Identificando $N(T)$ con $N_0 e^{-bT}$ ritroviamo la legge [6.1], in cui

$$\gamma = e^b > 1.$$

Nei prossimi paragrafi daremo la definizione precisa di limite e introdurremo vari metodi per il calcolo del medesimo.

6.2 Limite di una successione

Sia A un insieme in cui è definita una distanza $d(x, y)$ tra ogni coppia di elementi x e y di A (vedi § 1.5). Una *successione* in A è una funzione di $\mathbb{N}$ in A che associa ad ogni $n \in \mathbb{N}$ un elemento a_n di A:

$$n \mapsto a_n \in A \qquad \text{per } n = 1, 2, 3, \cdots$$

Usualmente si denota una successione con

$$\{a_1, a_2, a_3, \cdots\} \qquad \text{o} \qquad \{a_n\}_{n=1}^{+\infty}.$$

Un esempio di successione in $A = \mathbb{Q}$ è

$$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\right\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{+\infty}.$$

Intuitivamente, $a \in A$ è il limite della successione $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ se gli a_n si avvicinano ad a con l'aumentare di n, cioè se la distanza tra a_n e a diventa "piccola" per valori di n "grandi". Nell'esempio precedente questo significa che il limite della successione $\{1/n\}_{n=1}^{+\infty}$ è il numero 0.

Si può anche dire che per "grandi" valori di n, a_n appartiene all'intorno sferico (vedi la definizione [1.29])

$$I(a; \epsilon) = \{x \in A : d(x, a) < \epsilon\}$$

il cui raggio ϵ è "piccolo". Diamo una definizione che eviti le parole "piccolo" e "grande" (vedi fig. 6.2).

6.1 DEFINIZIONE *Sia A un insieme fornito di una distanza $d(\cdot, \cdot)$ e sia $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ una successione in A. Un elemento $a \in A$ si dice limite della successione se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un numero $N \in \mathbb{N}$ tale che*

$$d(a_n, a) < \epsilon \qquad \textit{per ogni } n > N.$$

In tal caso la successione si dice convergente; si usano le notazioni

$$a = \lim_{n \to +\infty} a_n \qquad e \qquad a_n \to a \quad \textit{per } n \to +\infty.$$

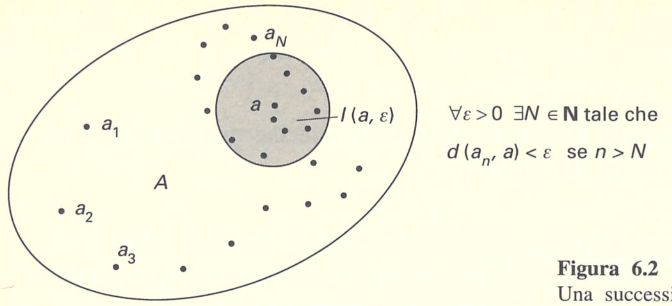

Figura 6.2
Una successione convergente in A.

Se $A = \mathsf{R}$ si considera la distanza $d(x, y) = |x - y|$, sicché la definizione 6.1 diventa:

$$a = \lim_{n \to +\infty} a_n \iff \forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathsf{N} \quad \text{tale che } |a_n - a| < \epsilon \quad \forall n > N, \qquad [6.8]$$

in cui abbiamo introdotto i simboli $\forall$, che sostituisce le parole "per ogni", e $\exists$, che significa "esiste" (vedi fig. 6.3).

Nella definizione 6.1 non compaiono più le parole "piccolo" e "grande", ma il loro valore intuitivo resta: quando si prende un valore "piccolo" per ϵ, in generale il valore di N (che dipende da ϵ!) dovrà essere scelto più "grande", come evidenziato nel prossimo esempio.

6.1 *Esempio*

Sia

$$a_n = \frac{n^2 - 1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n^2} \text{ per } n \in \mathsf{N}.$$

Evidentemente il "candidato" per il limite è il numero 1. Dimostriamo che la successione è convergente e che

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^2 - 1}{n^2} = 1.$$

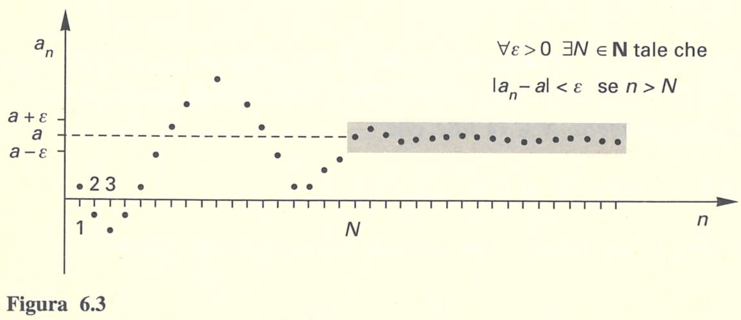

Figura 6.3
Una successione convergente in R.

