

4. I modelli

4.1 Ambiguità di un termine

Modus, modulus, modellus è la successione dei termini che hanno portato dal latino *modus*, misura, all'italiano modello, parola di impiego piuttosto diffuso e di fortuna variabile. In alcuni casi, infatti, il modello viene assunto a esemplare ideale e perfetto, chiarificatore della realtà che descrive, mentre in altri viene preso come una schematizzazione sommaria e imperfetta. Alle volte una teoria basata su modelli formali rappresenta anche qualche cosa di più ricco e completo (per esempio nella logica matematica i modelli di teorie formali in genere sono semanticamente più ricchi delle singole teorie modellizzate) ma altre volte non è che uno strumento approssimativo di riproduzione di un oggetto da studiare, come per esempio nei modelli utilizzati in ingegneria che riproducono solo gli aspetti essenziali di fenomeni complessi.

Variabile è anche l'atteggiamento nei riguardi dell'utilità dei modelli. Per quanto riguarda i modelli matematici, per esempio, vi sono atteggiamenti contrapposti, gli uni di fiducia quasi acritica, basata anche su convinzioni metafisiche nei loro confronti (Galileo diceva che il libro dell'universo è scritto in linguaggio matematico), e gli altri più o meno consapevolmente pragmatici. Questi ultimi giustificati per esempio dall'approccio al problema adottato nella progettazione ingegneristica, dove spesso le schematizzazioni non sono riconducibili a leggi fisiche precise, ma ne costituiscono delle semplificazioni (dal punto di vi-

sta concettuale a volte anche arbitrarie), ma ciò non toglie nulla alla loro validità pratica in ambiti ben circoscritti.

Oggi il massiccio ricorso agli elaboratori elettronici ha fatto sì che i modelli matematici abbiano assunto un rilievo sempre maggiore nella ricerca e ciò, se può aver contribuito a superare antichi contrasti, ha evidenziato tuttavia nuovi problemi. L'uso degli elaboratori permette di affrontare, con metodi sofisticati e in tempi ragionevolmente contenuti, problemi così complessi che la loro trattazione analitica pochi anni fa avrebbe posto difficoltà proibitive sia di vero e proprio calcolo numerico, sia di individuazione delle ipotesi di base, di impostazione corretta delle equazioni relative al fenomeno da esaminare.

Con l'aumento delle potenzialità di calcolo si ha la possibilità di affrontare problemi sempre più complessi e, così, la scelta della natura e della struttura del modello matematico è diventata sempre più delicata.

Sono state recuperate anche posizioni filosofiche dei primi decenni del Novecento, di tipo convenzionalistico (Pierre Duhem e Henri Poincaré), in difesa di modelli in grado di rendere efficacemente conto del comportamento dei sistemi studiati più che di corrispondere a leggi fisiche generali. Il convenzionalismo, infatti, riteneva che il problema della scelta fra teorie diverse non avrebbe dovuto essere posto in termini di verità ma bensì di efficacia e, nel caso dei modelli, questo atteggiamento oggi è largamente condiviso. Il modello migliore è quello più efficace in rapporto ai fini particolari per i quali viene formulato.

4.2 Modelli fisici e modelli matematici

I modelli possono essere classificati in base a criteri diversi ma, in ogni caso, le schematizzazioni sono essenzialmente operative. Un criterio classico è quello che li distingue in modelli fisici e modelli matematici.

I primi sono di gran lunga i più antichi e possono a loro

volta essere divisi in tre categorie: i modelli basati sulla *corrispondenza iconica*, sulla *similitudine* e sull'*analogia*.

I modelli a corrispondenza iconica sono rappresentazioni in scala ridotta della realtà (quelli che spesso si chiamano modellini). Essi risultano particolarmente efficaci per rappresentare oggetti tridimensionali di struttura complicata, specialmente quando ci si rivolge a chi non ha dimestichezza con la simbologia del disegno tecnico.

Il modello in scala di un edificio non avrebbe però significato se fosse sottoposto a prove di carico o di resistenza. Lo stesso discorso vale per i modelli da utilizzare in vasche navali e gallerie aerodinamiche. In questi casi è la teoria della similitudine meccanica che suggerisce costruzioni che conservino gli equilibri statici e dinamici presenti nella realtà; può essere necessaria per esempio l'adozione di materiali diversi, o di una scala dei tempi non unitaria (per la quale i fenomeni che si corrispondono nel sistema originale e nel modello richiedono tempi diversi per la loro evoluzione) o anche di scale diverse per le tre dimensioni spaziali, come nei cosiddetti modelli distorti. La teoria della similitudine insegna a compiere correttamente le variazioni di scala in modo che ciò che avviene nel modello corrisponda a ciò che avviene nella realtà: per esempio che, nel caso di modelli idraulici, si passi dal regime laminare al regime vorticoso nelle stesse circostanze, o che le onde di piena siano della stessa forma e così via.

Nei modelli basati sull'analogia, cui abbiamo già accennato nella scheda 3.1, la corrispondenza tra le grandezze in gioco non è di natura fisica ma di natura matematica, ovvero esse sono descritte dalle stesse equazioni, e quindi evolvono nel tempo o si distribuiscono nello spazio secondo le stesse leggi.

Nel secolo scorso era abbastanza diffuso usare modelli meccanici o, più ancora, modelli idraulici, per rappresentare fenomeni elettrici. Un circuito elettrico era concepito come un condotto idraulico e il generatore che lo alimentava come una pompa; alle differenze di potenziale si face-

vano corrispondere salti di pressione, alle intensità di corrente elettrica portate liquide nei rami del condotto, alla carica elettrica accumulata in un condensatore il volume di liquido accumulato in un serbatoio inserito nel condotto, e così via. In questo caso però si trattava ancora di modelli interpretativi (o esplicativi), e di un uso didattico dell'analogia. In seguito l'analogia tra sistemi elettrici e sistemi meccanici (o idraulici) è stata utilizzata in senso inverso, per esempio per costruire circuiti elettrici (i modelli) in cui gli andamenti nel tempo delle correnti di taluni rami (o i potenziali di taluni nodi) fossero identici agli andamenti delle velocità di parti di un dispositivo meccanico (il sistema originale). Lo scopo del modello, in questo caso, è la simulazione, e il ricorso all'analogia facilita la misura delle grandezze, la costruzione del modello e la modifica dei suoi parametri.

Per riassumere possiamo dire che più anticamente venivano utilizzati i modelli in scala, che assicuravano soltanto la corrispondenza iconica, poi nacquero i modelli basati sulla similitudine, che sacrificavano in parte la corrispondenza delle forme per ottenere una migliore corrispondenza di comportamenti, e infine i modelli basati sull'analogia, nei quali la corrispondenza di forma spesso sparisce del tutto. Ultimamente, abbandonati i modelli fisici, si ha la tendenza a preferire i modelli matematici, ridotti a sistemi di equazioni, da risolvere con l'aiuto di elaboratori digitali, possibilmente ricorrendo ad appositi linguaggi di simulazione. Il passaggio dagli oggetti veri e propri alle loro pure rappresentazioni formali dimostra la tendenza a muoversi verso un livello di astrattezza sempre più spinto.

