Esercizi di Geometria
Ingegneria Industriale e Navale 2018/2019
dodicesimo foglio

December 3, 2018

1. Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$ una matrice quadrata. Definiamo la **traccia** di A come la somma degli elementi della diagonale (principale) di A:

$$\mathrm{Tr}(A) := a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

Si dimostri che l'applicazione

$$\mathrm{Tr} : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K},$$

che associa ad ogni matrice la sua traccia, è una applicazione lineare.

Si determini la dimensione di $\ker(\mathrm{Tr})$; nel caso $n = 2$, se ne determini una sua base.

2. Siano $n, m \in \mathbb{N}$ e si consideri l'applicazione

$$t : M_{m,n}(\mathbb{K}) \to M_{n,m}(\mathbb{K}), \quad t(A) = {}^t\mathrm{A}$$

che ad ogni matrice associa la sua trasposta. Si dimostri che è un'applicazione lineare e che è un isomorfismo di spazi vettoriali.

3. Si dica, motivando la risposta, se esiste un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$f\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4. Si dica, motivando la risposta, se esiste un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

In caso affermativo si determini la matrice $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$ che rappresenta f nella base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$.

Infine, si determinino le dimensioni e delle equazioni cartesiane per i sottospazi vettoriali $\ker(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$.

5. Sia
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 & 3 \\ -3 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R}),$$
e sia $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata ad A. Si determinino delle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^4$ ed $\mathbb{R}^3$ rispettivamente, tali che si abbia
$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(L_A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Si consideri l'applicazione lineare
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad f\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 - r_2 \\ r_1 + 2r_2 \\ r_1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Si scriva la matrice $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)$ che rappresenta f nelle basi
$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2, \qquad \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$
   (b) Si determini il rango di f ed una base dell'immagine $\mathrm{Im}(f)$.
   (c) Si determini la dimensione, delle equazioni cartesiane e una base per il nucleo $\ker(f)$.

7. Sia $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 2 in una indeterminata t, e si consideri l'operatore di derivazione
$$D : \mathbb{R}[t]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[t]_{\leq 2}, \qquad D(p(t)) = p'(t).$$
Osserviamo che una base di $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ è data dai polinomi
$$\mathcal{B} = \{1, t, t^2\},$$
quindi risulta
$$\dim \mathbb{R}[t]_{\leq 2} = 3.$$
Si scriva la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(D)$ che rappresenta D nella base $\mathcal{B}$.

Si determinino i sottospazi $\ker(D)$ e $\mathrm{Im}(D)$ con le rispettive dimensioni.