Si deve verificare che 1 soddisfa la [6.8]. Sia $\epsilon > 0$ un numero arbitrario. Allora

$$d(a_n, 1) = \left|\frac{n^2 - 1}{n^2} - 1\right| = \frac{1}{n^2} < \epsilon \Longleftrightarrow n^2 > \frac{1}{\epsilon} \Longleftrightarrow n > \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}.$$

Possiamo allora scegliere come N un numero intero maggiore di $1/\sqrt{\epsilon}$:

$$n > N \Rightarrow n > \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \Rightarrow d(a_n, 1) < \epsilon,$$

cioè, se ϵ è "piccolo", N deve essere scelto "grande".

Finora abbiamo sempre parlato "del" limite (e non di "un" limite) di una successione. Infatti una successione non può avere due limiti diversi:

6.1 TEOREMA (Unicità del limite) *Sia* $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *una successione in* A. *Se esistono due elementi* a *e* b *di* A *tali che* $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ *e* $\lim_{n\to+\infty} a_n = b$, *allora* $a = b$.

Dimostrazione

Supponiamo, per assurdo, che $a \neq b$. Allora la distanza $d(a, b)$ è positiva:

$$d_0 = d(a, b) > 0.$$

Scegliamo un valore di ϵ compreso tra 0 e $d_0/2$. Dalla definizione di limite segue che esistono due numeri $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tali che

$$d(a_n, a) < \epsilon \quad \forall n > N_1 \quad \text{e} \quad d(a_n, b) < \epsilon \quad \forall n > N_2.$$

Usiamo la disuguaglianza triangolare [1.28]

$$d(a, b) \leq d(a_n, a) + d(a_n, b) < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon, \tag{6.9}$$

dove abbiamo scelto n tale che $n > N_1$ e $n > N_2$. Segue dalla scelta di ϵ e dalla [6.9] che $d(a, b) < d_0 = d(a, b)$, e abbiamo trovato una contraddizione. ■

Evidentemente non tutte le successioni sono convergenti; ad esempio, la successione $\{n^2\}_{n=1}^{+\infty}$ è formata da termini che diventano sempre più grandi con l'aumentare di n. Si dice che questa successione è *divergente* e il suo limite è *infinito*:

6.2 DEFINIZIONE *Sia* $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *una successione in* $\mathbb{R}$. *Si dice che la successione ha limite* $+\infty$ *e si scrive*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$$

se per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste un $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$a_n > M \qquad \textit{per ogni } n > N. \tag{6.10}$$

Si dice che la successione ha limite $-\infty$ e si scrive

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$$

se per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste un $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$a_n < -M \qquad \textit{per ogni } n > N. \tag{6.11}$$

Le successioni con limite $+\infty$ oppure $-\infty$ si dicono divergenti.

Ovviamente basterà verificare la [6.10] oppure la [6.11] per valori "grandi" di M. È facile vedere che, per esempio,

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{n\to+\infty} \log_2(1/n) = -\infty.$$

Una successione $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ in $\mathbb{R}$ si dice *limitata* se l'insieme $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ è limitato in $\mathbb{R}$, cioè se esiste un numero M tale che $|a_n| < M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Non sarà una sorpresa scoprire che una successione convergente è anche limitata:

6.2 TEOREMA *Una successione convergente in $\mathbb{R}$ è limitata.*

L'idea della dimostrazione è facile: basta controllare la "coda" della successione, cioè quello che succede per valori "grandi" di n, per cui il valore a_n è "vicino" al limite della successione. Più precisamente:

Dimostrazione

Sia $\{a_n\}$ una successione convergente ad $a \in \mathbb{R}$. Per la definizione di limite, posto $\epsilon = 1$, esiste un numero $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$a - 1 < a_n < a + 1 \quad \text{per ogni } n > N. \tag{6.12}$$