4.3 *La mediazione fra realtà e teoria*

La rappresentazione in termini di equazioni matematiche dei fenomeni fisici è un fatto consueto ma non è lo

stesso per le altre scienze della natura, quelle chimiche o quelle biologiche per esempio, anche se l'interesse per i modelli matematici, che tendono a dare ai problemi una impostazione di tipo formalizzato, si va diffondendo sempre più. Nelle scienze umane e sociali la situazione è, per alcuni versi, differente: la parola modello viene impiegata con un'estensione più ampia e assume il significato di teoria. Dare un modello di un certo fenomeno sociale o fare una teoria su di esso sono infatti espressioni che vengono spesso usate in modo intercambiabile. Qualcosa di analogo si verifica anche in certi campi della fisica applicata e dell'ingegneria. Diversi problemi di meccanica possono essere studiati ricorrendo a schematizzazioni differenti, che fanno riferimento a sistemi di punti materiali, a corpi rigidi o a corpi elastici: nell'ultimo caso per esempio dire che si adotta il modello dei corpi elastici o che si fa uso della teoria dell'elasticità è, sostanzialmente, la stessa cosa.

Come si vede, il rapporto modello-teoria spesso nasconde una ambiguità: nei casi citati i due termini appaiono come sinonimi, mentre in qualche altro caso essi vengono considerati antitetici. Talvolta il modello è concepito come un ausilio valido alla comprensione del fenomeno almeno sul piano psicologico (se non su quello conoscitivo), mentre altre volte come una fonte di equivoci, da abbandonare appena si sia formulata una teoria rigorosa e soddisfacente, anche se può essere stato utile per favorire la scoperta.

L'atteggiamento critico nei riguardi dei modelli ha avuto uno dei suoi antesignani in Pierre Duhem, che polemizzava contro l'uso di analogie meccaniche per la descrizione di fenomeni elettromagnetici (bisogna dire che allora le similitudini erano spesso ingenua e grossolane). Della sua opinione erano anche scienziati illustri, quali Wilhelm Ostwald, Gustav Robert Kirchhoff ed Ernst Mach, ma altri fisici importanti, quali lord Kelvin e Ludwig Boltzmann, favorevoli all'uso dei modelli, erano convinti che questi fossero validi anche sul piano conoscitivo.

Un modo brillante di vedere la posizione dei modelli nei loro rapporti con la realtà e con la teoria è stato suggerito dal matematico René Thom, cui si deve la teoria delle catastrofi. Thom ritiene che tra realtà e modello vi sia un rapporto di analogia, dove il termine analogia assume qui un significato più generico di quello specialistico visto in precedenza parlando dei modelli fisici, un significato che allude alla corrispondenza che si deve ammettere fra certi aspetti della realtà e certi aspetti del modello. L'analogia tra realtà e modello, illustrata nella figura 4.1, parte dalla formulazione dei quesiti sulla realtà su cui vogliamo indagare e dal trasferimento di tali quesiti in problemi relativi al comportamento del modello. Utilizzando il modello, cioè compiendo l'esperimento se si tratta di un modello fisico, o risolvendo le equazioni che lo descrivono se si tratta di un modello matematico, si determina la risposta ai quesiti posti. A questo punto tramite l'analogia, ma in senso inverso, si trasferiscono le risposte trovate in risposte relative alla realtà.

In generale un modello non è identico alla realtà, ma presenta gli stessi aspetti e gli stessi comportamenti solo in certi ambiti ben definiti: quelli in base ai quali il modello è stato progettato e costruito. In questo caso si parla di *analogie positive* ed è solo all'interno di queste che la procedura di tradurre quesiti e risposte dall'ambito della realtà a quello del modello e viceversa non pone problemi.

Analogie negative sono invece quelle per le quali non si ha corrispondenza tra modello e realtà, per esempio quelle relative alla natura fisica delle grandezze in gioco nel caso del modello elettrico di un sistema meccanico, sedi di fenomeni in cui sono in gioco grandezze di natura fisica diversa, e sarebbe ovviamente assurdo dedurre la natura fisica delle une da quella delle altre. Le analogie negative non informano direttamente sulla realtà ma, attraverso il loro impiego, il modello risulta più semplice da costruire, comodo da usare e poco costoso.

Non in tutti i casi nella costruzione di un modello si può

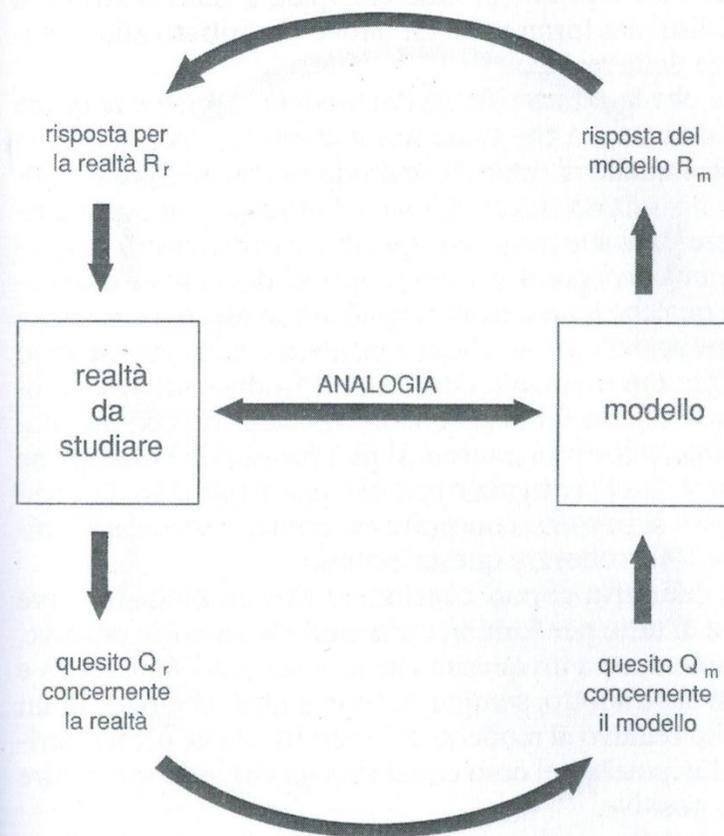


Fig. 4.1 Analogia tra modello e realtà. Partendo da quesiti specifici sulla realtà, li si trasforma in problemi per il modello; le soluzioni di questi corrispondono alle risposte ai quesiti. Il rapporto di analogia è bidirezionale.

dire a priori se ci si trova di fronte a un'analogia positiva o a un'analogia negativa. In molti casi si ha a che fare con *analogie neutre*, o meglio con analogie che a priori appaiono tali. Il problema relativo alla natura di alcune di queste analogie neutre può risultare non banale; si tratta, approfondendo l'indagine, di stabilire se siano analogie positive o negative. Nel caso in cui le analogie neutre si rivelino positive il risultato può essere interessante, poiché non sono

quelle note a priori (in base alle quali è stato costruito il modello), ma forniscono un nuovo contributo alla conoscenza della realtà.

