Capitolo 7

Limiti di funzioni reali di una variabile. Funzioni continue

7.1 Generalità

Ricordiamo alcune delle definizioni date nei primi due capitoli, specializzandole al caso di funzioni reali di una variabile reale.

7.1 Definizione *Sia* $f : \operatorname{dom} f \to \mathbb{R}$, *dove* $\operatorname{dom} f \subseteq \mathbb{R}$.

(a) *La* f *si dice limitata in un insieme* $I \subseteq \operatorname{dom} f$ *se l'insieme* $\{f(x),\ x \in I\}$ *è limitato, cioè se esiste un numero* $M \in \mathbb{R}$ *tale che* $|f(x)| \leq M$ *per ogni* $x \in I$.

(b) *L'estremo superiore (inferiore) della* f *in* $I \subseteq \operatorname{dom} f$ *è l'estremo superiore (inferiore) dell'insieme* $\{f(x),\ x \in I\}$ *e si denota con* $\sup\limits_{x \in I} f(x)$ *o* $\sup\limits_{I} f$ ($\inf\limits_{x \in I} f(x)$ *o* $\inf\limits_{I} f$).

(c) *Il massimo assoluto (minimo assoluto) della* f *nell'insieme* $I \subseteq \operatorname{dom} f$ *è il massimo (minimo) dell'insieme* $\{f(x),\ x \in I\}$ *e si denota con* $\max\limits_{x \in I} f(x)$ *o* $\max\limits_{I} f$ ($\min\limits_{x \in I} f(x)$ *o* $\min\limits_{I} f$).

(d) *La funzione* f *ha un massimo (relativo) nel punto* $x_0 \in \operatorname{dom} f$ *se esiste un* $\epsilon > 0$ *tale che*

$$f(x) \leq f(x_0) \qquad \text{per } x \in I(x_0; \epsilon) \cap \operatorname{dom} f,$$

dove $I(x_0, \epsilon) = (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ *è un intorno sferico di* x_0 *(vedi la* [1.29]*). La funzione ha un minimo (relativo) nel punto* $x_0 \in \operatorname{dom} f$ *se esiste un* $\epsilon > 0$ *tale che*

$$f(x) \geq f(x_0) \qquad \text{per } x \in I(x_0; \epsilon) \cap \operatorname{dom} f.$$

Un estremo della f *è un massimo oppure un minimo di* f.

Spesso indicheremo una funzione semplicemente con $f(x)$, sottointendendo che il dominio della f è il più grande sottoinsieme di $\mathbb{R}$ nel quale essa è definita.

7.1 *Esempio*

La funzione $f(x) = x^2$ è limitata nell'intervallo $(0, 1)$. La funzione $f(x) = 1/x$ non è limitata in $(0, 1)$.

7.2 *Esempio*

Sia $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Allora $\operatorname{dom} f = [-1, 1]$, f ha un massimo in $x = 0$ e ha minimi in $x = -1$ e $x = 1$. Sia $I = \left(0, \frac{1}{2}\right]$; allora

$$\min_{x \in I} \sqrt{1 - x^2} = \inf_{x \in I} \sqrt{1 - x^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \sup_{x \in I} \sqrt{1 - x^2} = 1.$$

Si noti che la f non ha un massimo in I (vedi fig. 7.1).

Nel paragrafo 1.3 abbiamo detto che tutti i sottoinsiemi limitati di R hanno estremo superiore e inferiore. Quindi, per la definizione 7.1, si ha:

7.1 TEOREMA *Sia $f : \operatorname{dom} f \subseteq \mathsf{R} \to \mathsf{R}$ e sia f limitata in $I \subseteq \operatorname{dom} f$. Allora esistono $\sup_{x \in I} f(x)$ e $\inf_{x \in I} f(x)$.*

Ricordiamo che nel paragrafo 1.7 abbiamo dato le definizioni di funzione iniettiva, strettamente monotona, invertibile e di funzione inversa e composta; inoltre abbiamo visto che per le funzioni strettamente monotone vale il seguente teorema:

