Capitolo 5
Geometria analitica nel piano e nello spazio

In questo capitolo studieremo la descrizione matematica di alcuni insiemi elementari nel piano e nello spazio, come rette, piani, circonferenze, sfere ecc. Inoltre tratteremo alcuni problemi del tipo: come si calcola la distanza tra un punto e una retta, come si determina la proiezione di un punto su un piano e così via.

La geometria analitica studia problemi geometrici con metodi analitici. A tale scopo si introduce un sistema di riferimento cartesiano sul piano o sullo spazio, identificando così, come abbiamo già visto, il piano con $\mathbb{R}^2$ e lo spazio con $\mathbb{R}^3$. Invitiamo il lettore a non dimenticare l'aspetto geometrico-intuitivo dei problemi; spesso la risoluzione diventa più facile se ci si rende conto del significato geometrico delle formule analitiche. Lo studente può così acquisire la necessaria esperienza per risolvere vari problemi di tipo geometrico che si incontrano nelle applicazioni come, ad esempio, il progetto di una casa o lo studio spaziale di una molecola. In questa ottica abbiamo spesso inserito nel testo frasi del tipo "geometricamente è ovvio che", invece di entrare nel dettaglio della dimostrazione.

5.1 L'equazione cartesiana di una retta nel piano

Intuitivamente sappiamo benissimo che cos'è una retta nel piano. Una retta è determinata da un vettore $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$ che fissa la sua direzione e da un punto P_0 che le appartiene: P è un punto della retta se e solo se il segmento di estremi P_0 e P ha la stessa direzione di $\mathbf{u}$ (vedi fig. 5.1):

5.1 DEFINIZIONE *Siano P_0 e $\mathbf{u}$ rispettivamente un punto e un vettore nel piano. Sia $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$ e P_0P denoti il vettore individuato dal segmento orientato di estremi P_0 e P. Una retta ρ nel piano è un sottoinsieme della forma*

$$\rho = \{P : P_0P = \lambda\mathbf{u}, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Diremo che ρ ha direzione $\mathbf{u}$.

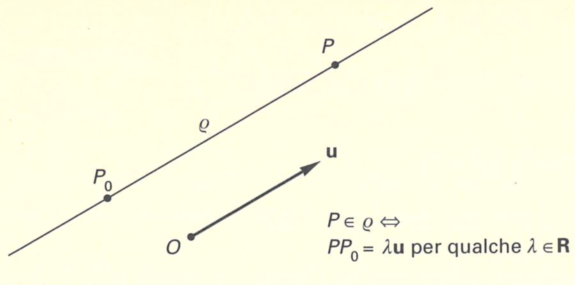


Figura 5.1
Retta di direzione $\mathbf{u}$ passante per P_0.

Per chiarire il significato della definizione di P_0P, ricordiamo, come già precisato nel capitolo 4, che identifichiamo i segmenti orientati nel piano che hanno uguale lunghezza, direzione e verso. In particolare, fissato un riferimento cartesiano e presi $P = (x, y)$ e $P_0 = (x_0, y_0)$, si ha evidentemente

$$P_0P = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \in E^2.$$

5.1 TEOREMA *Una retta ρ nel piano è un insieme della forma*

$$\rho = \{(x, y) \in \mathsf{R}^2 : ax + by + c = 0\}, \qquad [5.1]$$

dove a e b non sono contemporaneamente uguali a zero:

$$(a, b) \neq (0, 0). \qquad [5.2]$$

Inoltre tutti gli insiemi della forma [5.1] *sono rette purché la condizione* [5.2] *sia verificata.*

L'insieme [5.1] si dice *retta di equazione* (*cartesiana*) $ax + by + c = 0$. Si osservi che l'equazione di una retta non è unica: si possono moltiplicare i coefficienti a, b e c per una stessa costante diversa da zero.

Dimostrazione

Dalla definizione segue che una retta è un insieme della forma

$$\left\{(x, y) \in \mathsf{R}^2 : \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \lambda\mathbf{u},\ \lambda \in \mathsf{R}\right\}, \qquad [5.3]$$

dove $(x_0, y_0) \in \mathsf{R}^2$, $\mathbf{u} \in E^2$ e $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$. Poniamo $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$. Si noti che la [5.2] è equivalente alla condizione che $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$. Allora (x, y) appartiene all'insieme [5.3] se e solo se i vettori

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \text{ sono linearmente dipendenti,}$$

ovvero se e solo se (vedi l'esercizio 5.7)

$$a(x - x_0) = -b(y - y_0) \quad (\Longleftrightarrow ax + by = ax_0 + by_0),$$

ovvero se e solo se (x, y) appartiene all'insieme [5.1] in cui poniamo $c = -ax_0 - by_0$.

Per dimostrare che *ogni* insieme del tipo [5.1] rappresenta una retta nel piano, basta scegliere un suo elemento (x_0, y_0) (è evidente che l'insieme [5.1] non è vuoto) e procedere in modo analogo. ■

Da quanto appena visto si deduce immediatamente il seguente risultato:

5.2 TEOREMA *La retta di equazione $ax + by + c = 0$ ha direzione* $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Notiamo che

$$\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \right\rangle = -ab + ba = 0,$$

e quindi in un riferimento cartesiano ortonormale, per la [4.24], i vettori $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ sono perpendicolari. Abbiamo così dimostrato che (vedi fig. 5.2):

5.3 TEOREMA *In un riferimento cartesiano ortonormale del piano, la retta di equazione $ax + by + c = 0$ ha direzione perpendicolare al vettore* $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Ricordiamo che due rette nel piano si dicono *parallele* se non hanno alcun punto in comune. Una conseguenza immediata del teorema 5.2 è:

5.4 TEOREMA *Sia $\rho \subset \mathbb{R}^2$ la retta di equazione $ax+by+c=0$. Allora valgono le seguenti affermazioni:*

(a) *ρ e l'asse delle x sono paralleli o coincidenti se e solo se $a = 0$;*
(b) *ρ e l'asse delle y sono paralleli o coincidenti se e solo se $b = 0$.*

Lo studente è sicuramente familiare con l'equazione $y = mx + n$ di una retta nel piano (vedi anche l'esempio 1.14). Vogliamo sottolineare che al variare di m e n tale equazione non rappresenta tutte le rette nel piano. Più precisamente si ha:

5.5 TEOREMA *Sia ρ una retta nel piano.*

(a) *Se* ρ *e l'asse delle* y *sono paralleli o coincidenti, allora* ρ *ha un'equazione della forma*

$$x = x_0.$$

(b) *Se* ρ *e l'asse delle* y *non sono né paralleli né coincidenti, allora* ρ *ha un'equazione della forma*

$$y = mx + n.$$

Dimostrazione

Sia ρ la retta di equazione $ax + by + c = 0$. Per il teorema 5.4 si ha:

(a) ρ e l'asse delle y sono paralleli o coincidenti se e solo se $b = 0$ (e quindi $a \neq 0$), cioè se e solo se

$$ax + c = 0 \iff ax = -c \iff x = -\frac{c}{a};$$

(b) ρ e l'asse delle y non sono né paralleli né coincidenti se e solo se $b \neq 0$, cioè se e solo se

$$ax + by + c = 0 \iff by = -ax - c \iff y = -\frac{a}{b}\,x - \frac{c}{b},$$

e il teorema è dimostrato. ■

Dal significato geometrico dei coefficienti a e b seguono i *criteri di parallelismo e perpendicolarità* di due rette:

5.6 TEOREMA *Siano* ρ_1 *e* ρ_2 *due rette nel piano di equazione* $a_1x+b_1y+c_1 = 0$ *e, rispettivamente,* $a_2x + b_2y + c_2 = 0$. *Allora*

(a) ρ_1 *e* ρ_2 *sono coincidenti o parallele se e solo se* $a_1b_2 = a_2b_1$;

(b) ρ_1 *e* ρ_2 *sono perpendicolari in un riferimento cartesiano ortonormale se e solo se* $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$.

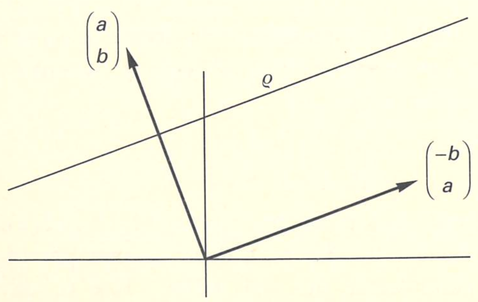


Figura 5.2
La retta ρ di equazione $ax + by + c = 0$.

Dimostrazione

Per il teorema 5.2 le rette ρ_1 e ρ_2 hanno rispettivamente direzione

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -b_1 \\ a_1 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -b_2 \\ a_2 \end{pmatrix}. \qquad [5.4]$$

Allora, per la [4.11], ρ_1 e ρ_2 sono parallele o coincidenti se e solo se $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ sono linearmente dipendenti, cioè se $-b_1a_2 = -a_1b_2$.

D'altra parte, in un riferimento cartesiano ortonormale ρ_1 e ρ_2 sono perpendicolari se e solo se $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ sono ortogonali, ovvero grazie alla [4.24] se e solo se $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = a_1a_2 + b_1b_2 = 0$. ■

Osserviamo che quando $a_2 \neq 0$ e $b_2 \neq 0$, il criterio di parallelismo può essere riscritto nel modo seguente:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \iff \text{le 2 rette sono parallele o coincidenti.}$$

Se inoltre $c_2 \neq 0$, si verifica facilmente (vedi l'esercizio 5.6) che

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \iff \text{le 2 rette sono parallele,} \qquad [5.5]$$

e

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \iff \text{le 2 rette sono coincidenti.} \qquad [5.6]$$

5.1 *Esempio*

Le rette di equazioni $3x + 2y = 4$ e $6x + 4y = 8$ sono coincidenti; le rette di equazioni $3x + 2y = 4$ e $6x + 4y = 9$ sono parallele.

5.2 *Esempio*

Determiniamo (in un riferimento cartesiano ortonormale) un'equazione della retta perpendicolare al vettore $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ e passante per il punto $(-1, 2)$.

Dal teorema 5.3 si deduce che la retta ha un'equazione della forma $3x+y+c = 0$. Poiché la retta deve passare per $(-1, 2)$ deve essere $3(-1)+2+c = 0$, ovvero $c = 1$. Allora $3x + y + 1 = 0$ è un'equazione della retta.

5.3 *Esempio*

Determiniamo un'equazione della retta che passa per i punti $(4, 1)$ e $(3, 2)$.

Sia $ax + bx + c = 0$ un'equazione della retta. La retta deve passare per $(4, 1)$, quindi si può scrivere l'equazione nella forma $a(x - 4) + b(y - 1) = 0$, da cui imponendo il passaggio della retta per $(3,2)$ troviamo la condizione

$$a(3-4)+b(2-1)=0 \iff -a+b=0 \iff a=b.$$

Quindi le equazioni della retta sono $a(x-4)+a(y-1)=0$ dove $a \neq 0$ è una costante arbitraria. Se scegliamo per esempio $a=1$, troviamo $x+y=5$.

Non è difficile trovare una formula generale per un'equazione della retta passante per due punti diversi; usando il metodo dell'esempio precedente si ha:

5.1 LEMMA *Sia ρ la retta passante per due punti distinti (x_0,y_0) e (x_1,y_1). Allora*

$$(x_1-x_0)(y-y_0)=(y_1-y_0)(x-x_0) \tag{5.7}$$

è un'equazione della retta ρ.

Si osservi che l'equazione può essere scritta nella forma

$$\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{x-x_0}{x_1-x_0} \qquad \text{se } x_0 \neq x_1 \text{ e } y_0 \neq y_1.$$

La dimostrazione del lemma è banale. Osserviamo innanzitutto che i coefficienti x_1-x_0 e y_1-y_0 non sono contemporaneamente nulli, poiché per ipotesi i punti (x_0,y_0) e (x_1,y_1) sono diversi. La [5.7] è quindi l'equazione di una retta, e si verifica facilmente che questa retta passa per i punti assegnati.

Possiamo calcolare l'ampiezza dell'*angolo tra due rette* in un riferimento cartesiano ortonormale usando il teorema 5.3. Per definizione l'ampiezza dell'angolo tra due rette è il numero $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ che abbiamo indicato nella figura 5.3, cioè l'ampiezza dell'angolo *acuto* individuato dalle due rette.