Siano $M_1 = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_N\}$ e $K_1 = \min\{a_1, a_2, \cdots, a_N\}$. Allora

$$K_1 \leq a_n \leq M_1 \quad \text{per } 1 \leq n \leq N. \tag{6.13}$$

Se si pongono $M = \max\{a+1, M_1\}$ e $K = \min\{a-1, K_1\}$, dalle [6.12] e [6.13] segue che

$$K \leq a_n \leq M \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N},$$

e la dimostrazione è completa. ■

Non vale il viceversa del teorema 6.2, ossia non tutte le successioni limitate sono convergenti. Per esempio la successione

$$\{1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \cdots\} = \{(-1)^{n+1}\}_{n=1}^{+\infty}$$

è limitata ma non è convergente. Quindi per stabilire la convergenza di una successione in R non basta dimostrare la sua limitatezza.

Per il calcolo dei limiti risultano di particolare utilità le proprietà elencate nel seguente teorema:

6.3 TEOREMA *Siano $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ e $\{b_n\}_{n=1}^{+\infty}$ due successioni convergenti in* R, *e siano a e b i loro rispettivi limiti per $n \to +\infty$.*

Allora, per $n \to +\infty$:

$$a_n \pm b_n \to a \pm b \tag{6.13}$$

$$a_n b_n \to ab \tag{6.14}$$

$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b} \qquad \textit{se } b \neq 0 \tag{6.15}$$

$${a_n}^{b_n} \to a^b \qquad \textit{se } a > 0 \tag{6.16}$$

$$\log_{a_n} b_n \to \log_a b \qquad \textit{se } a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0 \tag{6.17}$$

Le dimostrazioni delle [6.13], [6.14] e [6.15] seguono facilmente dalla definizione di limite e le lasciamo come esercizio; quelle delle [6.16] e [6.17], essendo un po' più elaborate, non le riportiamo.

Vediamo ora qualche applicazione del precedente risultato nel calcolo di alcuni limiti:

6.2 *Esempio*

Per calcolare limiti del tipo $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^2 + 2n + 1}{n^3 - n^2 + 3}$, si dividono il numeratore e il denominatore del quoziente per la potenza più alta che compare nel denominatore (in questo caso n^3):

$$\frac{n^2 + 2n + 1}{n^3 - n^2 + 3} = \frac{1/n + 2/n^2 + 1/n^3}{1 - 2/n + 3/n^3}\,.$$

Chiaramente il numeratore converge a 0 per $n \to +\infty$ e il denominatore converge a 1. Per la [6.15] risulta allora che il limite cercato è uguale a 0.

6.3 *Esempio*

Calcoliamo $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sqrt{4n^2 - 4n - 1}}{n + 1}$. Dividendo il numeratore e il denominatore per n e ricordando che $n = \sqrt{n^2}$ si trova

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{4 - 4/n - 1/n^2}}{1 + 1/n} = \sqrt{4} = 2.$$

Si noti che se in questi esempi non avessimo diviso il numeratore e il denominatore del termine della successione per una potenza di n, avremmo trovato nel limite per $n \to +\infty$ un'espressione che si potrebbe indicare simbolicamente con $\frac{+\infty}{+\infty}$, ossia una cosiddetta *forma indeterminata*. Le forme indeterminate più importanti sono

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad 0 \cdot (\pm\infty), \quad +\infty - \infty, \quad 1^{\pm\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad (+\infty)^0.$$

In tutti questi casi non si può dire nulla sull'esistenza o sul valore del limite.

6.4 *Esempio*

Il limite $\lim_{n\to+\infty} (\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2+n})$ è una forma indeterminata del tipo $+\infty - \infty$. Occorre un piccolo artificio per risolverlo. Si moltiplica e si divide il termine della successione per $\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2+n}$ e si usa la formula $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2+n})(\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2+n})}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2+n}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1-n^2-n}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-n}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2+n}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(1/n) - 1}{\sqrt{1+(1/n)^2} + \sqrt{1+1/n}} = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}.$$

Non tutte le espressioni contenenti $\pm\infty$ sono indeterminate; intuitivamente ci si aspetta per esempio che "$+\infty + \infty = +\infty$", e che "$2^{+\infty} = +\infty$". Più precisamente, sotto opportune ipotesi, si possono generalizzare al caso di successioni divergenti alcune delle proprietà stabilite dal teorema 6.3; in particolare si possono dimostrare le affermazioni di seguito elencate:

(a) $a_n \to +\infty$ e $b_n > M \in \mathsf{R}$ per $n \in \mathsf{N} \Rightarrow a_n + b_n \to +\infty$,

$a_n \to -\infty$ e $b_n < M \in \mathsf{R}$ per $n \in \mathsf{N} \Rightarrow a_n + b_n \to -\infty$;

(casi particolari: $+\infty + \infty = +\infty$, $+\infty + b = +\infty$ se $b \in \mathsf{R}$, $-\infty - \infty = -\infty$ e $-\infty + b = -\infty$ se $b \in \mathsf{R}$);

(b) $a_n \to +\infty$ e $b_n > M > 0$ per $n \in \mathsf{N} \Rightarrow a_n b_n \to +\infty$,

$a_n \to +\infty$ e $b_n < -M < 0$ per $n \in \mathsf{N} \Rightarrow a_n b_n \to -\infty$,

$a_n \to -\infty$ e $b_n > M > 0$ per $n \in \mathsf{N} \Rightarrow a_n b_n \to -\infty$,

$a_n \to -\infty$ e $b_n < -M < 0$ per $n \in \mathsf{N} \Rightarrow a_n b_n \to +\infty$;

(casi particolari: $(+\infty)\cdot b = +\infty$ se $b > 0$, $(+\infty)\cdot b = -\infty$ se $b < 0$, $(+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$, $(+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty$ ecc);

(c) $a_n \to \pm\infty \Rightarrow 1/a_n \to 0$,

$a_n \to 0$ e $a_n > 0$ per $n \in \mathsf{N} \Rightarrow 1/a_n \to +\infty$,

$a_n \to 0$ e $a_n < 0$ per $n \in \mathsf{N} \Rightarrow 1/a_n \to -\infty$.

(d) $a_n \to +\infty$ e $b_n > M > 0$ per $n \in \mathsf{N} \Rightarrow a_n^{b_n} \to +\infty$,

$a_n \to +\infty$ e $b_n < -M < 0$ per $n \in \mathsf{N} \Rightarrow a_n^{b_n} \to 0$,

$b_n \to +\infty$ e $a_n > M > 1$ per $n \in \mathsf{N} \Rightarrow a_n^{b_n} \to +\infty$,

$b_n \to +\infty$ e $0 < a_n < M < 1$ per $n \in \mathsf{N} \Rightarrow a_n^{b_n} \to 0$,

$b_n \to -\infty$ e $a_n > M > 1$ per $n \in \mathsf{N} \Rightarrow a_n^{b_n} \to 0$,

$b_n \to -\infty$ e $0 < a_n < M < 1$ per $n \in \mathsf{N} \Rightarrow a_n^{b_n} \to +\infty$;

(casi particolari: $(+\infty)^b = +\infty$ se $b > 0$, $(+\infty)^{+\infty} = +\infty$, $(+\infty)^b = 0$ se $b < 0$, $(+\infty)^{-\infty} = 0$, $a^{+\infty} = +\infty$ se $a > 1$, $a^{+\infty} = 0$ se $0 < a < 1$, $a^{-\infty} = 0$ se $a > 1$, $a^{-\infty} = +\infty$ se $0 < a < 1$);

(e) $b_n \to +\infty$ e $a > 1 \Rightarrow \log_a b_n \to +\infty$,

$b_n \to 0$, $b_n > 0$ per $n \in \mathsf{N}$ e $a > 1 \Rightarrow \log_a b_n \to -\infty$,

$b_n \to +\infty$ e $0 < a < 1 \Rightarrow \log_a b_n \to -\infty$,

$b_n \to 0$, $b_n > 0$ per $n \in \mathsf{N}$ e $0 < a < 1 \Rightarrow \log_a b_n \to +\infty$.

Le ultime proprietà risultano chiare osservando il grafico della funzione logaritmo (vedi fig. 2.5).

Concludiamo questa analisi con alcuni esempi.

6.5 *Esempio*

Il limite $\lim\limits_{n\to+\infty} (\log_3(n+1) + \log_3(\sqrt{n^2+3}))$ è un limite del tipo $+\infty + \infty$, e quindi è uguale a $+\infty$.