Sia che le caratteristiche del modello vengano adottate casualmente, sia che siano scelte in modo consapevole, lo scopo è quello di ottenere in modo più facile e più economico il risultato voluto. L'uso del modello porta poi a riflettere sulle sue proprietà specifiche e a indagare se queste sono corrispondenti alle proprietà del sistema originale. In qualche caso il risultato può anche essere di notevole valore: se della realtà che si considera è noto per esempio solo il comportamento esteriore e riproducendolo nel modello si utilizza un determinato meccanismo con una determinata struttura interna, si può formulare l'ipotesi che anche il sistema originale presenti una struttura dello stesso tipo e si possono concepire esperimenti idonei a falsificare o a corroborare questa ipotesi.

In definitiva si può concludere che un modello serve prima di tutto per fornire, utilizzando le analogie positive, una soluzione a un quesito che ci si sia posti sulla realtà e che si sia tradotto, sempre in base a quell'analogia, in un quesito relativo al modello. Può servire anche per suggerire delle ipotesi, nel caso che si ritenga che analogie neutre siano positive.

Il modello potrà invece essere fonte di equivoci e di errori se, acriticamente, si darà per scontato che le analogie neutre siano analogie positive mentre un'analisi più accurata potrebbe portare a concludere che si tratta di analogie negative e che quindi è scorretto attribuire al sistema originale le corrispondenti proprietà del modello.

Veniamo ora più precisamente al legame fra modello e teoria. Attribuendo a questi due termini il significato suggerito dal buon senso si può dire che la teoria è qualche cosa di più generale mentre il modello qualche cosa di più particolare. Il rapporto tra teoria e modello, quindi, è un rapporto a un solo senso, un rapporto di *immersione*, e non un rapporto bidirezionale come l'analogia. La sche-

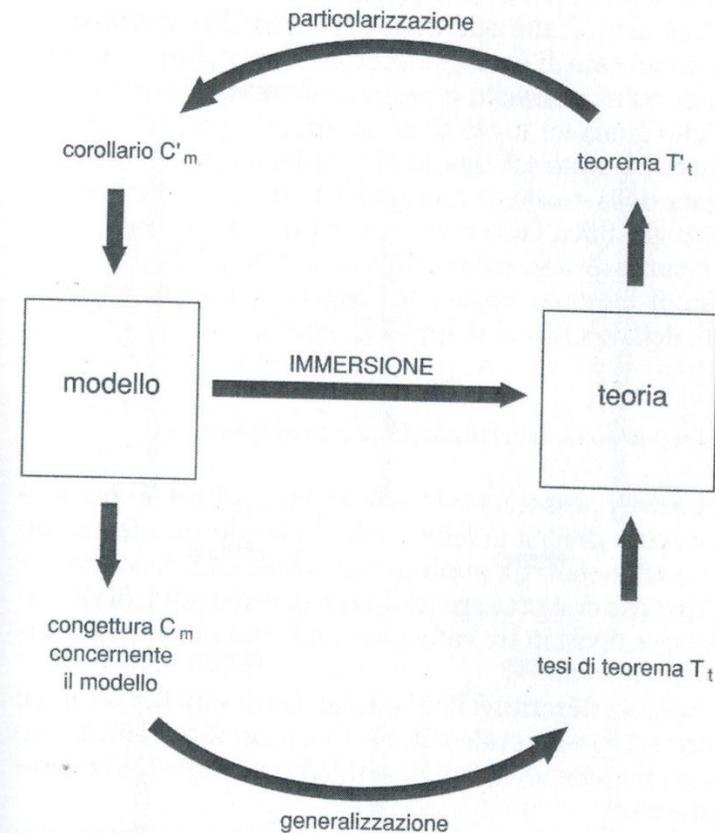


Fig. 4.2 Rapporto tra modello e teoria. Nel passaggio dal modello alla teoria si ha una generalizzazione, mentre in quello dalla teoria al modello si ha una particolarizzazione: il rapporto è unidirezionale.

matizzazione di questo rapporto è suggerita dalla figura 4.2.

Una congettura relativa a un modello può essere generalizzata nella tesi di un teorema, che la teoria ci consente di dimostrare rigorosamente. Il teorema potrà poi essere particolarizzato in un corollario che riguarda più specificamente il modello, e che potrà essere utilizzato per determinare le risposte ai quesiti formulati nel modello stesso.

Mettendo insieme le due figure 4.1 e 4.2, che descrivono i legami tra realtà e modello e tra modello e teoria, si ottiene lo schema di figura 4.3, che collega tra loro i tre concetti di realtà, modello e teoria, e dove è evidente che il modello gioca un ruolo di mediazione tra realtà e teoria. Seguendo questo schema, se si guardano le cose dal punto di vista della realtà, il modello e la teoria coincidono, e questo giustifica l'uso delle due espressioni come sinonimi, mentre se si guardano le cose dal punto di vista della teoria, il modello appare un oggetto come un altro fra quelli della realtà cui si applica la teoria.

4.4 Descrizione, interpretazione e predizione

I modelli possono essere concepiti e progettati per motivi e scopi diversi poiché anche lo stesso problema può essere affrontato da punti di vista differenti, secondo l'obiettivo che ci si prefigge. In base a questo i modelli possono essere divisi in tre categorie: i modelli *descrittivi*, *interpretativi* e *predittivi*.

I modelli descrittivi hanno lo scopo di sintetizzare in un meccanismo o in un algoritmo i dati osservati relativamente a un fenomeno, ai fini di renderne più agevole la comprensione.

I modelli interpretativi cercano di spiegare il comportamento di un fenomeno e la sua evoluzione ricorrendo a leggi generali e ipotizzando strutture interne che giustificano il comportamento esterno.

I modelli predittivi si propongono infine di prevedere l'andamento futuro di un fenomeno, almeno entro un dato orizzonte temporale.

La differenza di caratteristiche fra un modello descrittivo e uno predittivo risulta chiara facendo riferimento a un esempio classico della storia della scienza, quello relativo al moto dei pianeti del sistema solare.

