Spazi L^p

Alcune disuguaglianze:

Sia p, $1 < p < \infty$, per ogni $f, g \geq 0$

$$(f+g)^p \leq 2^{p-1}(f^p + g^p)$$

e vale l'ug. se $f = g$.

Dim Supp. $f, g \neq 0$ e mostriamo $t = f/g$

$$(t+1)^p \leq 2^{p-1}(t^p + 1)$$

$$F(t) = 2^{p-1}(t^p + 1) - (t+1)^p \quad , \quad t > 0$$

$$F'(t) = 2^{p-1} p\, t^{p-1} - p(t+1)^{p-1} =$$

$$= p\left(2^{p-1} t^{p-1} - (t+1)^{p-1}\right)$$

$t = 1$

$$F'(1) = p\left(2^{p-1} - 2^{p-1}\right) = 0$$

$t < 1$ $\quad F'(t) = p\left(2^{p-1} - \left(\frac{t+1}{t}\right)^{p-1}\right) t^{p-1}$

$\left(\frac{t+1}{t} = 1 + \frac{1}{t}\right)$: $F'(t) < 0$

$t > 1$: $F'(t) > 0$

$t = 1$ è di minimo per F

$F(t) \geq F(1) = 0$

Quindi

$$(t+1)^p \leq 2^{p-1}(t^p+1) \quad \forall t > 0$$

$$= \qquad\qquad \text{se } t=1 \quad \square$$

<u>Disug. di Young</u>

Sia $1 < p < \infty$, sia q t.c. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

(p, q : esp. coniugati),

$\forall\, a, b > 0$

$$\boxed{ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q}$$

(N.B.: $p = q = 2$ è la dis. di Schwarz!).

<u>Dim.</u> $t = \frac{a^p}{b^q}$, $\frac{ab}{b^q} = ?$

$$\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p}$$

$$\boxed{q = \frac{p}{p-1}, \quad q-1 = \frac{p}{p-1} - 1 = \frac{1}{p-1}}$$

$$b^q = b^{\frac{p}{p-1}}.$$

$$\frac{ab}{b^q} = \frac{a}{b^{q-1}} = \frac{a}{b^{\frac{1}{p-1}}},$$

$$\left(\frac{ab}{b^q}\right)^p = \frac{a^p}{b^{p/p-1}} = \frac{a^p}{b^q} = t$$

$$\frac{a b}{b^q} = t^{1/p}$$

$$t^{1/p} \leq \frac{1}{p} t + 1/q \quad ?$$

$$\Phi(t) = \frac{1}{p} t + \frac{1}{q} - t^{1/p}$$

$$\Phi'(t) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} t^{1/p - 1} = \frac{1}{p}\left(1 - t^{\frac{1}{p}-1}\right)$$

$$\Phi'(t) = \begin{cases} < 0 & t < 1 \\ = 0 & t = 1 \\ > 0 & t > 1 \end{cases}$$

$t = 1$ è di min per Φ.

$$\Phi(t) \geq \Phi(1) = 0$$

$$\frac{1}{p} t + \frac{1}{q} - t^{1/p} \geq 0 \ ; \ = 0 \quad t = 1$$

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab \ ; \ = 0 \quad a^p = b^q \qquad \square$$

<u>Def.</u> Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno sp. con misura.
Siano f, g due funz. mis. diremo

$f \sim g$ se $f = g$ q.o.

$\sim$ è una rel. di equivalenza.

Indichiamo con $\{f\}$ la classe di equiv. di una funzione f.

Oss Sia $1 \le p < \infty$. Se $f \sim g$ allora

$$\int_X |f|^p = \int_X |g|^p$$

Quindi non c'è ambiguità nel porre

$$\int_X |\{f\}|^p = \int_X |f|^p .$$

Def. Sia f mis su X. Poniamo:

$$\sup_X \text{ess } f = \inf \{ K \in [-\infty, +\infty] \mid f \le K \text{ q.o.} \}$$

Osserviamo che $\forall \, g \in \{f\}$

$$\sup_X \text{ess } g = \sup_X \text{ess } f .$$

Def Prese f misurabile, poniamo

$$\|f\|_p = \|\{f\}\|_p = \begin{cases} \left(\int_X |f|^p\right)^{1/p} & , \text{ se } p<\infty, \\ \operatorname{supess}_X |f| & , \text{ se } p=\infty. \end{cases}$$

Def Per ogni p, $1 \leq p \leq \infty$ poniamo

$$L^p(X, \mathcal{Q}, \mu) = \left\{ \{f\} \;\middle|\; \|f\|_p < \infty \right\}.$$

Quando non c'è ambiguità sullo sp. con misura scriveremo più sinteticamente L^p o $L^p(X)$.

Proveremo che:

1. L^p è uno spazio vettoriale.
2. $\|\cdot\|_p$ verifica gli assiomi di norma su L^p
3. $\{L^p, \|\cdot\|_p\}$ è uno spazio vett. normato completo.

Cominciamo con il punto 1:

L'elemento nullo in L^p è $\{0\}$.

Se $\{f\} \in L^p$ allora $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ poniamo $\alpha\{f\} = \{\alpha f\}$
e $\alpha\{f\} \in L^p$.
Se $\{f\}, \{g\} \in L^p$ allora poniamo $\{f\}+\{g\} = \{f+g\}$
e vale
$$\{f\}+\{g\} \in L^p$$
Infatti, se $p=1$ o $p=\infty$ ciò segue dalla
disug. triangolare. Se $1<p<\infty$ abbiamo
$$|f+g|^p \leq 2^{p-1}(|f|^p+|g|^p)$$
quindi $\|\{f+g\}\|_p < \infty$.