5.2 LEMMA *Siano ρ_1 e ρ_2 due rette di equazioni $a_1x+b_1y+c_1=0$ e a_2x+ $+b_2y+c_2=0$ in un riferimento cartesiano ortonormale. Allora l'ampiezza $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ dell'angolo compreso tra ρ_1 e ρ_2 è determinato dalla formula*

$$\cos\varphi = \frac{\left|\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \right\rangle\right|}{\left\| \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{|a_1a_2+b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\,\sqrt{a_2^2+b_2^2}}\,. \tag{5.8}$$

Ovviamente il criterio di perpendicolarità è un caso particolare della [5.8], in cui $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

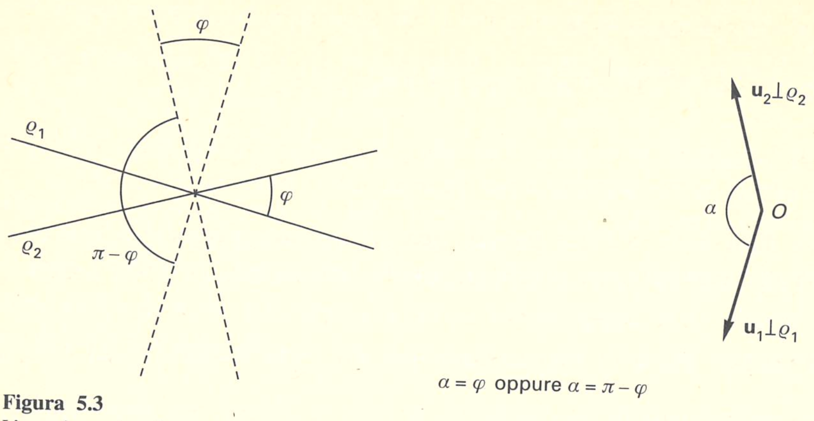


Figura 5.3
L'angolo φ tra due rette.

Dimostrazione

Segue dal teorema 5.3 e dalla figura 5.3 che l'ampiezza α dell'angolo tra i vettori $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$ è uguale a φ oppure a $\pi - \varphi$. Per la [4.21] si ha

$$\cos \alpha = \frac{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle}{\|\mathbf{u}_1\| \cdot \|\mathbf{u}_2\|} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

Se $\varphi = \alpha$ allora $0 \leq \cos \varphi = \cos \alpha$ e la [5.8] segue immediatamente. Se invece $\alpha = \pi - \varphi$, allora $\cos \alpha = \cos(\pi - \varphi) = -\cos \varphi$ e il risultato segue dal fatto che $0 \leq \cos \varphi = |\cos \alpha|$. ■

5.4 *Esempio*

Calcoliamo l'ampiezza φ dell'angolo compreso tra le due rette di equazioni $x + 2y + 3 = 0$ e $-4x + y + 5 = 0$.

Applicando il lemma 5.2 otteniamo che $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ è determinato da

$$\cos \varphi = \left| \frac{-4 + 2}{\sqrt{1+4}\sqrt{16+1}} \right| = \frac{2}{\sqrt{85}}.$$

5.5 *Esempio*

Determiniamo le equazioni delle rette passanti per il punto $(3, -2)$, che formano un angolo di ampiezza $\frac{\pi}{3}$ con la retta di equazione $4x + y = 5$.

Le rette cercate passano per il punto $(3, -2)$, perciò hanno un'equazione del tipo $a(x-3)+b(y+2)=0$. Dal lemma 5.2 segue poi che

$$|4a+b| = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sqrt{17}\sqrt{a^2+b^2} \iff (4a+b)^2 = \frac{17}{4}(a^2+b^2)$$

$$\iff 47a^2+32ab-13b^2=0 \iff a = \frac{-16b \pm b\sqrt{16^2+47\cdot 13}}{47}.$$

Scegliendo ad esempio $b=47$ (questo è lecito, poiché se moltiplichiamo b per una costante, anche a risulta moltiplicata per la stessa costante) troviamo due valori per a che corrispondono a due rette diverse (vedi l'esercizio 5.5):

$$b=47 \Rightarrow a = -16 \pm \sqrt{867} \approx -16 \pm 29{,}4 = \begin{cases} 13{,}6 \\ -45{,}4. \end{cases}$$

Esercizi

5.1 Disegnare in un riferimento cartesiano ortonormale le rette di equazioni

(a) $x+3y=1$

(b) $x+3y=-2$

(c) $-3x+y=0$

(d) $4x+12y=1$

(e) $2y-3=0$

(f) $4x=1$.

5.2 Determinare le equazioni delle rette passanti per

(a) $(3,0)$ e $(-2,1)$

(b) $(1,3)$ e $(-2,3)$.

5.3 Determinare un'equazione della retta passante per $(0,4)$ e parallela alla retta ρ di equazione $4x-y=0$. Determinare un'equazione della retta perpendicolare a ρ e passante per $(3,1)$.

5.4 Determinare l'ampiezza dell'angolo compreso tra le due rette di equazioni $x-y=1$ e $3x+y=0$.

5.5 Dare una spiegazione geometrica del fatto che nell'esempio 5.5 troviamo *due* rette.

5.6 Dimostrare le [5.5] e [5.6].

5.7 Usare la [4.35] per dimostrare che i vettori $\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ sono linearmente dipendenti se e solo se $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$.

5.2 Equazioni parametriche di una retta nel piano

Nel paragrafo precedente abbiamo sempre usato l'equazione di una retta nella forma $ax + by + c = 0$. In questo paragrafo, utilizzando la formulazione vettoriale [5.3], descriveremo la retta in termini di un parametro λ. Il vantaggio di questa diversa rappresentazione diventerà chiaro più avanti, quando studieremo le rette nello spazio.

Sia ρ una retta nel piano passante per $P_0 = (x_0, y_0)$ e di direzione $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$. Allora (vedi anche la [5.3]) la retta ρ è l'insieme dei punti (x, y) tali che

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \quad \text{per qualche } \lambda \in \mathsf{R}, \qquad [5.9]$$

ovvero

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda p \\ y = y_0 + \lambda q \end{cases} \quad \text{per qualche } \lambda \in \mathsf{R}. \qquad [5.10]$$

Quindi

$$\rho = \{(x, y) : x = x_0 + \lambda p,\ y = y_0 + \lambda q,\ \lambda \in \mathsf{R}\}. \qquad [5.11]$$

Le equazioni [5.10] sono dette *equazioni parametriche* della retta con parametro λ (vedi fig. 5.4).