L'astronomo danese Tycho Brahe, dopo averli osserva-

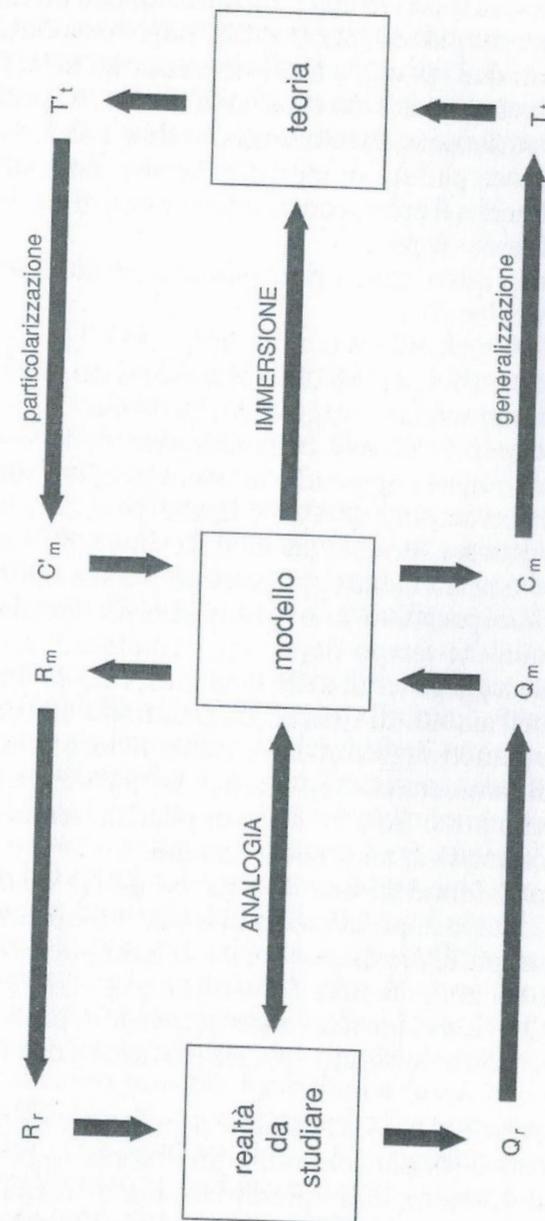


Fig. 4.3 Schema dei legami tra realtà, modello e teoria.

ti a lungo, aveva raccolto una gran messe di dati molto precisi sul moto dei pianeti (per quel che potevano consentire gli strumenti dell'epoca), e li aveva presentati nella forma tabellare di efemeridi. Non si trattava di un vero e proprio modello e parlarne in questo senso sarebbe una forzatura. È lecito invece parlare di modello del sistema solare nel caso di Johannes Kepler, che sintetizzò i dati di Tycho nelle sue tre famose leggi:

- 1) i pianeti descrivono orbite ellittiche, di cui il Sole occupa uno dei fuochi;
- 2) le velocità areali sono costanti;
- 3) i quadrati dei periodi di rivoluzione sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori delle orbite.

Il modello di Keplero è certamente un modello di tipo descrittivo, poiché compendia in pochi elementi sintetici i numerosi dati raccolti da Tycho Brahe. Non ci sembra di poterlo giudicare, invece, un modello interpretativo, nel senso che non dà alcuna spiegazione del fenomeno. Un modello interpretativo è invece quello fornito da Isaac Newton qualche tempo dopo, che riconduce il moto dei pianeti alle leggi generali della dinamica, e ne dà una spiegazione nell'ambito di questa. La traiettoria ellittica percorsa dai pianeti suggerita da Keplero, le loro velocità e i periodi di rivoluzione sono il risultato della forza di gravità esercitata dal Sole su ciascun pianeta, tenuto conto della sua velocità in un generico istante.

Entrambi i modelli invece possono essere considerati predittivi, ma lo sono in modo diverso. Il modello di Keplero consente la previsione del moto futuro dei pianeti fino ad allora noti, ma non è giustificato estenderlo anche ad altri. Quello di Newton consente invece di prevedere la traiettoria non solo di tutti i pianeti, ma anche di altri corpi celesti.

Da questo esempio si potrebbe pensare che un modello interpretativo sia più adatto di uno descrittivo per venire utilizzato come modello predittivo, ma in realtà questo non è sempre vero. Pensiamo per esempio alle maree, pre-

vedibili con notevole precisione senza che tuttavia si sappia abbastanza dei processi fisici implicati. Si ha a che fare, cioè, con un modello descrittivo che funziona molto bene anche per fare previsioni, ma che non può essere considerato un modello interpretativo.

4.5 La pertinenza

Quando si mette a punto un modello ci si scontra con un problema — quello della *pertinenza* — che riguarda la scelta (entro certi limiti arbitraria) di ciò di cui si deve tenere conto nel formulare il modello, in una parola di ciò che si considera *pertinente*.

Le analogie positive riguarderanno per esempio solo gli aspetti pertinenti. Degli altri aspetti non sarà necessario tenere conto e generalmente si sceglierà il modello più semplice e economico in grado di giustificare solo ciò che interessa.

A questo proposito può essere interessante ricordare un aneddoto della vita di Winston Churchill. L'ammiraglio inglese si vantava molto dei risultati ottenuti dai reparti che si occupavano di mimetizzazione, che avevano realizzato finte navi militari da tenere alla fonda insieme a quelle vere per ingannare i bombardieri nemici. Sembra che Churchill riuscì a distinguere a colpo d'occhio le navi vere da quelle finte basandosi, si seppe poi, semplicemente sull'osservazione dei gabbiani, che si affollavano solo intorno a quelle vere, in attesa di cibo. Naturalmente questo non implica che lo stratagemma non fosse utile, perché i bombardieri non avrebbero potuto basarsi sugli elementi olfattivi cui erano sensibili i gabbiani e nemmeno accorgersi dell'affollarsi di questi intorno a certe sagome. Dal punto di vista dell'esigenza di trarre in inganno i bombardieri i modelli costruiti andavano quindi benissimo.

Ancora in rapporto a questo problema si può ricordare la frase, spesso ripetuta fra coloro che si occupano di ana-

lisi delle attività neurocerebrali, secondo la quale il miglior modello del cervello è il cervello stesso (frase che può essere estesa a qualsiasi altro oggetto di studio). L'affermazione è valida se siamo interessati a tutti gli aspetti della struttura e del funzionamento del cervello, ma se non è così, e questa è la circostanza più comune, il miglior modello è quello più semplice, capace di riprodurre solo gli aspetti che ci interessano.

Il problema della pertinenza può essere richiamato a proposito delle riflessioni di Newton sulla gravitazione universale, suggerite dalla osservazione della caduta di una mela da un albero. Newton si chiese perché, se la mela cade sulla Terra, non dovrebbe cadere anche la Luna. Si rispose che tutti gli oggetti, in certo modo, cadono: la mela lungo la verticale, perché si stacca dall'albero con velocità iniziale nulla, una palla di cannone secondo una traiettoria parabolica, per la spinta iniziale, e la Luna secondo una traiettoria ellittica.

Newton supera così la tradizionale distinzione operata da Aristotele per cui le leggi di moto cui sono soggetti i corpi sono differenti secondo che i corpi appartengano al mondo sublunare o a quello dei cieli, e arriva invece alla conclusione che le une e le altre sono effetto di una stessa legge di grandiosa portata.

Che cosa sarebbe accaduto se si fosse trattato di una giornata ventosa e Newton avesse visto cadere, accanto alla mela, una foglia secca o la piuma di un uccello, e si fosse proposto di dare una descrizione unitaria di tutti questi fenomeni? Probabilmente, in questo caso, neppure il grande Newton sarebbe riuscito a risolvere il cumulo e l'intreccio di tanti problemi.