(2) Proviamo che $\|\cdot\|_p$ è effettivamente una norma:

a) $\|\{f\}\|_p = 0 \Rightarrow f=0$ q.o. quindi $\{f\} = \{0\}$.

b) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\|\alpha\{f\}\|_p = |\alpha| \, \|\{f\}\|_p$ (immediato).

Resta da dimostrare la disug. triangolare:

c) $\|\{f\}+\{g\}\|_p \leq \|\{f\}\|_p + \|\{g\}\|_p$

Nei casi $p=1$, $p=\infty$ questa discende dalla dis. triangolare per il valore assoluto. Trattiamo ora il caso $1<p<\infty$. Abbiamo bisogno della seg. disug.

Teor. (Disug. di Hölder) Sia $1<p<\infty$, sia q l'esp. coniugato $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$. Siano f, g mis. t.c. non siano q.o. nulle. Vale

$$\int |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Dim $|fg| = t|f| \, \frac{1}{t}|g|$, $\forall\, t>0$. Usiamo la dis. di Young ponendo $\alpha = t|f|$, $\beta = \frac{1}{t}|g|$

$$\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q},$$

$$|fg| \leq \frac{t^p}{p}|f|^p + \frac{t^{-q}}{q}|g|^q, \text{ e integrando:}$$

$$\int_X |fg| \leq \frac{t^p}{p}\int_X |f|^p + \frac{t^{-q}}{q}\int_X |g|^q,$$

ponendo ora $a = t\|f\|_p$, $b = \frac{1}{t}\|g\|_q$, avremo che

$$\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q = ab, \text{ purché:}$$

$$a^p = b^q, \text{ cioè:}$$

$$t^p \|f\|_p^p = t^{-q}\|g\|_q^q, \text{ ovvero:}$$

$$t^{p+q} = \|g\|_q^q / \|f\|_p^p.$$

Con questa scelta di t:

$$\int_X |fg| \leq ab = \|f\|_p \|g\|_q . \qquad \square$$

NB La disug. si estende banalmente anche al caso $p=1$, $q=\infty$ (e viceversa), dato che

$$|fg| \leq |f| \, \|g\|_\infty \quad \text{q.o.}$$

Proviamo ora il n° 3, ovvero che $\|\cdot\|_p$ verifica la dis. triangolare anche quando $1<p<\infty$.

Teorema (Dis. di Minkowski) Siano f, g misurabili. Vale

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p .$$

Dim. Ci è suff. considerare il caso $1<p<\infty$ e supporre $0<\|f\|_p<\infty$, $0<\|g\|_p<\infty$, altrim. la disug. è banale.

$$\|f+g\|_p^p = \int_X |f+g|^p \leq \int_X |f+g|^{p-1}(|f|+|g|) =$$

$$= \int_X |f+g|^{p-1}|f| + \int_X |f+g|^{p-1}|g| .$$

Applichiamo Hölder prendendo l'esp. q per i primi fattori e p per i secondi:

$$\|f+g\|_p^p \le \| |f+g|^{p-1} \|_q \left(\|f\|_p + \|g\|_p \right),$$

ove

$$\| |f+g|^{p-1} \|_q = \left(\int_X |f+g|^{(p-1)q} \right)^{1/q}$$

e ricordiamo

$$\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p}, \qquad q = \frac{p}{p-1}, \text{ quindi}$$

$$\| |f+g|^{p-1} \|_q = \left(\int_X |f+g|^p \right)^{\frac{p-1}{p}} = \|f+g\|_p^{p-1}.$$

Quindi, semplificando:

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p. \quad \square$$

Esercizi: Stabilire quando si verifica l'uguaglianza nella dis. di Hölder, e nella dis. di Minkowski.

Quindi abbiamo ottenuto che $\{L^p, \|\cdot\|_p\}$ ha la struttura di spazio lineare normato, ovvero abbiamo una struttura metrica:

$$d_p(f,g) = \|f-g\|_p$$

Proveremo che tutti gli sp. $\{L^p, \|\cdot\|_p\}$ sono completi come sp. metrici.

<u>Teorema di Riesz-Fisher</u>. $\{L^p, \|\cdot\|_p\}$ è completo per ogni p, $1 \leq p \leq \infty$.

<u>Dim</u>. Sia $1 \leq p < \infty$. Sia $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^p$ una successione di Cauchy, cioè $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$ t.c. $\forall n,m \geq N$

$$\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon .$$

Fissiamo $\eta > 0$, per la disug di Chebishev

$$\mu(\{|f_n - f_m| > \eta\}) = \mu(\{|f_n - f_m|^p > \eta^p\}) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\eta^p} \int |f_n - f_m|^p \leq \frac{\varepsilon}{\eta^p}, \quad \forall n,m \geq N.$$

Quindi $\{f_n\}$ è di Cauchy in misura.

Ne segue che esiste una sottosuccess. $\{f_{n_k}\}$ che conv. quasi unif. a una funz mis. f.

Proviamo che $f_n \to f$ in norma $\|\cdot\|_p$. Sappiamo che

$$|f_n - f_{n_k}|^p \longrightarrow |f_n - f|^p \quad q.o..$$

Quindi, per Fatou:

$$\int_X |f_n - f|^p \leq \liminf_{k\to\infty} \int_X |f_n - f_{n_k}|^p ,$$

ora, se $n, n_k \geq N$, $\int_X |f_n - f_{n_k}|^p < \varepsilon^p$, da cui:

$$\int_X |f_n - f|^p < \varepsilon^p \quad \forall n \geq N , \quad \text{cioè:}$$

$$\|f_n - f\|_p \to 0 \text{ per } n \to \infty .$$

N.B. $f \in L^p$, infatti: $\|f\|_p \leq \|f - f_n\|_p + \|f_n\|_p < \infty$. $\square$