le f(x) \le g(x)$ per ogni x Allora e con g integrabile in $[a,b)$. Allora f è integrabile in $[a,b)$.*

Dim. Da $f(x) \leq g(x)$ per ogni x segue $\displaystyle\int_a^R f(x)dx \leq \int_a^R g(x)dx$ per ogni R. Per il confronto dei limiti segue

$$\lim_{R\to b^-} \int_a^R f(x)dx \leq \lim_{R\to b^-} \int_a^R g(x)dx = \int_a^b g(x)dx \tag{13.4}$$

dove il limite per g esiste ed è finito per ipotesi. Il limite per f esiste per il teorema di aut aut. Dalla (13.4) segue che il limite per f è finito. Infatti si conclude

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

$\square$

Esempio 13.8. *Verifichiamo se* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{1+x^4}$ *è sommabile. Questa sommabilità è equivalente alla sommabilità di*

$$\int_a^{+\infty} \frac{x^3}{1+x^4}$$

per $a \geq 0$ *qualsiasi (si veda esercizio 13.3). Ora risulta*

$$\frac{x^3}{1+x^4} = x^{-1}\frac{1}{1+a^{-1}} \geq \frac{1}{2}x^{-1}$$

se $a \geq 1$. *Ora* $\frac{1}{2}x^{-1}$ *non è e sommabile in* $[a,+\infty)$ *e quindi anche* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{1+x^4}$ *non lo è.*

Teorema 13.9 (Confronto asintotico)**.** *Siano* $f, g \in L_{loc}([a,b))$ *con* $0 \leq f(x)$, $0 < g(x)$ *per ogni* x. *Supponiamo*

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Allora se $L \in \mathbb{R}_+$, f *è integrabile in* $[a,b)$ *se e solo se* g *è integrabile in* $[a,b)$.

Se $L = +\infty$ *ed* f *è integrabile in* $[a,b)$ *allora* g *è integrabile in* $[a,b)$.

Se $L = 0$ *ed* g *è integrabile in* $[a,b)$ *allora* f *è integrabile in* $[a,b)$.

Dim. Omessa.

Esempio 13.10. *Verifichiamo se*

$$\int_0^{+\infty} (1-\tanh x)dx$$

è sommabile. Ricordare che

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

e che quindi

$$0 \le 1 - \tanh x = 2\frac{e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \le 2e^{-x}.$$

Nota che

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{R\to+\infty}\int_0^R e^{-x}dx = \lim_{R\to+\infty}\left(1 - e^{-R}\right) = 1$$

e pertanto $2e^{-x}$ *è sommabile in* $[0, +\infty)$ *ed anche* $(1 - \tanh x)$ *lo è per confronto.*

Esempio 13.11. *Verifichiamo se*

$$\int_1^{+\infty} \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$$

è sommabile. Ricordare che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1$$

e che quindi siccome $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ *non esiste finito neanche il nostro integrale esiste finito.*

Esempio 13.12. *Risulta*

$$\int_1^{+\infty} \log\left(1 + \frac{1}{x^p}\right) dx$$

è sommabile esattamente quando $p > 1$*. Segue da*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(1 + \frac{1}{x^p}\right)}{\frac{1}{x^p}} = 1$$

e dal fatto che siccome $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ *esiste finito esattamente quando* $p > 1$.

Esempio 13.13. *Consideriamo l'esempio legato all esempio 12.87, dato da*

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^3 - 3x^2 + 2x} = \lim_{R\to+\infty}\int_3^R \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}\right) dx$$
$$= \lim_{R\to+\infty} \log\left(x^A(x-1)^B(x-2)^C\right) - \log\left(3^A 2^B\right) = \lim_{R\to+\infty} \log\left(x^{A+B+C}\right) - \log\left(3^A 2^B\right).$$

Notare che da $\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^3-3x^2+2x}}{\frac{1}{x^3}} = 1$ *e dall'integrabilità di* x^{-3} *in* $[3, +\infty)$ *segue che il nostro integrale deve essere convergente, cioè il limite sopra deve essere finito, e questo necessariamente implica* $A + B + C = 0$*. Ed infatti sappiemo che* $A = C = 1/2$*,* $B = -1$ *L'integrale è dato quindi da*

$$-\log\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \log\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) > 0.$$

Notare che $\frac{1}{x^3-3x^2+2x} = \frac{1}{x(x-1)(x-2)} > 0$ *per* $x \ge 3$ *quindi il segno dell'integrale deve essere positivo.*