7.2 TEOREMA *Sia $f : \operatorname{dom} f \subseteq \mathsf{R} \to \mathsf{R}$ e sia f strettamente monotona in $I \subseteq \operatorname{dom} f$; allora la f è invertibile in I.*

Definiamo ora le funzioni monotone (vedi fig. 7.2):

7.2 DEFINIZIONE *Sia $f : \operatorname{dom} f \subseteq \mathsf{R} \to \mathsf{R}$ e sia $I \subseteq \operatorname{dom} f$.*

(a) *f è non decrescente in I quando $f(x_1) \geq f(x_2)$ se $x_1 \geq x_2$ e $x_1, x_2 \in I$.*
(b) *f è non crescente in I quando $f(x_1) \leq f(x_2)$ se $x_1 \geq x_2$ e $x_1, x_2 \in I$.*
(c) *f è monotona in I quando f è non decrescente oppure non crescente in I.*

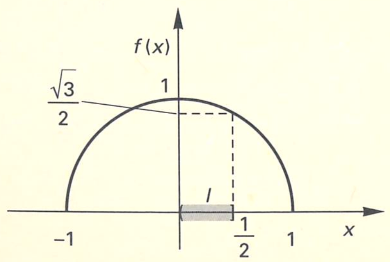
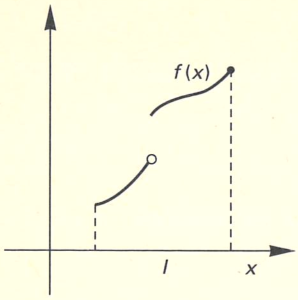
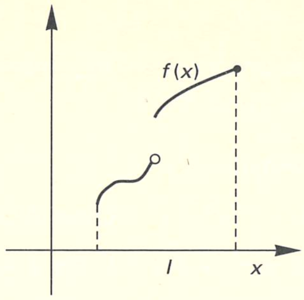


Figura 7.1
La funzione $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.



f strettamente monotona (crescente) in I



f monotona (non decrescente) in I

Figura 7.2

7.3 DEFINIZIONE *Sia* $f : \operatorname{dom} f \subseteq \mathsf{R} \to \mathsf{R}$.

(a) f *si dice funzione pari* (vedi fig. 7.3) *se*

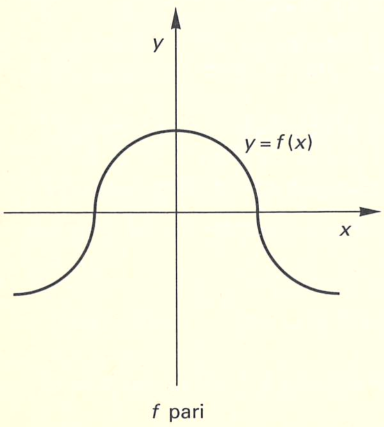
$$x \in \operatorname{dom} f \Rightarrow -x \in \operatorname{dom} f \qquad e \qquad f(-x) = f(x) \ \ se\ \ x \in \operatorname{dom} f.$$

(b) f *si dice funzione dispari se*

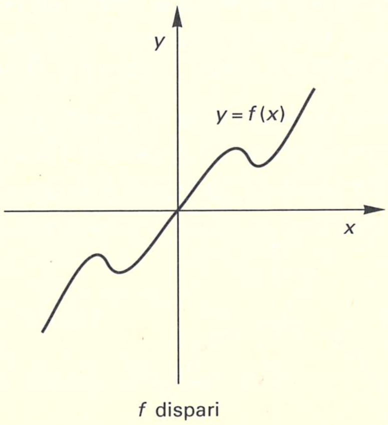
$$x \in \operatorname{dom} f \Rightarrow -x \in \operatorname{dom} f \qquad e \qquad f(-x) = -f(x) \ \ se\ \ x \in \operatorname{dom} f.$$

7.3 *Esempio*

Le funzioni $f(x) = x^2$ e $f(x) = \cos x$ sono pari; invece le funzioni $f(x) = x^3$, $f(x) = \sin x$ e $f(x) = \operatorname{tg} x$ sono dispari.



f pari



f dispari

Figura 7.3
Funzioni pari e dispari.