Il limite $\lim\limits_{n\to+\infty} (\log_3(n+1) - \log_3(\sqrt{n^2+3}))$ dà luogo ad una forma indeterminata del tipo $+\infty - \infty$. Usiamo la relazione $\log_3 a - \log_3 b = \log_3(a/b)$ per risolverla:

$$\lim_{n\to+\infty} \log_3 \frac{n+1}{\sqrt{n^2+3}} = \log_3 \left(\lim_{n\to+\infty} \frac{1+1/n}{\sqrt{1+3/n^2}} \right) = \log_3 1 = 0,$$

dove abbiamo usato la [6.17] (con $a_n = a = 3$).

6.6 *Esempio*

Risolviamo due forme indeterminate del tipo $+\infty - \infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} (2\log_3(n+2) - \log_3(n^2-5)) = \lim_{n\to+\infty} (\log_3(n+2)^2 - \log_3(n^2-5))$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \log_3 \frac{n^2+4n+4}{n^2-5} = \log_3 1 = 0;$$

$$\lim_{n\to+\infty} (\log_3(n+2) - 2\log_3 n) = \lim_{n\to+\infty} (\log_3(n+2) - \log_3 n^2)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \log_3 \frac{n+2}{n^2} = -\infty,$$

in cui abbiamo fatto uso della seconda proprietà del gruppo (e).

Esercizi

6.1 Si calcolino i limiti

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^3-3n+\sqrt{n}}{(n+1)^3}$ (b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2n-1}{n+3}\right)^{\sqrt{\frac{4n^2-3n+1}{8n^2+1}}}$

(c) $\lim\limits_{n\to+\infty} (\log_{10}(n^4-n^3+3) - \log_{10}(9n^3\sqrt{n}+5))$

(d) $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})$

(e) $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{n^2+2n} - n + 8)$

(f) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+2n}}{n+1} (\sqrt{n^4+n^2+1} - n^2)$

(g) $\lim\limits_{n\to+\infty} (5\log_{10}(2n-5) - 3\log_{10}(n+2) - 2\log_{10}(n+1))$.

6.3 Successioni monotone e teorema del confronto

Nel paragrafo precedente abbiamo calcolato i limiti di alcune successioni convergenti. Spesso, però, non solo è difficile *calcolare* il limite (si pensi al limite $\lim\limits_{n\to+\infty} (1+1/n)^n$ del § 6.1) ma non è affatto evidente se la successione sia o meno convergente.

Uno dei criteri più utili per stabilire l'esistenza del limite deriva, come vedremo, dalla proprietà delle successioni *monotone*:

6.3 DEFINIZIONE *Sia* $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *una successione in* $\mathbb{R}$. *La successione si dice:*

(a) *non decrescente se* $a_{n+1} \geq a_n$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$;
(b) *non crescente se* $a_{n+1} \leq a_n$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$;
(c) *crescente se* $a_{n+1} > a_n$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$;
(d) *decrescente se* $a_{n+1} < a_n$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$.

Una successione monotona è una successione non decrescente oppure non crescente. Una successione strettamente monotona è una successione crescente oppure decrescente.

Le successioni monotone non sono sempre convergenti. Per esempio le successioni $\{\sqrt{n}\}_{n=1}^{+\infty}$ e $\{-n+5\}_{n=1}^{+\infty}$ sono monotone ma, essendo non limitate, non sono convergenti. Risulta però che per una successione monotona l'essere limitata è condizione necessaria e sufficiente per la convergenza:

6.4 TEOREMA *Una successione monotona e limitata in* R *è convergente.*

Dimostrazione

Sia $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ non decrescente e limitata. L'insieme $\{a_n : n \in \mathsf{N}\}$ è perciò limitato (vedi fig. 6.4), quindi ammette estremo superiore e inferiore (vedi § 1.3). La figura 6.4 fa pensare che l'estremo superiore sia il limite della successione.

Posto allora $a = \sup\{a_n : n \in \mathsf{N}\}$ dimostriamo che a è il limite della successione, cioè che per ogni $\epsilon > 0$ esiste un N tale che

$$|a_n - a| < \epsilon \qquad \text{per } n > N. \qquad [6.18]$$

Essendo l'estremo superiore, a è un maggiorante dell'insieme $\{a_n : n \in \mathsf{N}\}$, cioè $a_n \leq a$ per ogni n, e quindi

$$|a_n - a| = a - a_n. \qquad [6.19]$$

D'altra parte, a è il minimo dei maggioranti: se $\epsilon > 0$ allora $a - \epsilon$ non è un maggiorante dell'insieme $\{a_n : n \in \mathsf{N}\}$; esiste quindi un numero $N \in \mathsf{N}$ tale che $a_N > a - \epsilon$. Poiché la successione è non decrescente, $a_n \geq a_N$ per ogni $n > N$, da cui segue che

$$a - a_n \leq a - a_N < \epsilon \qquad \text{per } n > N. \qquad [6.20]$$

La [6.18] risulta dalle [6.19] e [6.20].