Quando una sintesi scientifica si è ormai affermata, sembra ovvia la scelta che ha portato a giudicare pertinenti certi aspetti alla teoria che si voleva fondare e non pertinenti certi altri. Per i fondatori di questa sintesi scientifica, però, non è così ovvio. La grandiosità dell'intuizione newtoniana non sta solo nell'aver considerato come lo stesso

fenomeno il moto rettilineo della mela e quello ellittico della Luna (nonostante la tradizione aristotelica li avesse attribuiti a due diverse sfere di fenomeni), ma anche quello di avere trattato separatamente il moto della mela, considerandolo non apprezzabilmente influenzato dalla resistenza del mezzo e dai movimenti dell'aria, da quello di una foglia secca, in cui questi elementi giocano in maniera prevalente rispetto alla gravità (nonostante la tradizione aristotelica li avesse attribuiti alla stessa sfera di fenomeni).

Con Galileo, Cartesio e Newton prevalse il metodo analitico: ogni fenomeno può essere influenzato da più fattori, ma si ottengono risultati validi solo considerandone separatamente gli effetti. È questo, per esempio, il senso degli esperimenti con la macchina pneumatica che mostravano che, nel vuoto, una piuma cade verticalmente come un pezzo di piombo e i due impiegano lo stesso tempo per compiere un uguale percorso. L'esperimento non deve essere necessariamente realistico, ma deve, secondo il punto di vista analitico, far vedere che cosa accade quando sono in gioco solo gli agenti che si considerano pertinenti a una certa teoria, e cioè, nel caso considerato, quando la resistenza del mezzo e il movimento dell'aria non soverchiano la gravità.

Il problema è di pertinenza e non di importanza pratica, e lo è nell'ambito di una determinata teoria. Nel caso della mela e in quello della piuma entrano in gioco sia la forza di gravità sia la resistenza del mezzo: la prima prevale nella caduta della mela, la seconda in quella della piuma. Talvolta prevale un fattore e talvolta un altro. In qualche caso, come nel moto dei proiettili, sono presenti con pesi paragonabili.

Queste considerazioni, valide in qualsiasi disciplina scientifica, valgono anche per i modelli.

Un modello è costruito per descrivere, interpretare o prevedere. Gli aspetti pertinenti allo scopo considerato devono essere tenuti in conto, mentre gli altri possono non

esserlo. In alcuni casi, se prendendoli in considerazione si incorre in inutili complicazioni e maggiori costi, è meglio che vengano tralasciati.

4.6 *L'uso dei modelli matematici nelle varie scienze*

I modelli matematici vengono impiegati nel modo più tipico in fisica. Ogni fenomeno vi viene descritto da leggi esplicite mediante opportune equazioni, i cui parametri hanno un preciso significato. Le grandezze fisiche sono suscettibili di misure, che devono avvenire secondo specifiche procedure. L'uso di modelli matematici è così ovvio che l'espressione non è neppure esplicitata, nella pratica, come avviene invece in quei campi in cui accanto ai modelli matematici si utilizzano modelli fisici (come nell'ingegneria) o in quelli in cui i modelli formalizzati in generale coesistono con altri tipi di descrizione più generici e qualitativi.

È una caratteristica intrinseca della fisica che la rende facilmente formalizzabile in termini matematici? Poiché nessuna scienza è nata, come Pallade dal capo di Zeus, già vestita e armata di tutto punto, una breve indagine storica può contribuire a trovare la risposta a questa domanda.

Tutte le discipline che oggi hanno una veste formalizzata hanno attraversato una fase preliminare, nella quale i problemi venivano trattati in termini generici e, spesso, con riferimento a esigenze di tipo pratico anziché di tipo conoscitivo.

La geometria è stata per secoli la sola disciplina a fornire un paradigma e un modello ideale per ogni campo di studio di carattere scientifico. Ma la sistematizzazione euclidea non può farci dimenticare le origini empiriche e operative di tale disciplina che nasce, storicamente, sulle rive del Nilo e dell'Eufrate con la formulazione e la generalizzazione di regole pratiche utili per ricostruire i confini dei campi dopo le benefiche alluvioni o per seguire il mo-

vimento degli astri. La stessa fisica è passata attraverso fasi di formulazione filosofica di teorie ben poco quantitative. Successivamente si sono imposte elaborazioni empiriche di leggi, a carattere quantitativo, ma formulate in termini verbali e non mediante formule. È solo molto più tardi che si è arrivati a una effettiva formalizzazione. La chimica, rispetto alla fisica, risente ancora del ritardo di due secoli che intercorre fra Galileo e Lavoisier. Anche in questo caso in una prima fase si è fatto uso di descrizioni verbali o di formalizzazioni parziali e solo in un momento successivo sono state adottate impostazioni rigorose e complete, con la prevalenza di una rappresentazione globale dei fenomeni di interesse in termini compiutamente matematicizzati. Un'impostazione di quest'ultimo tipo è ancora ben lontana dal compimento in biologia, o ancor più, in psicologia. In economia, invece, all'impostazione tradizionale che si serve di schemi concettuali illustrati a parole, si affianca già da tempo una formulazione basata su rigorose espressioni matematiche. In sociologia e in linguistica si va diffondendo da poco l'uso di modelli matematici elaborati e complessi. Ma in tutte queste scienze si è pur sempre partiti da impostazioni qualitative.

Da queste osservazioni sembra dunque che in tutte le scienze si stia seguendo un cammino che va dai modelli concettuali, che si servono del linguaggio di tutti i giorni, fino ai modelli matematici, compiutamente formalizzati e quantificati. In effetti, ragionare in questi termini costituisce una forzatura dello sviluppo storico effettivo di queste discipline, che è in effetti più complesso, ma è uno schema a suo modo stimolante, che utilizzeremo qui per fare alcune riflessioni.

Le fasi di passaggio dal modello concettuale (che rappresenta la formalizzazione del problema mediante il linguaggio comune, grafici di relazione o disegni) al modello matematico vero e proprio non devono necessariamente essere successive l'una all'altra. Allo stesso modo la struttura formale, nella quale ordinare i fenomeni, ha precedu-

to talvolta la raccolta di dati quantitativi ma, più spesso, è accaduto il contrario. Più frequentemente ancora c'è stato uno sviluppo alternante, con fasi di raccolta di dati e di sintesi teoriche che si succedevano secondo uno schema che può essere descritto efficacemente dalla formula dell'*inverare il certo e accertare il vero* di Gianbattista Vico.

In ogni caso un modello formale astratto è quasi sempre privo di interesse, e forse anche di significato, se non si può procedere alla sua convalida mediante dati sperimentali quantitativi, e se non può essere impiegato per prevedere le risposte che il sistema rappresentato da quel modello darà a nuove e diverse sollecitazioni. Ma anche un insieme molto ricco di dati rimane poco significativo e poco utilizzabile se non lo si inquadra in un modello di sintesi.