Esercizi

7.1 Determinare il dominio delle funzioni $f(x) = \log_{10} x$, $f(x) = \sin(\log_{10} x)$, $f(x) = 1/x$, $f(x) = -x^2$ e $f(x) = 2^{-x^2}$, e precisare se queste funzioni sono ivi limitate.

7.2 Determinare quali delle seguenti funzioni sono pari o dispari: $f(x) = |x|$, $f(x) = 1/x$, $f(x) = \sin(x^2)$, $f(x) = \cos(x^3)$, e $f(x) = \sin^2 x$.

7.3 Sia $f(x) = 2x - x^2$. Determinare (se esistono) $\sup\limits_{x \in I} f(x)$ e $\max\limits_{x \in I} f(x)$ con $I = (0, 2)$, $I = (1, 2)$ e $I = [1, 2)$.

7.2 Limiti di funzioni

Sia f la funzione $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. Questa funzione è definita in tutti i punti di R tranne 0. Per aver un'idea del grafico della funzione per valori piccoli di x, è utile considerare il *limite* della funzione per x che tende a 0, cioè, intuitivamente, il numero reale al quale il valore di $f(x)$ si avvicina se x si avvicina a 0.

Il concetto di limite per una funzione è precisato dalla seguente definizione:

7.4 DEFINIZIONE *Sia $f : \mathrm{dom}\, f \to \mathsf{R}$ una funzione tale che*

$$(x_0 - \delta_0, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta_0) \subseteq \mathrm{dom}\, f \qquad [7.1]$$

per qualche $x_0 \in \mathsf{R}$ e $\delta_0 > 0$. Il numero L si dice limite della funzione $f(x)$ per x che tende a x_0, e si scrive

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L, \quad \textit{oppure} \quad f(x) \to L \ \textit{per} \ x \to x_0,$$

se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta \in (0, \delta_0)$ tale che

$$|f(x) - L| < \epsilon \quad \textit{se} \quad 0 < |x - x_0| < \delta. \qquad [7.2]$$

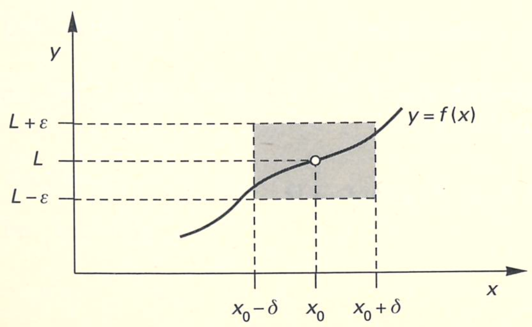


Figura 7.4
$|f(x) - L| < \epsilon$ se $0 < |x - x_0| < \delta$.

L'essenza della definizione è nella formula [7.2]: se prendiamo ϵ molto piccolo, la differenza tra $f(x)$ e L diventa molto piccola se x è sufficientemente vicino a x_0. La [7.1] serve solo a garantire che $f(x)$ sia ben definita per i valori di x in [7.2].

Si osservi che non necessariamente $x_0 \in \operatorname{dom} f$. E anche se $x_0 \in \operatorname{dom} f$, non si richiede che la [7.2] sia soddisfatta per $x = x_0$ (vedi fig. 7.4).