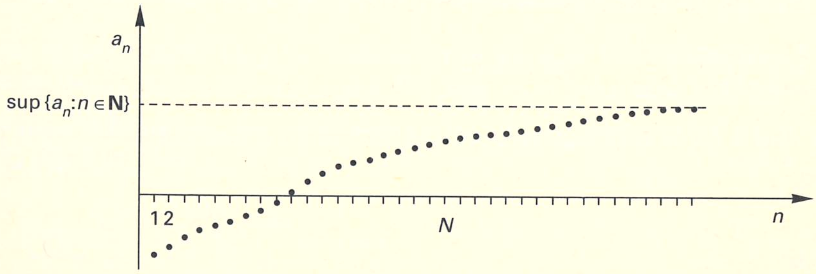

Figura 6.4
Una successione non decrescente e limitata.

Se la successione è non crescente la dimostrazione è analoga: invece dell'estremo superiore si considera l'estremo inferiore. ■

6.1 *Osservazione*

Si può provare in modo del tutto simile al precedente che se una successione monotona è illimitata superiormente allora diverge a $+\infty$, se è illimitata inferiormente allora diverge a $-\infty$.

Un altro strumento utile per determinare il limite di una successione è fornito dal *teorema del confronto* (detto anche *teorema dei due carabinieri*):

6.5 TEOREMA (Teorema del confronto) *Siano* $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *e* $\{c_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *tre successioni in* R *tali che*

$$a_n \leq b_n \leq c_n \qquad \forall\ n \in \mathsf{N}. \tag{6.21}$$

(a) *Se* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = L \in \mathsf{R}$, *allora la successione* $\{b_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *è convergente e* $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = L$.

(b) *Se* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, *allora* $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$.

(c) *Se* $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = -\infty$, *allora* $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = -\infty$.

Dimostrazione

Dimostriamo solo la prima parte; le dimostrazioni di (b) e (c) sono analoghe.

Sia $\epsilon > 0$. Poiché L è il limite delle successioni $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ e $\{c_n\}_{n=1}^{+\infty}$, esiste un numero $N > 0$ tale che

$$L - \epsilon < a_n \quad \text{e} \quad c_n < L + \epsilon \qquad \text{per } n > N.$$

Ma allora dalla [6.21] segue che $L - \epsilon < b_n < L + \epsilon$ per ogni $n > N$, cioè che L è il limite della successione $\{b_n\}_{n=1}^{+\infty}$. ■

6.4 *Esempio*

Per calcolare il limite della successione $\{(1/n)\cos n\}_{n=1}^{+\infty}$ si noti che

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\cos n}{n} \leq \frac{1}{n} \qquad \text{per } n \in \mathsf{N}.$$

Essendo $\lim\limits_{n\to+\infty} \pm 1/n = 0$, dal teorema del confronto segue che $\dfrac{\cos n}{n} \to 0$ per $n \to +\infty$.

Esercizi

6.2 Dimostrare il teorema 6.4 nel caso di una successione non crescente.

6.4 Alcuni limiti elementari

È comodo avere a disposizione alcuni limiti elementari. Li abbiamo raccolti nel seguente teorema.

6.6 TEOREMA

(a) *Sia* $r \in \mathbb{R}$. *Allora*

$$\lim_{n\to+\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \textit{se } -1 < r < 1 \\ 1 & \textit{se } r = 1 \\ +\infty & \textit{se } r > 1. \end{cases} \qquad [6.22]$$

Il limite non esiste se $r \leq -1$.