Esempio 13.14. *Consideriamo invece l'esempio legato all esempio 12.92, dato da*

$$\int_3^{+\infty} \frac{x^2+3}{x^3-3x^2+2x} = \lim_{R\to+\infty} \int_3^R \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2} \right) dx$$
$$= \lim_{R\to+\infty} \log\left(x^A(x-1)^B(x-2)^C\right) - \log\left(3^A 2^B\right) = \lim_{R\to+\infty} \log\left(x^{A+B+C}\right) - \log\left(3^A 2^B\right).$$

Questa volta $\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2+3}{x^3-3x^2+2x}}{\frac{1}{x}} = 1$ *e dalla non integrabilità di* x^{-1} *in* $[3,+\infty)$ *segue che il nostro integrale deve essere divergente, in particolare il limite sopra deve essere* $+\infty$*, e questo necessariamente implica* $A+B+C>0$*. Ed infatti sappiamo che* $A=3/2$*,* $B=-4$*,* $C=7/2$ *con* $A+B+C=1>0$*.*

Esempio 13.15. *Abbiamo*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^p} \begin{cases} \in \mathbb{R} \text{ se } p>1 \\ = +\infty \text{ se } p\le 1. \end{cases} \tag{13.5}$$

In effetti abbiamo

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{j^p} = \int_1^{n+1} \frac{1}{[x]^p} dx.$$

e questo perchè

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{[x]^p} dx = \sum_{j=1}^n \int_j^{j+1} \frac{1}{[x]^p} dx = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^p}.$$

Ora abbiamo per qualsiasi p

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{[x]^p}}{\frac{1}{x^p}} = 1.$$

Si noti qui che $\frac{1}{[x]^p} \in L_{loc}[1,\infty))$*. Siccome* $\frac{1}{x^p}$ *è integrabile in* $[1,\infty)$ *se e solo se* $p>1$*, per il teorema di confronto asintotico segue anche* $\dfrac{1}{[x]^p}$ *è integrabile in* $[1,\infty)$ *se e solo se* $p>1$*. Ma allora*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^p} = \lim_{n\to+\infty} \int_1^{n+1} \frac{dx}{[x]^p} \begin{cases} \in \mathbb{R} \text{ se } p>1 \\ = +\infty \text{ se } p\le 1. \end{cases}$$

Definizione 13.16. Sia $f \in L_{loc}([a,b))$ dove $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. Diciamo che f è assolutamente integrabile (o assolutamente sommabile) in $[a,b)$ se $|f|$ è integrabile in $[a,b)$.

Teorema 13.17. *Sia* $f \in L_{loc}([a,b))$*. Se* f *è assolutamente integrabile in* $[a,b)$ *allora* f *è integrabile in* $[a,b)$*.*

Esempio 13.18. *La funzione* $\frac{\sin(x)}{x}$ *è integrabile in* $[1,\infty)$ *pur non essendo assolutamente integrabile in* $[1,\infty)$. *L'integrabilità si ottiene integrando per parti*

$$\int_1^R \frac{\sin(x)}{x}dx = -\int_1^R \frac{(\cos(x))'}{x} = \cos(1) - \frac{\cos(R)}{R} - \int_1^R \frac{\cos(x)}{x^2}dx$$

Allora

$$\lim_{R\to+\infty}\int_1^R \frac{\sin(x)}{x}dx = -\lim_{R\to+\infty}\int_1^R \frac{\cos(x)}{x^2}dx.$$

L'ultimo limite esiste ed è finito perchè $\frac{|\cos(x)|}{x^2} \le x^{-2}$ *e pertanto per confronto* $\frac{\cos(x)}{x^2}$ *è assolutemente integrabile (e dal teorema 13.17 è integrabile) in* $[1,\infty)$.

Tuttavia $\frac{\sin(x)}{x}$ *non è assolutamente integrabile in* $[1,\infty)$. *Infatti se fosse assolutamente integrabile in* $[1,\infty)$ *allora questo sarebbe equivalente all'assoluta integrabilità in* $[\pi,\infty)$ *(vedere esercizio 13.3) Se si avesse assoluta integrabilità in* $[\pi,\infty)$, *allora*

$$\begin{aligned}+\infty > \int_\pi^\infty \frac{|\sin(x)|}{x}dx &= \lim_{n\to\infty}\int_\pi^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x}dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^n \int_{j\pi}^{(j+1)\pi}\frac{|\sin(x)|}{x}dx \\ \ge \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^n \int_{j\pi}^{(j+1)\pi}\frac{|\sin(x)|}{(j+1)\pi}dx &= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^n \frac{1}{j+1} = \frac{2}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{j=2}^{n+1}\frac{1}{j} = +\infty\end{aligned} \tag{13.6}$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato (13.5), *e nel corso del calcolo abbiamo usato*

$$\int_{j\pi}^{(j+1)\pi} |\sin(x)|dx = \int_0^\pi |\sin(x)|dx = \int_0^\pi \sin(x)dx = 2.$$

Confrontando gli estremi di (13.6) *otteniamo* $+\infty > +\infty$, *che è assurdo. Questo significa che* $\frac{\sin(x)}{x}$ *non è assolutamente integrabile in* $[\pi,\infty)$.