Si noti che le equazioni parametriche non sono uniche: si possono moltiplicare p e q per uno stesso numero e si può scegliere un diverso punto P_0 della retta, anche se noi, per comodità di linguaggio, non staremo sempre a specificarlo.

5.6 *Esempio*

Determiniamo le equazioni parametriche della retta ρ di equazione $3x + y = 2$.

Scegliamo un punto della retta, per esempio $(0, 2)$. Per il teorema 5.2 ρ ha direzione $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Troviamo quindi le equazioni $\begin{cases} x = -\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \end{cases}$ per $\lambda \in \mathsf{R}$.

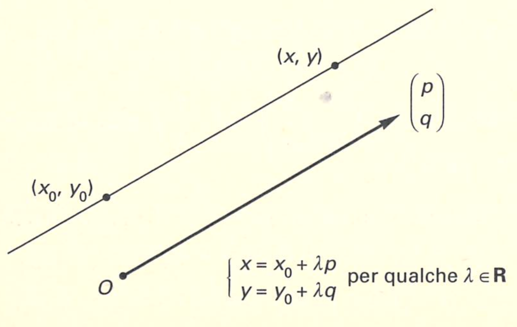


Figura 5.4
Equazioni parametriche di una retta.

5.7 *Esempio*

Determiniamo un'equazione cartesiana della retta di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 4 - 3\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \end{cases} \quad \text{per} \quad \lambda \in \mathsf{R}.$$

Ci sono diversi metodi per risolvere questo problema. Possiamo, ad esempio, determinare due punti della retta e poi applicare la [5.7]; ad esempio, scegliendo $\lambda = 0$ si trova il punto $(4, 1)$, mentre posto $\lambda = 1$ si trova il punto $(1, 3)$, il che porta all'equazione $-3(y - 1) = 2(x - 4)$, ovvero $2x + 3y = 11$.

In alternativa si può applicare il teorema 5.2, ottenendo immediatamente che la retta ha un'equazione del tipo $2x + 3y = c$. Si determina poi la costante imponendo che, ad esempio, la retta passi per $(4, 1)$.

Un terzo metodo, probabilmente il più naturale, è l'eliminazione del parametro λ dalle equazioni. Sommiamo, ad esempio, la prima equazione moltiplicata per 2 alla seconda equazione moltiplicata per 3, e troviamo così l'equazione $2x + 3y = 8 + 3 = 11$.

5.8 *Esempio*

Determiniamo le equazioni parametriche della retta passante per i punti $(1, 5)$ e $(-2, 1)$.

Dalla [5.3] si deduce che la retta ha direzione $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Quindi le equazioni parametriche sono, per esempio, $\begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 5 + 4\lambda \end{cases}$ per $\lambda \in \mathsf{R}$.

5.9 *Esempio*

Sia ρ_1 la retta di equazione $2x - y = 3$, e sia ρ_2 la retta di equazioni parametriche $\begin{cases} x = 2 + 5\lambda \\ y = 5 - 4\lambda \end{cases}$ per $\lambda \in \mathsf{R}$. Determiniamo il punto di intersezione delle due rette.

Il punto di intersezione ha la forma $(2+5\lambda, 5-4\lambda)$ e deve soddisfare l'equazione di ρ_2:

$$2(2 + 5\lambda) - (5 - 4\lambda) = 3 \iff \lambda = \frac{2}{7}\cdot$$

La soluzione è dunque $\left(\dfrac{24}{7}, \dfrac{27}{7}\right)$.

Esercizi

5.8 In un riferimento cartesiano ortonormale del piano sia ρ la retta di equazioni parametriche $\begin{cases} x = 4 - \lambda \\ y = 2 + 3\lambda \end{cases}$ per $\lambda \in \mathsf{R}$; si richiede di trovare un'equazione cartesiana e delle equazioni parametriche della retta passante per $(5,0)$ e

(a) perpendicolare a ρ; (b) parallela a ρ.

5.3 Equazioni parametriche di una retta nello spazio

Quanto abbiamo detto nei due paragrafi precedenti può essere facilmente generalizzato al caso di rette nello spazio.

5.2 DEFINIZIONE *Siano P_0 e $\mathbf{u}$ rispettivamente un punto e un vettore non nullo nello spazio. P_0P denoti il vettore individuato dal segmento orientato di estremi P_0 e P. Una retta ρ nello spazio è un sottoinsieme della forma*

$$\rho = \{P : P_0P = \lambda\mathbf{u},\ \lambda \in \mathsf{R}\}.$$

Diremo che ρ ha direzione $\mathbf{u}$.

Sia ρ la retta nello spazio passante per un punto $(x_0, y_0, z_0) \in \rho$ e di direzione $\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ assegnata.

Ragionando come nel paragrafo precedente, troviamo tre equazioni parametriche per una retta nello spazio:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda p \\ y = y_0 + \lambda q \\ z = z_0 + \lambda r \end{cases} \quad \text{per } \lambda \in \mathsf{R}, \qquad [5.12]$$

dunque

$$\rho = \{(x, y, z) : x = x_0 + \lambda p,\ y = y_0 + \lambda q,\ z = z_0 + \lambda r,\ \lambda \in \mathsf{R}\}. \qquad [5.13]$$

Si noti che si potrebbe eliminare il parametro λ, ottenendo, però, *due* equazioni in x, y e z. Si intuisce così che non è possibile descrivere la retta nello spazio con una sola equazione.

5.10 *Esempio*

Determiniamo le equazioni parametriche della retta passante per i punti $(3, 1, 0)$ e $(-1, 0, 2)$.

La retta ha direzione $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, da cui troviamo per esempio

le equazioni parametriche $\begin{cases} x = 3 + 4\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$ per $\lambda \in \mathsf{R}$

5.11 *Esempio*

In un riferimento cartesiano ortonormale determiniamo le equazioni parametriche della retta perpendicolare ai vettori $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e passante per il punto $(1, 3, 1)$.

La retta ha direzione perpendicolare ai due vettori dati e quindi, tenendo conto del fatto che il riferimento cartesiano è ortonormale, risulta che la retta è parallela al prodotto vettoriale $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ (vedi § 4.5). Le equazioni cercate sono perciò $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 3 - 3\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$ per $\lambda \in \mathsf{R}$.