7.1 *Osservazione*

Per semplicità di esposizione abbiamo definito il concetto di limite per funzioni che soddisfano la [7.1]. Se la f verifica la condizione meno restrittiva:

$$\text{per ogni } \delta_0 > 0 \text{ esiste } x \neq x_0 \text{ tale che } x \in \operatorname{dom} f \cap (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0),$$

si richiede che per ogni $\epsilon > 0$ esista $\delta > 0$ tale che

$$|f(x) - L| < \epsilon \text{ se } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ e } x \in \operatorname{dom} f.$$

7.4 *Esempio*

Dimostriamo che $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$. Il dominio della f è R; preso allora un $\epsilon > 0$, dobbiamo determinare un $\delta > 0$ per cui sia verificata la [7.2]. Si ha:

$$|x^2 - 4| < \epsilon \text{ se } 0 < |x - 2| < \delta$$

$$\iff 4 - \epsilon < x^2 < 4 + \epsilon \text{ se } 2 - \delta < x < 2 + \delta \quad (x \neq 2)$$

$$\iff \sqrt{4 - \epsilon} < x < \sqrt{4 + \epsilon} \text{ se } 2 - \delta < x < 2 + \delta \quad (x \neq 2).$$

Si può quindi scegliere $\delta = \max\{\sqrt{4+\epsilon} - 2, 2 - \sqrt{4 - \epsilon}\}$ (si noti che dobbiamo scegliere δ sempre più piccolo se ϵ diventa più piccolo).

Non è detto che il limite di una funzione esista. È facile verificare che la cosiddetta funzione *segno di* x

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

non ha limite per $x \to 0$, ma ammette limite *destro* e limite *sinistro* nel senso della seguente definizione (vedi fig. 7.5):

7.5 DEFINIZIONE *Sia* $x_0 \in$ R *e sia* $f : \operatorname{dom} f \to$ R.

(a) *Sia*

$$(x_0, x_0 + \delta_0) \subseteq \operatorname{dom} f$$

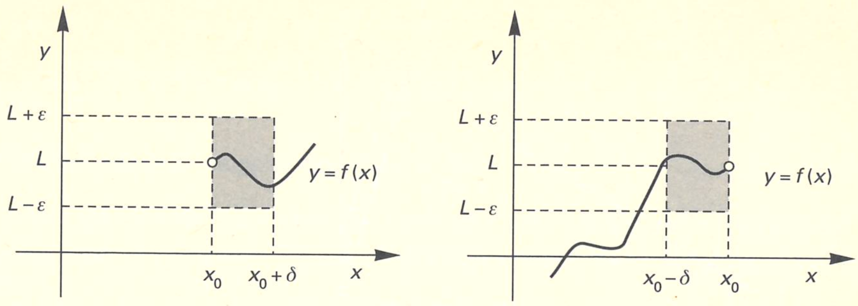


Figura 7.5
Limite destro e limite sinistro.

per qualche $\delta_0 > 0$. *Il numero* L *si dice limite destro della* f *per* x *che tende a* x_0 *e si scrive*

$$\lim_{x \to x_0^+} = L, \quad \textit{oppure} \quad f(x) \to L \ \textit{per} \ x \to x_0^+,$$

se per ogni $\epsilon > 0$ *esiste* $\delta \in (0, \delta_0)$ *tale che*

$$|f(x) - L| < \epsilon \quad \textit{se} \quad x_0 < x < x_0 + \delta.$$

(b) *Sia*

$$(x_0 - \delta_0, x_0) \subseteq \operatorname{dom} f$$

per qualche $\delta_0 > 0$. *Il numero* L *si dice limite sinistro della* f *per* x *che tende a* x_0 *e si scrive*

$$\lim_{x \to x_0^-} = L, \quad \textit{oppure} \quad f(x) \to L \ \textit{per} \ x \to x_0^-,$$

se per ogni $\epsilon > 0$ *esiste* $\delta \in (0, \delta_0)$ *tale che*

$$|f(x) - L| < \epsilon \quad \textit{se} \quad x_0 - \delta < x < x_0.$$

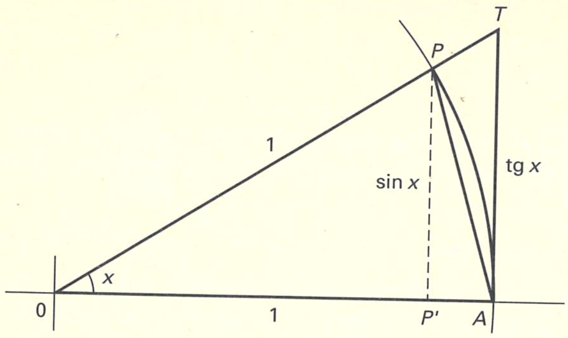
Dalle definizioni date segue immediatamente

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L \text{ e } \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L. \qquad [7.3]$$

7.5 *Esempio*

Proviamo che

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \qquad [7.4]$$



Area (triangolo OAP) < area (settore OAP) < area (triangolo OAT)

Figura 7.6
$\sin x < x < \operatorname{tg} x$.