Esercizio 13.19. *Stabilire se* $\displaystyle\int_1^\infty \log\left(1+\frac{1}{x}\right)\tanh(x)\sin(x)dx$ *è convergente.*

Esercizio 13.20 (Es. 3, 18 giugno 2018). *Si consideri*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\int_0^x e^{[t]}dt - 2x}{\int_0^x t^t dt} \ \mathit{per}\ x > 0, \\ -1 \ \mathit{per}\ x = 0 \\ e^{\frac{1}{x}} - 1 \ \mathit{per}\ x < 0. \end{cases}$$

1) Si determini $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Per $0 < x \le 1$ abbiamo $\displaystyle\int_0^x e^{[t]}dt = x$. Per $x > 1$

$$\int_0^x e^{[t]}dt = \sum_{j=0}^{[x]-1} \int_j^{j+1} e^j dt + \int_{[x]}^x e^{[x]}dt = \frac{e^{[x]}-1}{e-1} + (x-[x])e^{[x]} = e^{[x]}\left(\frac{1}{e-1} + x - [x]\right) - \frac{1}{e-1}.$$

Pertanto per $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{[x]}\left(\frac{1}{e-1} + x - [x]\right)}{\int_0^x t^t dt} + \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{e-1} - 2x}{\int_0^x t^t dt}}_{0}$$

dove il fatto che il secondo limite a destra è nullo segue immediatamente dalla regola dell'Hopital e da

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-2}{x^x} = 0$$

Notiamo ora che

$$0 < \frac{e^{[x]}\left(\frac{1}{e-1} + x - [x]\right)}{\int_0^x t^t dt} \le \left(\frac{1}{e-1} + 1\right) \frac{e^x}{\int_0^x t^t dt} \overset{x\to+\infty}{\rightarrow} 0$$

dove il limite a destra vale per l'Hopital. Pertanto $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

2) Si dimostri che $f \in C^0(\mathbb{R})$. Si tratta di verificare la continuità in 0. Abbiamo

$$\lim_{x\to0^-}\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) = \lim_{y\to-\infty}(e^y - 1) = -1$$

ed abbiamo

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{-x}{\int_0^x t^t dt} \overset{\text{Hopital}}{=} \lim_{x\to0^+} \frac{-1}{x^x} = -1$$

3) si stabilisca in quali punti $f'(x)$ *esiste e la si calcoli ed altrimenti si calcoli derivata destra* $f'_d(x)$ *e derivata sinistra* $f'_s(x)$. Per $x < 0$ abbiamo $f'(x) = -x^{-2}e^{\frac{1}{x}}$. Inoltre $f'_s(0) = 0$.
Per $x > 0$ con $x \notin \mathbb{N}$ abbiamo

$$f'(x) = \frac{(e^{[x]} - 2)\int_0^x t^t dt - \left(\int_0^x e^{[t]}dt - 2x\right)x^x}{\left(\int_0^x t^t dt\right)^2}.$$

Per $x \in \mathbb{N}$ vale esattamente la medesima formula per $f'_d(x)$ mentre abbiamo

$$f'_s(x) = \frac{\left(e^{[x]-1} - 2\right) \int_0^x t^t dt - \left(\int_0^x e^{[t]} dt - 2x\right) x^x}{\left(\int_0^x t^t dt\right)^2}.$$

Infine, per l'Hopital,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)+1}{x} = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{-\int_0^x t^t dt + x^{x+1}}{\left(\int_0^x t^t dt\right)^2} \overset{\text{Hopital}}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{-x^x + x^{x+1}\log(x) + x^{x+1} + x^x}{2x^x \int_0^x t^t dt}$$
$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{x\log(x) + x}{2\int_0^x t^t dt} \overset{\text{Hopital}}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\log(x) + 2}{2x^x} = -\infty.$$

Questo significa che il limite esiste ma non è finito, e quindi $f'_d(0)$ non esiste.
4) Si trovi le soluzioni di $f(x) = 0$.