5.12 *Esempio*

Determiniamo le equazioni parametriche delle rette che non intersecano il piano xy (cioè l'insieme $\{(x, y, 0) : x, y \in \mathsf{R}\}$) e che passano per il punto $(1, 0, 2)$.

Se una retta non interseca il piano xy, allora ha direzione $\begin{pmatrix} p \\ q \\ 0 \end{pmatrix}$, dove p e q sono arbitrari, ma non contemporaneamente uguali a 0. Una tale retta ha allora equazioni parametriche $\begin{cases} x = 1 + p\lambda \\ y = q\lambda \\ z = 2 \end{cases}$ per $\lambda \in \mathsf{R}$.

*5.13 *Esempio*

In un riferimento cartesiano ortonormale dello spazio determiniamo le equazioni parametriche delle rette passanti per l'origine che formano un angolo di ampiezza $\frac{\pi}{3}$ con l'asse delle x.

Le equazioni parametriche di una generica retta passante per l'origine sono del tipo $\begin{cases} x = p\lambda \\ y = q\lambda \\ z = r\lambda \end{cases}$ per $\lambda \in \mathsf{R}$. Dobbiamo poi imporre che l'ampiezza dell'angolo compreso tra i vettori $\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sia uguale a $\frac{\pi}{3}$, oppure a $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

Usando la formula [4.21] e ricordando che $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ e $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, troviamo

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \right\rangle = \pm\frac{1}{2}\sqrt{p^2+q^2+r^2},$$

ovvero $p = \pm\frac{1}{2}\sqrt{p^2+q^2+r^2}$. Possiamo supporre che $p^2+q^2+r^2 = 1$ (nelle equazioni parametriche possiamo sempre moltiplicare p, q e r per uno stesso numero). Allora p, q e r devono soddisfare le condizioni:

$$p = \pm\frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad q^2+r^2 = \frac{3}{4}\cdot$$

Geometricamente è chiaro che le rette giacciono su un cono (vedi § 5.12), come abbiamo indicato nella figura 5.5. Si osservi che si può scegliere sempre $p = \frac{1}{2}$: se $p = -\frac{1}{2}$ non si trovano rette diverse.

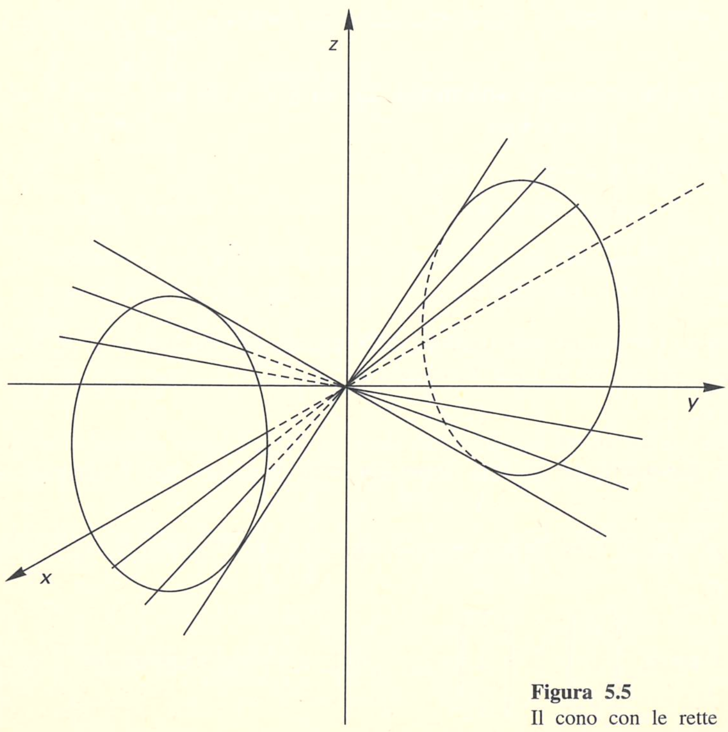


Figura 5.5
Il cono con le rette dell'esempio 5.13.

Esercizi

5.9 Determinare delle equazioni parametriche della retta che passa per $(1,0,1)$ e che è parallela alla retta passante per $(-3,1,0)$ e $(-1,0,3)$.

5.4 Equazioni di un piano nello spazio

Un piano σ nello spazio è determinato da un punto P_0 che appartiene al piano e da due vettori linearmente indipendenti $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ ai quali il piano è parallelo, cioè $P \in \sigma$ se e solo se il vettore P_0P è una combinazione lineare di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$:

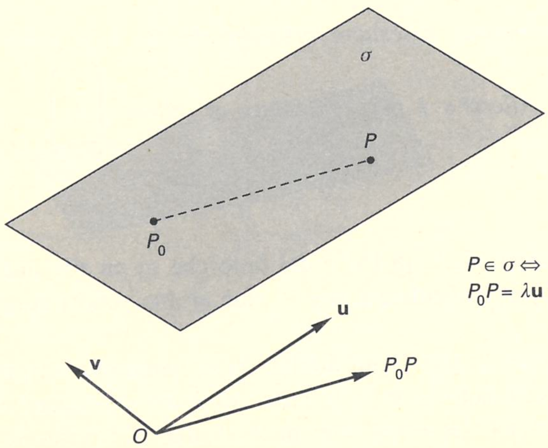
5.3 DEFINIZIONE *Siano P_0 un punto e $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori linearmente indipendenti dello spazio. Si denoti con P_0P il vettore individuato dal segmento orientato di estremi P_0 e P. Un piano σ nello spazio è un sottoinsieme della forma*

$$\sigma = \{P : P_0P = \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}, \lambda, \mu \in \mathsf{R}\}.$$

Posti $P = (x, y, z)$ e $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, dalla definizione 5.3 si ha che (vedi fig. 5.6)

$$(x,y,z) \in \sigma \iff \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} \text{ per qualche } \lambda, \mu \in \mathsf{R}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}, \mathbf{u} \text{ e } \mathbf{v} \text{ sono linearmente dipendenti.}$$



$P \in \sigma \Leftrightarrow$
$P_0P = \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}$ per qualche $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$

Figura 5.6
Un piano nello spazio.