Rimane il problema di capire perché, nel passaggio dai modelli concettuali ai modelli matematici, le diverse scienze abbiano seguito tempi diversi. Semplificando e banalizzando si potrebbero individuare due fattori principali: la maggiore o minore semplicità delle leggi matematiche che descrivono i fenomeni e il fatto che i fenomeni elementari pertinenti si presentino, nella realtà concreta, a volte isolati e a volte commisti con altri fenomeni pertinenti. Con riferimento a questo secondo aspetto ci si potrebbe servire dell'analogia, forse un po' ardita ma suggestiva, tra il rapporto segnale/disturbo come è considerato nella teoria dell'informazione e nella pratica delle telecomunicazioni. Il fenomeno elementare pertinente costituisce l'equivalente del messaggio che deve essere estratto da un segnale corrotto da disturbi e da rumori di fondo. Quanto più elevato è il rapporto segnale/disturbo tanto più facile è la ricostruzione del messaggio.

Considerando i due fattori citati, viene spontaneo pensare anzitutto che si siano sviluppate prima le discipline scientifiche alle quali erano pertinenti leggi semplici, e in seguito quelle i cui fenomeni sono intrinsecamente più complicati. Ed è anche spontaneo pensare che si siano svi-

luppate prima le discipline relative allo studio di fenomeni che si presentano in forma isolata o con scarsa commistione con altri fenomeni (situazione che corrisponde a un alto rapporto segnale/disturbo) e solo successivamente quelle che riguardano fenomeni che si presentano sempre collegati tra loro.

Queste considerazioni ci dicono perché, all'inizio dell'età moderna, si siano sviluppate come scienze autonome anzitutto la meccanica e l'astronomia. In entrambe, i fenomeni che allora erano di maggiore interesse sono rappresentati da leggi molto semplici (le leggi elementari della dinamica, la legge della gravitazione). In astronomia, nella quale non si possono fare esperimenti, i fenomeni considerati in quella fase del suo sviluppo (i moti dei pianeti e delle comete) si presentano in forma quasi pura (il moto di un pianeta è determinato dal Sole e influenzato dagli altri pianeti in misura molto piccola, il che significa che il rapporto segnale/disturbo è molto elevato); nella meccanica, da Galileo in avanti, si adottarono il metodo sperimentale e il punto di vista analitico che vedevano il fenomeno studiato in forma isolata, perturbato il meno possibile dagli altri fenomeni in gioco. Così Galileo, per esempio, sperimentava la caduta dei gravi facendo rotolare una biglia lungo un piano inclinato, ma si preoccupava di fare in modo che il piano fosse quanto più levigato possibile per ridurre gli effetti degli attriti fino a valori trascurabili, e cioè (per continuare a usare l'analogia prima introdotta) per migliorare il rapporto segnale/disturbo.

Altri problemi di astronomia, altri capitoli della fisica (la termologia, l'elettromagnetismo), altre scienze, come la chimica, si sono sviluppate più tardi perché le relative leggi erano intrinsecamente meno semplici o perché era più difficile concepire e realizzare l'esperimento desiderato eliminando le concause perturbanti.

Nella biologia ci sono stati ritardi nell'uso di modelli matematici proprio perché i fenomeni anche più semplici della vita sono intrinsecamente complessi e, quindi, per

descriverli occorrono leggi complicate, ed è sempre difficile concepire esperimenti che si conservino significativi pur essendo semplici.

Queste considerazioni valgono a maggior ragione per le scienze dell'uomo e della società, il cui ritardo nell'uso dei modelli matematici si spiega da un lato con l'impossibilità o l'illiceità di esperimenti con le caratteristiche appena ricordate, e dall'altro con l'intrinseca complessità dei fenomeni da esaminare.

Naturalmente il problema è aperto ed è ricco di implicazioni filosofiche. È necessario pensare che le scienze della natura e quelle dell'uomo e della società debbano seguire lo stesso percorso evolutivo? O supporre che il loro sviluppo avvenga secondo il medesimo schema anche se con inizio e durata diversi? Quest'ultima impostazione, condivisa dai positivisti e dai loro eredi, è invece combattuta dai seguaci di altre scuole. Per esempio il filosofo tedesco Wilhelm Windelband, nel quadro della filosofia dei valori, sosteneva che le scienze della natura sono, nella loro essenza, diverse da quelle dell'uomo e della società, perché le prime hanno scopi «nomotetici», cioè indirizzati alla formulazione di leggi generali, mentre le seconde hanno intenti «idiografici», cioè rivolti alla descrizione di singole situazioni particolari.

Qui non si vuole entrare nel merito di una disputa di questo tipo; ci si limita a constatare che, anche nel campo delle scienze dell'uomo e della società, è vivissimo l'interesse per i modelli e si cerca di pervenire a modelli sempre più perfettamente formalizzati e sempre più largamente quantificati. Il ritardo nella formulazione di modelli soddisfacenti in queste discipline nel confronto della fisica, della chimica e delle scienze della vita si può interpretare ricorrendo alle considerazioni alle quali si è accennato.

4.7 La scelta della scala temporale

Si è visto che un modello è considerato utile se riesce a giustificare gli aspetti del comportamento di un sistema originale che sono *pertinenti* al punto di vista da cui si considerano i fenomeni, nonostante vi possano essere dei limiti per le ipotesi, implicite o esplicite, in base alle quali il modello è stato costruito. Questo è valido anche quando si faccia riferimento alla scelta dell'orizzonte temporale entro il quale si considera valido il modello.

Le unità di misura del tempo, naturalmente, possono essere molto diverse a seconda delle applicazioni. I tempi caratteristici dell'evoluzione del cosmo sono enormemente maggiori di quelli dell'evoluzione geologica della Terra, e questi a loro volta sono di ordine di grandezza diverso rispetto ai tempi caratteristici dell'evoluzione biologica; scale di tempi ancora inferiori caratterizzano l'evoluzione dell'uomo, la sua storia e la sua vita individuale.

In generale è difficile trovare un modello che sia abbastanza semplice e che nello stesso tempo sia valido per fenomeni che si svolgono in milioni di anni e fenomeni che richiedono frazioni di secondo.

L'importanza della scelta della scala temporale da prendere in considerazione nella costruzione di un modello può essere chiarita facendo riferimento alle figure 4.4-4.7, che riguardano la crescita di una popolazione animale in un ambiente con risorse rinnovabili limitate (che determinano quella che gli ecologi chiamano la capacità portante di una popolazione).

La figura 4.4 rappresenta il fenomeno lungo un arco di tempo piuttosto esteso.