(b) *Siano* p *e* q *costanti. Allora*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^p}{q^n} = 0 \qquad \textit{se } p \in \mathbb{R} \textit{ e } q > 1. \qquad [6.23]$$

(c) *Sia* $a > 0$, $a \neq 1$ *e sia* p *una costante. Allora*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_a n}{n^p} = 0 \qquad \textit{se } p > 0. \qquad [6.24]$$

Dimostrazione

La dimostrazione della [6.22] è banale e non la riportiamo.
Dimostriamo la [6.23]. Prima proviamo che il limite esiste.
Posto $a_n = n^p/q^n$ si ha che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^p \frac{1}{q} \to \frac{1}{q} < 1 \qquad \text{per } n \to +\infty. \qquad [6.25]$$

Allora dalla definizione di limite segue che esiste un numero $N \in \mathbb{N}$ tale che $a_{n+1}/a_n < 1$ per ogni $n > N$, ovvero

$$a_n > a_{n+1} > a_{n+2} > a_{n+3} > \cdots > 0 \qquad \text{se } n > N,$$

sicché la successione $\{a_n\}_{n=N}^{+\infty}$ è decrescente per $n > N$. Chiaramente è anche limitata, quindi dal teorema 6.4 segue che $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ per qualche numero $a \geq 0$.

Resta da dimostrare che $a = 0$. Supponiamo per assurdo che sia $a > 0$. Allora, per la [6.15] risulta

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\lim_{n\to+\infty} a_{n+1}}{\lim_{n\to+\infty} a_n} = \frac{a}{a} = 1,$$

che è in contraddizione con la [6.25].

Nel capitolo 14 studieremo la teoria matematica delle serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$. Gli a_k sono detti *termini* della serie e gli $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ le *somme parziali* o *somme ridotte* della serie. La serie si dice *convergente* se la successione $\{s_n\}_{n=0}^{+\infty}$ è convergente; in tal caso il numero

$$s = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$$

è detto la *somma* della serie e si usa la notazione

$$s = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k.$$

Torniamo al nostro esempio. La serie

$$1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \cdots + r^n + \cdots$$

è detta *serie geometrica*. Dalla formula [6.27] segue che essa è convergente se e solo se r^{n+1} tende a 0 per n che tende all'infinito, ossia se e solo se $-1 < r < 1$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} r^k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1}{1-r} \qquad \text{se } -1 < r < 1. \tag{6.28}$$

6.6 Il numero *e*

Consideriamo la successione $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{+\infty}$ introdotta nel primo paragrafo. Non è evidente che questa successione sia convergente: il suo limite formale è una forma indeterminata del tipo $1^{+\infty}$. Per dimostrare la convergenza della successione è fondamentale il seguente lemma.

6.1 LEMMA *Sia* $a_n = (1 + 1/n)^n$. *Allora*

$$a_n < 4 \qquad \textit{per } n \in \mathbb{N} \tag{6.29}$$

e

$$a_{n+1} \geq a_n \qquad \textit{per } n \in \mathbb{N}. \tag{6.30}$$

La dimostrazione è riportata nel paragrafo 6.7.

Segue dal lemma 6.1 che la successione $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{+\infty}$ è monotona e limitata, e quindi convergente (vedi il teorema 6.4). Il limite si denota con e:

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n. \tag{6.31}$$

Si può dimostrare che e è un numero irrazionale e che $e \approx 2{,}718\,281\,828\,5\cdots$

Usiamo la [6.31] per dimostrare il seguente risultato

6.7 TEOREMA *Se $c \in \mathrm{R}$, allora*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{c}{n}\right)^n = e^c. \qquad [6.32]$$

Dimostrazione

Se $c = 0$ il risultato è banale. Sia $c > 0$, allora

$$\left(1+\frac{c}{n}\right)^n = \left(\left(1+\frac{c}{n}\right)^{n/c}\right)^c.$$

Poiché $n/c \to +\infty$ per $n \to +\infty$, si può dimostrare (vedi l'esercizio 6.5) che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{c}{n}\right)^{n/c} = e, \qquad [6.33]$$

da cui segue la tesi.

Sia ora $c = -1$, allora

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n &= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-n} \\ &= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-(n-1)}\cdot\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-1} = e^{-1}.\end{aligned} \qquad [6.34]$$

Per $c < 0$ e $c \neq -1$, possiamo scrivere

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{c}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(\left(1-\frac{-c}{n}\right)^{n/(-c)}\right)^{-c}.$$

Dalla [6.34] segue che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{-c}{n}\right)^{n/(-c)} = \frac{1}{e} \qquad [6.35]$$

(vedi l'esercizio 6.5). ∎

Osserviamo che ponendo $c = -bT$ nella [6.32] otteniamo

$$\lim_{n\to+\infty}(1-bT/n)^n = e^{-bT}$$

e quindi la formula [6.6].