Per il teorema 4.5(e) e la definizione di prodotto misto, questi tre vettori sono linearmente dipendenti se e solo se

$$\left\langle \mathbf{u} \times \mathbf{v}, \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0. \qquad [5.14]$$

Poniamo

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad [5.15]$$

(il fatto che $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \neq \mathbf{o}$ segue dall'indipendenza lineare di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$). Allora per la [5.14] (x, y, z) è un punto del piano se e solo se

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0. \qquad [5.16]$$

La [5.16] si dice *equazione cartesiana* del piano σ. Ponendo $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$, si ottiene un'equazione della forma $ax + by + cz + d = 0$. Viceversa, si dimostra facilmente che *ogni* equazione di questo tipo, in cui $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, definisce un piano (vedi l'esercizio 5.12). Si ha quindi:

5.7 Teorema *Un piano nello spazio è un insieme della forma*

$$\{(x, y, z) \in \mathsf{R}^3 : ax + by + cz + d = 0\}, \qquad [5.17]$$

dove $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

In un riferimento cartesiano ortonormale i coefficienti a, b e c hanno un significato geometrico come evidenziato dal seguente teorema:

5.8 Teorema *In un riferimento cartesiano ortonormale sia σ il piano di equazione $ax + by + cz + d = 0$. Allora σ è perpendicolare al vettore* $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Dimostrazione

È evidente che il risultato segue dalla [5.15] e dal fatto che in un riferimento cartesiano ortonormale $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ è perpendicolare a $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, cioè ai due vettori ai quali il piano è parallelo.

Diamo però una dimostrazione diversa e più diretta. Ricordiamo che un piano è perpendicolare a un vettore se e solo se tutte le rette nel piano sono perpendicolari al vettore. Siano (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) due punti distinti del piano scelti arbitrariamente. Allora

$$\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} \right\rangle = a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) + c(z_2 - z_1)$$

$$= (ax_1 + by_1 + cz_1) - (ax_2 + by_2 + cz_2) = -d + d = 0,$$

dove abbiamo usato l'equazione del piano. Il risultato è così provato (vedi anche fig. 5.7). ■

5.14 *Esempio*

Determiniamo un'equazione del piano che passa per i punti $(1, 0, 1)$, $(3, 0, 1)$ e $(2, -1, 1)$.

Dalla definizione il piano è parallelo ai vettori

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Usiamo la [5.5] per determinare i coefficienti a, b e c:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi l'equazione del piano ha la forma $z = d$. Il piano deve passare per $(1, 0, 1)$, il che porta a $z = 1$.

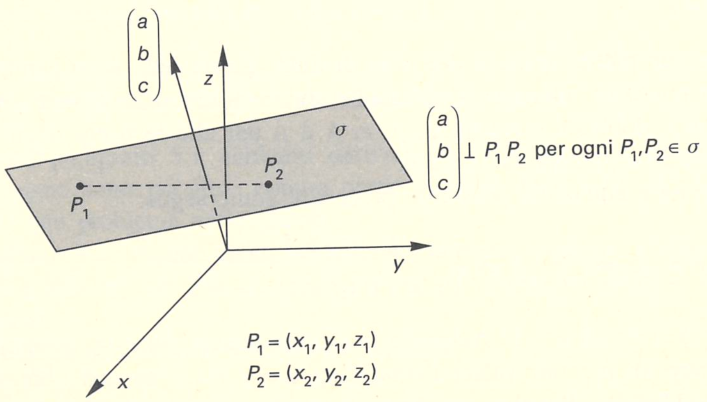


Figura 5.7
Il significato dei coefficienti a, b e c dell'equazione del piano.

5.15 *Esempio*

Determiniamo un'equazione del piano che passa per il punto $(3,2,0)$ e che contiene la retta determinata dalle equazione parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 3 - 2\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases} \qquad \text{per } \lambda \in \mathsf{R}.$$

Si vede che il piano è parallelo al vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, che è la direzione della retta. Poiché la retta passa per il punto $(1,3,0)$ (ottenuto ponendo $\lambda = 0$), il piano è anche parallelo al vettore $\begin{pmatrix} 3-1 \\ 2-3 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Per la [5.15] deve essere $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ da cui si deduce che il piano ha un'equazione del tipo $-2x-4y+3z+d = 0$. D'altra parte il piano passa per il punto $(3,2,0)$, quindi $-6-8+0+d = 0$, ovvero $d = 14$. Abbiamo così l'equazione $-2x-4y+3z+14 = 0$.

5.16 *Esempio*

In un riferimento cartesiano ortonormale determiniamo un'equazione del piano che contiene le due rette ρ_1 e ρ_2 di equazioni parametriche

$$\rho_1\colon \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = 1 \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \quad \text{per } \lambda \in \mathsf{R}, \qquad \rho_2\colon \begin{cases} x = 1 - 2\mu \\ y = -\mu \\ z = 4 + 4\mu \end{cases} \quad \text{per } \mu \in \mathsf{R}. \qquad [5.18]$$

Notiamo che se un piano contiene due rette distinte, queste rette sono parallele oppure hanno un punto di intersezione. Poiché è evidente che ρ_1 e ρ_2 non sono parallele (verificare), dobbiamo trovare x, y, z, λ e μ tali che le 6 equazioni in [5.18] siano verificate contemporaneamente.

Per risolvere queste equazioni possiamo procedere come segue:

$$y = 1 \quad \text{e} \quad y = -\mu \Rightarrow \mu = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - 2\mu = 3 \\ z = 4 + 4\mu = 0 \end{cases}$$

e quindi $\lambda = x - 5 = 3 - 5 = -2$. Abbiamo così determinato tutte le incognite; rimane da verificare se per tali valori l'equazione $z = 2 + \lambda$, che non abbiamo ancora usato, è soddisfatta. Banalmente abbiamo $0 = 2 - 2$, e quindi $(3,1,0)$ è il punto di intersezione cercato.

Il piano è parallelo ai vettori $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}-2\\-1\\4\end{pmatrix}$; quindi, per la [5.15]:

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\\-1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0-(-1)\\-2-4\\-1+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-6\\-1\end{pmatrix},$$

e il piano ha perciò equazione $x-6y-z+d=0$, dove, imponendo il passaggio per il punto $(3,1,0)$, $d=-3$.