Guardando le cose nell'intervallo di tempo compreso tra t_0 e t_1 si può dire che la popolazione tende ad aumentare, in una prima fase rapidamente, poi più lentamente finché tende a raggiungere il valore che corrisponde alla capacità portante. In termini formali si può dare del fenomeno un modello di crescita attraverso una curva con un

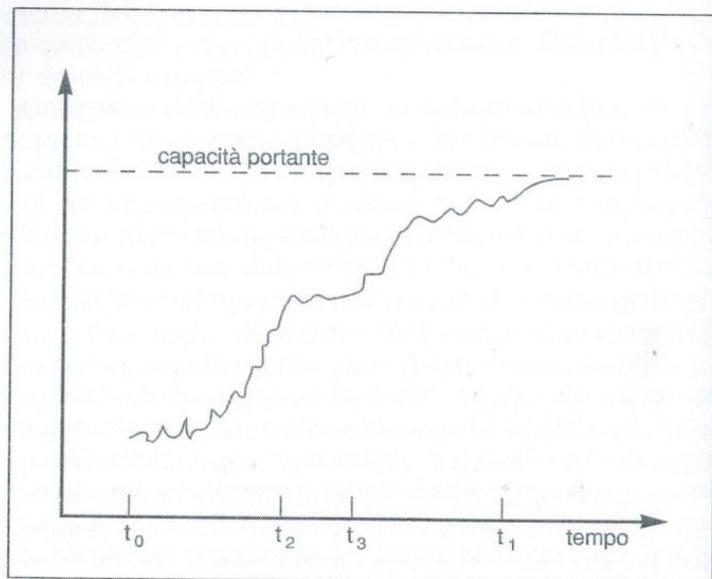


Fig. 4.4 Curva sperimentale della crescita di una popolazione con risorse rinnovabili limitate. La popolazione cresce fino a raggiungere un valore limite, la capacità portante, e poi si mantiene costante.

andamento ben preciso, chiamata *funzione logistica*, alla quale corrisponde l'andamento «sigmoide» della figura 4.5.

La crescita «a logistica» rappresenta la soluzione di equazioni che corrispondono a ipotesi ben precise sul legame fra i coefficienti di natalità e di mortalità e le risorse disponibili.

La curva teorica di figura 4.5 si discosta un po' dalla curva «sperimentale» di figura 4.4. In quest'ultima possiamo individuare alcune oscillazioni di modesta ampiezza e di periodo abbastanza lungo, alle quali si sovrappone, come in tutte le curve sperimentali, il rumore di fondo, di tipico carattere aleatorio, di ampiezza limitata e di alta frequenza.

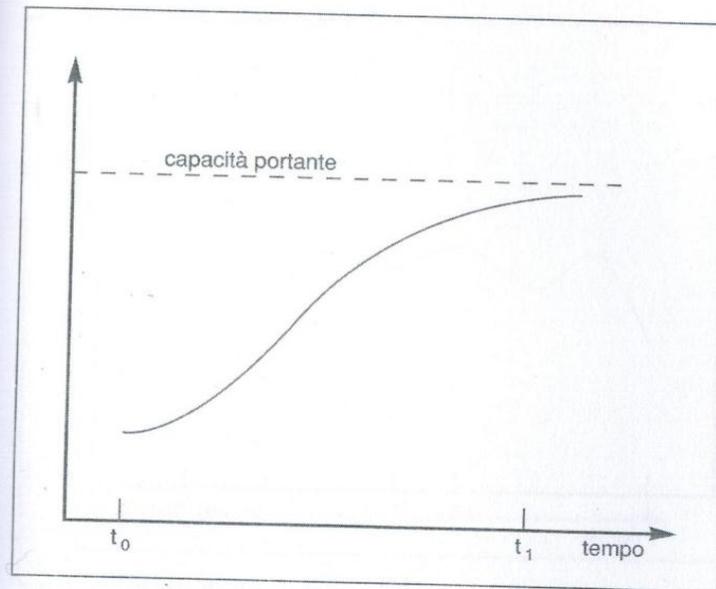


Fig. 4.5 Curva teorica che interpola la crescita della popolazione illustrata nella figura precedente.

Per studiare il fenomeno nell'arco di tempo da t_0 a t_1 è lecito ripulire la curva della componente aleatoria ed eventualmente anche dalla oscillazione lenta, poiché il fenomeno che ci interessa su quell'intervallo è l'andamento sigmoide. Se però avessimo considerato per esempio solo l'intervallo di tempo compreso tra t_2 e t_3 , riportato, espandendo la scala dei tempi, nella figura 4.6, il fenomeno sarebbe stato interpretato in modo alquanto diverso e cioè come un fenomeno pressoché costante, con fluttuazioni di carattere aleatorio. Se infine ci si fosse limitati all'intervallo t_4 - t_5 della figura 4.6, riportato in scala ulteriormente allargata nella figura 4.7 ci saremmo addirittura fatti l'idea di un fenomeno abbastanza regolare ad andamento discendente.

Dobbiamo concludere che è valido solo il primo mo-

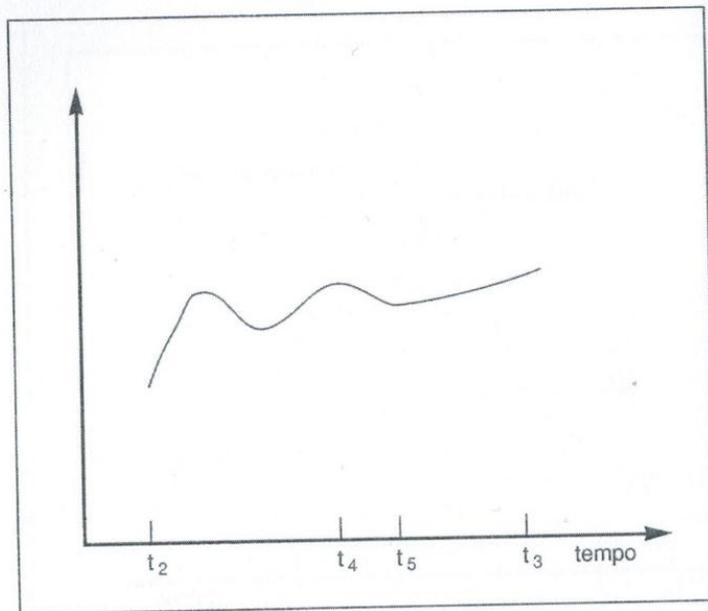


Fig. 4.6 Andamento della popolazione nell'intervallo di tempo t_2-t_3 della figura 4.4. Il fenomeno ha in questa fase un andamento quasi costante.

dello e che negli altri due casi si è compiuta una scelta sbagliata dell'orizzonte temporale e della scala di osservazione?

Dipende. Certo la prima schematizzazione corrisponde a un modello interpretativo ricco di significato. Ma se si devono effettuare previsioni a breve o a brevissimo termine, gli andamenti relativi all'intervallo t_2-t_3 o all'intervallo t_4-t_5 potrebbero apparire preferibili.

In conclusione si può dire che allargando o stringendo l'orizzonte temporale è possibile passare a modelli che risultano anche profondamente diversi fra loro ma che possono risultare tutti utili, sia pure in campi diversi.

