

ESERCIZI DI GEOMETRIA 1, FOGLIO 8

Trieste, 1 dicembre 2018

1. Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare rappresentata rispetto alle basi canoniche dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Trovare la matrice che rappresenta f rispetto alle basi B_1 formata da $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$, e B' da $(1, 0)$, $(1, 1)$.

2. Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 27 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

3. Per ogni $n \geq 1$ calcolare il determinante della matrice $n \times n$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

4. Siano x_1, \dots, x_n delle indeterminate. Dimostrare che

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i < j} (x_j - x_i).$$

Si tratta del determinante detto *di Vandermonde*. (Suggerimento: trasformare la prima colonna in $(1, 0, 0, \dots, 0)$, con trasformazioni elementari sulle righe come segue: togliere a ogni riga un multiplo della riga precedente, ...)

5. Dimostrare che una matrice $A \in M(m \times n, K)$ ha rango r se e solo se A ha una sottomatrice invertibile $r \times r$, ma nessuna sottomatrice invertibile $s \times s$, con $s > r$.