Esercizi

5.10 Determinare un'equazione del piano che contiene:

(a) il punto $(3,0,-2)$ e l'asse delle x;

(b) i punti $(1,0,1)$, $(3,-1,0)$ e $(2,1,1)$;

(c) le rette di equazioni parametriche

$$\begin{cases}x=\lambda\\y=2\lambda\\z=1+\lambda\end{cases}\ \text{per } \lambda\in\mathbb{R}, \text{ rispettivamente } \begin{cases}x=1-\lambda\\y=-3-\lambda\\z=2-\lambda\end{cases}\ \text{per } \lambda\in\mathbb{R}.$$

5.11 In un riferimento cartesiano ortonormale determinare le equazioni dei piani che sono perpendicolari alla retta di equazioni parametriche $\begin{cases}x=3-4\lambda\\y=1-\lambda\\z=-3+\lambda\end{cases}$ per $\lambda\in\mathbb{R}$.

5.12 Dimostrare che ogni insieme della forma $\{(x,y): ax+by+cz+d=0\}$ è un piano se $(a,b,c)\neq(0,0,0)$, cioè dimostrare che esistono due vettori linearmente indipendenti $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ e un punto (x_0,y_0,z_0) tali che il piano parallelo a $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ e passante per (x_0,y_0,z_0) ha equazione $ax+by+cz+d=0$.

5.5 Parallelismo e perpendicolarità nello spazio

Nel paragrafo 5.1 abbiamo derivato alcuni criteri per stabilire se due rette nel piano sono parallele oppure perpendicolari. In questo paragrafo discuteremo l'analogo problema nello spazio.

Due rette si dicono parallelle se hanno la stessa direzione e non sono coincidenti. Due piani, oppure una retta e un piano, si dicono paralleli se non hanno punti comuni.

Cominciamo con il considerare due piani:

5.9 TEOREMA *In un riferimento cartesiano dello spazio siano σ_1 il piano di equazione $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ e σ_2 il piano di equazione $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$.*

Allora:

(a) *σ_1 e σ_2 sono paralleli oppure coincidenti se e solo se esiste un $\lambda \neq 0$ tale che*

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}; \qquad [5.18]$$

σ_1 e σ_2 sono coincidenti se e solo se la [5.18] è verificata, e $d_1 = \lambda d_2$;

(b) *se il riferimento cartesiano è ortonormale, i piani σ_1 e σ_2 sono perpendicolari se e solo se*

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0. \qquad [5.19]$$

5.1 *Osservazione*

Se a_2, b_2, c_2 e d_2 sono diversi da zero, segue dal teorema 5.9(a) che

$$\sigma_1 \text{ e } \sigma_2 \text{ sono paralleli} \iff \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$$

$$\sigma_1 \text{ e } \sigma_2 \text{ sono coincidenti} \iff \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}.$$

Dimostrazione

In un riferimento cartesiano ortonormale i risultati seguono facilmente ricordando il significato geometrico dei vettori $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$, poiché per il teorema 5.8 $\mathbf{u}_1$ è perpendicolare a σ_1 e $\mathbf{u}_2$ è perpendicolare a σ_2. Quindi σ_1 e σ_2 sono paralleli o coincidenti se e solo se i vettori $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ hanno la stessa direzione, da cui la [5.18]. Analogamente σ_1 e σ_2 sono perpendicolari se e solo se $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ sono perpendicolari, cioè se $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = 0$, da cui la [5.19] (vedi fig. 5.8). Per la dimostrazione della [5.18] nel caso di un riferimento cartesiano non ortonormale si veda l'esercizio 5.14.

Se poi la condizione [5.18] è verificata, allora σ_1 ha equazione

$$\lambda a_2 x + \lambda b_2 y + \lambda c_2 z + d_1 = 0 \iff a_2 x + b_2 y + c_2 z + \frac{d_1}{\lambda} = 0.$$

Quindi, se $d_1 = \lambda d_2$, σ_1 e σ_2 hanno la stessa equazione e sono coincidenti; se, invece, $d_1 \neq \lambda d_2$, il sistema

$$\begin{cases} a_2 x + b_2 y + c_2 z + \dfrac{d_1}{\lambda} = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \end{cases}$$

non ha soluzioni, i due piani non hanno punti comuni e sono quindi paralleli. ■

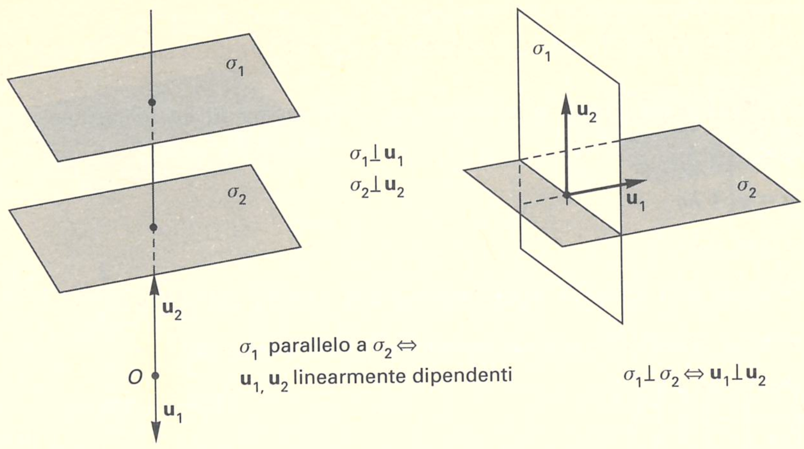


Figura 5.8
Piani paralleli e perpendicolari.

Consideriamo ora due rette nello spazio:

5.10 TEOREMA *Siano ρ_1 e ρ_2 due rette nello spazio di equazioni parametriche*

$$\rho_1 : \begin{cases} x = x_1 + \lambda p_1 \\ y = y_1 + \lambda q_1 \\ z = z_1 + \lambda r_1 \end{cases} \text{ per } \lambda \in \mathrm{R}, \qquad \rho_2 : \begin{cases} x = x_2 + \mu p_2 \\ y = y_2 + \mu q_2 \\ z = z_2 + \mu r_2 \end{cases} \text{ per } \mu \in \mathrm{R}.$$

Allora:

(a) *ρ_1 e ρ_2 sono parallele o coincidenti se e solo se esiste un $\lambda_0 \neq 0$ tale che*

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \\ r_1 \end{pmatrix} = \lambda_0 \begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \\ r_2 \end{pmatrix}; \qquad [5.20]$$

(b) *se il riferimento cartesiano è ortonormale, ρ_1 e ρ_2 sono perpendicolari se e solo se*

$$\left\langle \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \\ r_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \\ r_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0. \qquad [5.21]$$

5.2 *Osservazione*

Due rette nello spazio si dicono perpendicolari se i due vettori che determinano le loro direzioni sono perpendicolari. Le due rette possono anche non intersecarsi, nel qual caso si dicono *sghembe*.