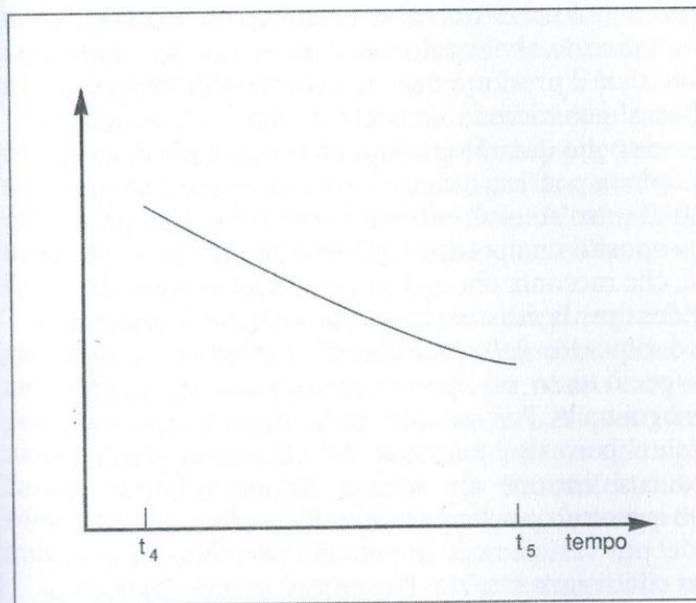


Fig. 4.7 Andamento della popolazione nell'intervallo di tempo t_4-t_5 della figura 4.6. In questo caso il fenomeno appare decrescente.

4.8 Modelli e metafore

L'uso di modelli porta a pensare, non sempre in piena consapevolezza, che la realtà possa essere ricondotta a comportamenti idealizzati ciascuno dei quali è semplice e il cui numero è modesto. I numerosissimi, più o meno complicati, comportamenti reali possono essere ricondotti o a uno di questi comportamenti idealizzati semplici o a una loro combinazione, secondo un numero abbastanza limitato di schemi diversi.

D'altra parte il calcolo combinatorio ci insegna che utilizzando anche pochi elementi, appartenenti anche a pochi tipi diversi, secondo schemi non troppo numerosi, si può ottenere un numero di combinazioni anche straordi-

nariamente elevato. Non a caso i primi matematici che si sono occupati di calcolo combinatorio hanno usato il punto esclamativo, simbolo del loro stupore, per designare il *fattoriale*, cioè il prodotto degli interi consecutivi a partire da 1 fino al generico numero n . La stessa sensazione di stupore ci coglie quando guardiamo le immagini di un caleidoscopio se pensiamo che si formano a partire da pochi pezzetti di vetro colorato riflessi su due o tre specchi. Esiste in proposito un apologo sull'inventore del gioco degli scacchi, che racconta che egli chiese al suo sovrano, come ricompensa per la sua invenzione, un chicco di grano per il primo riquadro della scacchiera, due per il secondo, quattro per il terzo, otto per il quarto, e così via, raddoppiando ogni volta. Per riempire tutti i riquadri della scacchiera sarebbero stati necessari 2^{64} chicchi di grano, un numero così enorme che sfugge all'intuito, e tale che avrebbe ipotecato per lungo tempo l'intera produzione di grano del pur vasto e ricco impero del sovrano, che aveva creduto con leggerezza che l'inventore avesse chiesto un premio irrisorio.

La metafora sostituiva spesso nell'antichità classica il modello; essa in fondo non è che l'indicazione di un caso concreto nel quale si attua, nella forma più semplice e più pulita, uno di quei comportamenti idealizzati che costituiscono la base per la schematizzazione di ciascun comportamento reale.

Riferendoci a modelli di evoluzione temporale, non mancano certamente immagini per rappresentare un andamento aleatorio, almeno apparentemente privo di qualsiasi regolarità, caotico: si possono innanzitutto ricordare i dadi (dal nome latino *alea* deriva il termine *aleatorio*) e accanto a questi il moto dell'acqua di un torrente in un vortice o la caduta di una foglia secca in una giornata di vento.

Per indicare fenomeni il cui comportamento sembra rimanere sempre uguale nel tempo, senza inizio né fine, si usano immagini come quella della roccia o della quercia, che però sembra più appropriata per rappresentare fenome-

ni che hanno avuto una crescita iniziale e che hanno poi raggiunto un livello di assestamento che sembra destinato a durare indefinitamente.

Fenomeni di questo genere sono certamente rari: più comune è il caso in cui alla nascita e allo sviluppo succedono la decadenza e la morte, e in questi casi la metafora più diffusa è quella del corso diurno del Sole. Alba, meriggio, tramonto vengono spesso riferite alla vita dell'uomo o all'evoluzione di una civiltà.

Il corso del Sole, però, che si ripete ogni giorno, cui è legata la luminosità del cielo, costituisce una simbolizzazione suggestiva anche per i fenomeni che hanno carattere periodico, che si ripetono in cicli regolari. A questi fenomeni offrono suggestive immagini anche le stagioni dell'anno, specialmente nel modo in cui si manifestano nel Mediterraneo, culla delle culture che hanno fatto uso delle immagini che abbiamo citato.

La storia delle parole è spesso anche la storia delle idee. Così, passando in rassegna alcune metafore del nostro linguaggio corrente, la maggior parte delle quali risalgono all'antichità classica, ci rendiamo conto che nessuna di queste è adatta a rappresentare l'andamento di crescita illimitata del progresso. L'idea di progresso oggi è certamente in crisi, ma molte generazioni vi hanno creduto. In ogni modo non è necessario che l'orizzonte temporale di validità di un modello si estenda all'infinito (in entrambe le direzioni): con un modello si può rappresentare l'andamento attuale di un fenomeno e ricavare efficaci estrapolazioni anche senza che esso sia valido per tutti i tempi. È lecito adottarlo anche ignorandone l'orizzonte temporale e il modello che dovrà sostituirlo quando non fosse più valido.

Oggi anche chi non crede più ciecamente in un progresso indefinito può usare modelli di crescita esponenziale per descriverlo, ma nel mondo classico e nel medioevo non vi erano metafore che indicassero una crescita illimitata. Non si concepivano forme di crescita che non fossero

seguite da una stabilizzazione (la quercia), o da un occaso (il corso del Sole), o eventualmente dal ripetersi ciclico di altre crescite e altre decadenze (il rinnovarsi del corso del Sole rappresentato dalla immagine mitica della fenice che risorge dalle sue ceneri, il rinnovarsi delle stagioni dell'anno, il fluire e rifluire della marea).

Può essere utile, a questo punto, ricordare quanto si era detto nel primo capitolo e cioè che schemi a retroazione molto semplici (che usano un piccolo numero di componenti appartenenti a un piccolo numero di tipi diversi) hanno la possibilità di illustrare un gran numero di comportamenti differenziati tra loro come la crescita fino a un valore costante, i cicli, la crescita esponenziale e altri ancora. Non farà meraviglia, quindi, che possano venire suggeriti modelli a retroazione per spiegare il comportamento di fenomeni che appartengono a discipline diverse. Alla presentazione di questi modelli sono dedicati, come si è detto, i capitoli successivi, che trattano dei modelli a retroazione nella fisica, nell'economia e nelle scienze della vita e in ultimo nella cibernetica.