Basta dimostrare che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1. \qquad [7.5]$$

Infatti dalla [7.5] segue che, posto $y = -x$,

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\sin(-y)}{-y} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\sin y}{y} = 1.$$

Consideriamo la figura 7.6. Sia $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Nel cerchio di raggio 1 le lunghezze dei segmenti PP' e AT e dell'arco AP sono $\sin x$, $\operatorname{tg} x$ e x. L'area del triangolo OAP di altezza $\sin x$ e base 1 è $\frac{1}{2}\sin x$; quella del settore circolare OAP è $\frac{1}{2}x$ (vedi § 2.4); infine quella del triangolo OAT di altezza $\operatorname{tg} x$ e base 1 è $\frac{1}{2}\operatorname{tg} x$. Dunque

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \qquad \text{per } 0 < x < \frac{\pi}{2},$$

ovvero,

$$\cos x = \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} < \frac{\sin x}{x} < \frac{\sin x}{\sin x} = 1 \qquad \text{per } 0 < x < \frac{\pi}{2}\,. \qquad [7.6]$$

Dalla definizione di limite risulta facilmente che $\lim_{x\to 0^+} \cos x = 1$ e la [7.5] segue dalla [7.6] e dal seguente teorema del confronto:

7.3 Teorema (teorema del confronto) *Siano f, g e h tre funzioni dell'intervallo $(x_0, x_0 + \delta_0)$ in* R *tali che*

$$f(x) < g(x) < h(x) \qquad \textit{per ogni } x \in (x_0, x_0 + \delta_0).$$

Allora

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} h(x) = L \Rightarrow \lim_{x\to x_0^+} g(x) = L.$$

Risultati analoghi valgono per $\lim_{x\to x_0^-}$ e $\lim_{x\to x_0}$.

Come nel caso del teorema del confronto per i limiti delle successioni, la dimostrazione del teorema 7.3 segue immediatamente dalla definizione stessa di limite.

7.6 DEFINIZIONE

(a) *Sia* $f : \mathrm{dom}\, f \to \mathsf{R}$ *una funzione tale che*

$$(a_0, +\infty) \subseteq \mathrm{dom}\, f$$

per qualche $a_0 \in \mathsf{R}$ *e sia* $L \in \mathsf{R}$. *Allora si scrive*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$$

se per ogni ϵ *esiste* $a > a_0$ *tale che*

$$|f(x) - L| < \epsilon \quad \text{se} \quad x > a. \qquad [7.7]$$

(b) *Sia* $f : \mathrm{dom}\, f \to \mathsf{R}$ *una funzione tale che*

$$(x_0 - \delta_0, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta_0) \subseteq \mathrm{dom}\, f$$

per qualche $x_0 \in \mathsf{R}$ *e* $\delta_0 > 0$. *Si scrive*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$$

se per ogni $M > 0$ *esiste* $\delta \in (0, \delta_0)$ *tale che*

$$f(x) > M \quad \text{se} \quad 0 < |x - x_0| < \delta. \qquad [7.8]$$

Si definiscono in modo analogo i limiti

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to x_0^\pm} f(x) = \pm\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty.$$

Come già visto per le successioni, le funzioni monotone e limitate godono di particolari proprietà per quanto riguarda l'esistenza del limite, come evidenziato dal seguente teorema:

7.4 TEOREMA *Sia* $f : \operatorname{dom} f \to \mathbb{R}$.

(a) *Se* f *è monotona e limitata in* $(a,b) \subseteq \operatorname{dom} f$, *allora esistono i limiti*

$$\lim_{x\to a^-} f(x) \quad e \quad \lim_{x\to b^+} f(x).$$

(b) *Se* f *è monotona e limitata in* $(a,+\infty) \subseteq \operatorname{dom} f$, *allora esiste il limite*

$$\lim_{x\to +\infty} f(x).$$

(c) *Se* f *è monotona e limitata in* $(-\infty,b) \subseteq \operatorname{dom} f$, *allora esiste il limite*

$$\lim_{x\to -\infty} f(x).$$

La dimostrazione è analoga a quella del teorema 6.4. Per esempio, se la f è non decrescente in (a,b), si dimostra che (vedi fig. 7.7)

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \inf_{x\in(a,b)} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to b^+} f(x) = \sup_{x\in(a,b)} f(x). \qquad [7.9]$$

Come conseguenza del teorema 7.4 abbiamo:

7.1 COROLLARIO *Sia* f *monotona in* $(a,b) \subseteq \operatorname{dom} f$. *Allora per ogni* $x_0 \in (a,b)$ *esistono in* $\mathbb{R}$ *i limiti*

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \quad e \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x).$$

Se f *è non decrescente allora*

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \sup_{x\in(a,x_0)} f(x), \qquad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \inf_{x\in(x_0,b)} f(x);$$

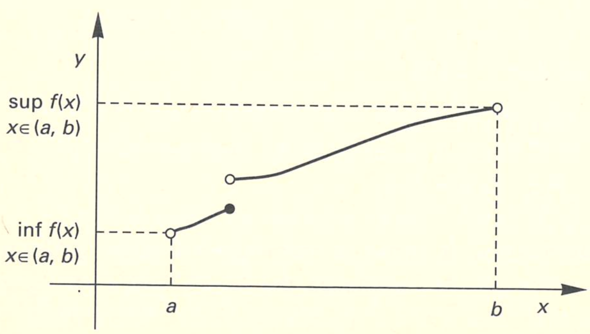


Figura 7.7
f non decrescente e limitata.

se f è non crescente allora

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \inf_{x\in(a,x_0)} f(x), \qquad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \sup_{x\in(x_0,b)} f(x).$$

In modo del tutto analogo al caso dei limiti di successioni si può dimostrare che anche per i limiti di funzioni valgono le proprietà enunciate nel teorema 6.3; quindi, ad esempio, se $f(x) \to L_1$ e $g(x) \to L_2$ per $x \to x_0$, allora $f(x) + g(x) \to L_1 + L_2$ per $x \to x_0$.

7.6 *Esempio*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}{1+\dfrac{1}{x}} = 1.$$

Si noti che abbiamo diviso numeratore e denominatore per x osservando che $\sqrt{x^2} = |x| = x$ se $x > 0$. Se si calcola invece lo stesso limite per x che tende a $-\infty$, si deve ricordare che $\sqrt{x^2} = |x| = -x$ se $x < 0$, da cui si ottiene

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1} = -\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}{1+\dfrac{1}{x}} = -1.$$

7.7 *Esempio*

Se poniamo $y = 2x$, ricordando la [7.4] otteniamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{5x} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{\dfrac{5}{2}y} = \frac{2}{5}.$$

7.8 *Esempio*

Si vuole calcolare il limite della funzione $\dfrac{\cos x - 1}{x^2}$ per $x \to 0$. Ricordando che $\cos x = \cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$ si ha:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}{x^2} = -\lim_{y\to 0} \frac{1}{2}\left(\frac{\sin y}{y}\right)^2 = -\frac{1}{2}, \qquad [7.10]$$

dove abbiamo posto $y = \dfrac{x}{2}$. Un'altra possibilità per calcolare lo stesso limite è moltiplicare il numeratore e il denominatore per $(\cos x + 1)$ (verificare!).