Lasciamo la dimostrazione del teorema 5.10 per esercizio.
Consideriamo infine il caso di un piano e una retta:

5.11 Teorema *Sia ρ la retta nello spazio di equazioni parametriche*

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda p \\ y = y_0 + \lambda q \\ z = z_0 + \lambda r \end{cases}$$

per $\lambda \in \mathbb{R}$ e sia σ il piano di equazione $ax + by + cz + d = 0$. Allora:

(a) *ρ e σ sono paralleli o ρ è contenuta nel piano σ se e solo se*

$$\left\langle \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\rangle = 0; \qquad [5.22]$$

(b) *se il riferimento cartesiano è ortonormale, ρ e σ sono perpendicolari se e solo se esiste un $\lambda_0 \neq 0$ tale che*

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \lambda_0 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}. \qquad [5.23]$$

Dimostrazione

Siano $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$. In un riferimento cartesiano ortonormale il vettore $\mathbf{u}$ è perpendicolare a σ e $\mathbf{v}$ è la direzione di ρ. Quindi ρ è parallela a σ o è contenuta in σ se e solo se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono perpendicolari, ossia vale la [5.22], mentre ρ e σ sono perpendicolari se e solo se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ hanno la stessa direzione, ossia vale la [5.23] (vedi fig. 5.9).

Per completare la dimostrazione di (a) resta da considerare il caso di un riferimento cartesiano non ortonormale. Per la definizione di piano, esistono due vettori $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$ che sono linearmente indipendenti e ai quali il piano σ è parallelo. Dalla [5.15] segue allora che per qualche $\mu \neq 0$

$$\mathbf{u} = \mu(\mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2). \qquad [5.24]$$

D'altra parte la retta ρ è parallela al piano se e solo se $\mathbf{v}$ è parallelo al piano, ovvero se e solo se i tre vettori $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$ sono linearmente dipendenti, ossia, per il teorema 4.5(e), se e solo se

$$\langle \mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2, \mathbf{v} \rangle = 0. \qquad [5.25]$$

Combinando la [5.24] con la [5.25] si ottiene la [5.22]. ■

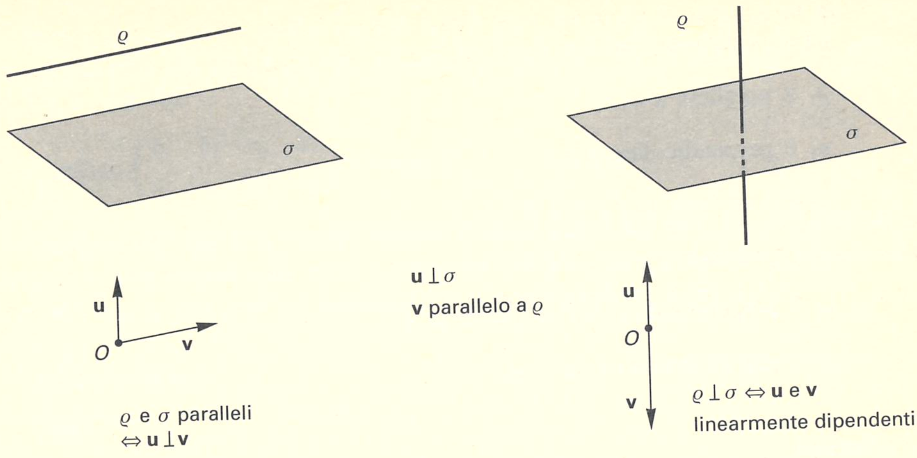


Figura 5.9
Parallelismo e perpendicolarità di una retta e un piano.

5.17 *Esempio*

In un riferimento cartesiano ortonormale dello spazio consideriamo i piani

$$\sigma_1 = \{(x, y, z) : 2x + 3y - z = 4\},$$

$$\sigma_2 = \{(x, y, z) : 4x + 6y - 2z = \alpha\} \quad \text{con } \alpha \in \mathsf{R},$$

$$\sigma_3 = \{(x, y, z) : x - y - z = 2\},$$

e le rette

$$\rho_1 = \left\{ (x, y, z) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathsf{R} \right\},$$

$$\rho_2 = \left\{ (x, y, z) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \ \mu \in \mathsf{R} \right\} \quad \text{con } \beta \in \mathsf{R},$$

$$\rho_3 = \left\{ (x, y, z) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \nu \in \mathsf{R} \right\}.$$

Applicando i teoremi di questo paragrafo otteniamo i seguenti risultati:

$\sigma_1 = \sigma_2 \iff \alpha = 8;$

σ_1 e σ_2 sono paralleli se $\alpha \neq 8;$

σ_3 è perpendicolare a σ_1 e σ_2;

ρ_1 è parallela a σ_1;

ρ_1 è perpendicolare a σ_3;

ρ_2 è contenuta in $\sigma_1 \Longleftrightarrow \beta = 2$;

ρ_2 è parallela a σ_1 se $\beta \neq 2$;

ρ_3 è perpendicolare a σ_1 e parallela a σ_3;

ρ_3 è perpendicolare a ρ_1 e ρ_2.

Esercizi

5.13 Determinare le equazioni dei piani paralleli

(a) al piano di equazione $3x + 4y - z = 0$;

(b) all'asse delle y.

5.14 Dimostrare il teorema 5.9(a), osservando che il sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

ha un numero infinito di soluzioni oppure nessuna soluzione se e solo se la [5.18] è verificata.

5.6 La retta di intersezione di due piani

Siano σ_1 e σ_2 due piani distinti e non paralleli:

$$\sigma_1 = \{(x,y,z) : a_1x+b_1y+c_1z+d_1 = 0\}, \quad \sigma_2 = \{(x,y,z) : a_2x+b_2y+c_2z+d_2 = 0\},$$

dove

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \text{ sono linearmente indipendenti} \qquad [5.26]$$

(vedi teorema 5.9(a)). Geometricamente è chiaro che l'intersezione $\sigma_1 \cap \sigma_2$ dei due piani è una retta. Infatti $(x,y,z) \in \sigma_1 \cap \sigma_2$ se e solo se (x,y,z) è una soluzione di

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0, \end{cases}$$