7.6 TEOREMA *Sia* $f : \operatorname{dom} f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e sia* $(x_0 - \delta_0, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta_0) \subseteq \operatorname{dom} f$ *per qualche* $\delta_0 > 0$. *Allora*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq L$$

se e solo se esiste una successione $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *e un numero* $\epsilon > 0$ *tali che*

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0, \; x_n \in (x_0 - \delta_0, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta_0) \; \textit{per } n \in \mathbb{N} \quad \textit{e} \quad |f(x_n) - L| \geq \epsilon.$$

7.4 Funzioni continue

Sia f la funzione

$$f : x \mapsto [x], \qquad x \in \mathbb{R},$$

dove la *parte intera* $[x]$ di x indica il più grande numero intero n tale che $n \leq x$:

$$[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}.$$

Per esempio $\left[\frac{3}{2}\right] = 1$, $[3] = 3$ e $\left[-\frac{3}{2}\right] = -2$. Nella figura 7.8 è tracciato il grafico della funzione $f(x) = [x]$.

Abbiamo tutti un'idea intuitiva del concetto di continuità di una funzione, secondo la quale diremmo che la funzione $f(x) = [x]$ è discontinua in tutti i valori interi di x ed è continua in tutti i punti $x \notin \mathbb{Z}$. La seguente definizione formalizza e precisa questa idea.

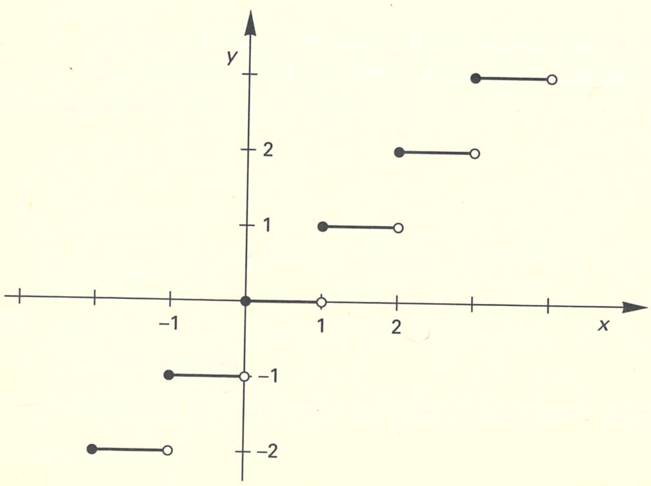


Figura 7.8
La funzione $f(x) = [x]$.

7.7 DEFINIZIONE

opportuno (: $\exists I_{x_0} \subseteq \mathrm{dom}\, f$)

(a) *Una funzione f è continua nel punto $x_0 \in \mathrm{dom}\, f$ se*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \qquad [7.14]$$

(b) *Una funzione f è continua a destra (a sinistra) nel punto $x_0 \in \mathrm{dom}\, f$ se*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0) \qquad \left(\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0) \right).$$

Si osservi che, secondo questa definizione, la funzione $f(x) = [x]$ non solo non è continua nei punti $n \in \mathsf{Z}$ ma neanche è continua a sinistra in questi punti:

$$\lim_{x \to n^-} [x] = n - 1 \neq n = [n] \qquad \text{se } n \in \mathsf{Z}.$$

Risulta, però, che la f è continua a destra in tutti i punti $n \in \mathsf{Z}$:

$$\lim_{x \to n^+} [x] = n = [n] \qquad \text{se } n \in \mathsf{Z}.$$

Spesso nel seguito parleremo di continuità di una funzione in un *intervallo*:

7.8 DEFINIZIONE

(a) *Una funzione f si dice continua in un intervallo (a, b) se la f è continua in ogni punto $x \in (a, b)$. Si usa allora la notazione*

$$f \in C((a, b)).$$

(b) *Una funzione f si dice continua in un intervallo $[a, b]$ se la f è continua in (a, b), continua a sinistra in a e continua a destra in b. In tal caso si usa la notazione*

$$f \in C([a, b]).$$

7.10 *Esempio*

Le funzioni $f(x) = x^2$ e $f(x) = 3^x$ sono continue in R; la funzione $f(x) = 1/x$ è continua negli intervalli $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$.

Dalle proprietà enunciate per i limiti e dalla definizione di continuità segue immediatamente che se

$f(x)$ e $g(x)$ sono continue in x_0,

allora

$$f(x) \pm g(x) \text{ è continua in } x_0, \tag{7.15}$$

$$f(x)g(x) \text{ è continua in } x_0, \tag{7.16}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \text{ è continua in } x_0 \text{ se } g(x_0) \neq 0. \tag{7.17}$$

Anche la composizione di due funzioni conserva la continuità:

7.7 TEOREMA *Sia $g \in C(I)$ e sia f una funzione continua in J, dove*

$$J = g(I) = \{g(x) : x \in I\}.$$

$g(x)$ è opportuno (i.e. in $\mathring{I}$)

Allora la funzione composta $f \circ g$ è continua in I.

7.11 *Esempio*

La funzione $g(x) = x^2 - 1$ è continua in R e la funzione $f(x) = \sqrt{x}$ è continua in $[0, +\infty)$. Allora la funzione composta

$$h(x) = f \circ g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

è continua nell'insieme dove $x^2 - 1 \geq 0$, cioè nell'intervallo $[-1, 1]$.

Dimostrazione

Sia $x_0 \in I$ e sia $\epsilon > 0$. Poiché f è continua nel punto $y_0 = g(x_0)$ esiste $\delta_0 > 0$ tale che

$$|f(y) - f(g(x_0))| = |f(y) - f(y_0)| < \epsilon \quad \text{se } y \in J \text{ e } |y_0 - y| \leq \delta_0. \tag{7.18}$$

D'altra parte la g è continua in x_0 e quindi esiste $\delta > 0$ tale che

$$|g(x) - y_0| = |g(x) - g(x_0)| < \delta_0 \quad \text{se } x \in I \text{ e } |x - x_0| < \delta.$$

Sostituendo $g(x)$ a y nella [7.18] (si noti che $g(x) \in J$ se $x \in I$) si ha

$$|f(g(x)) - f(g(x_0))| < \epsilon \quad \text{se } x \in I \text{ e } |x - x_0| < \delta.$$

Poiché ϵ è arbitrario, questo significa che la funzione $f \circ g$ è continua in x_0. ■

Osserviamo che abbiamo essenzialmente dimostrato il seguente risultato, utile per il calcolo dei limiti:

7.8 TEOREMA *Se $g(x) \to a$ per $x \to x_0$ e se f è una funzione continua in a, allora $f(g(x)) \to f(a)$ per $x \to x_0$, ovvero*

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to x_0} g(x)\right) \quad \textit{se } f \textit{ è continua in } a = \lim_{x \to x_0} g(x).$$

7.12 *Esempio*

Si vuole calcolare il limite

$$L = \lim_{x \to 0} 3^{\frac{\cos 4x - 1}{x^2}}.$$

Usando la [7.10] troviamo

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos 4x - 1}{x^2} = \lim_{x \to 0} 16 \frac{\cos 4x - 1}{(4x)^2} = -8.$$

D'altra parte la funzione 3^x è continua in $x = -8$ e quindi, per il teorema 7.8, $L = 3^{-8}$.

Anche per i limiti con $x \to \pm\infty$ e per i limiti delle successioni vale un analogo del teorema 7.8, la cui dimostrazione non riportiamo essendo del tutto simile alla precedente.

7.9 TEOREMA *Sia la funzione f continua in $a \in \mathbb{R}$.*

(a) *Se $g(x) \to a$ per $x \to +\infty$ (oppure: per $x \to -\infty$), allora*

$$f(g(x)) \to f(a) \quad \textit{per } x \to +\infty (x \to -\infty).$$

(b) *Se $a_n \to a$ per $n \to +\infty$, allora*

$$f(a_n) \to f(a) \quad \textit{per } n \to +\infty.$$

Sottolineiamo che in tutti questi risultati l'ipotesi di continuità della f è essenziale. Per esempio consideriamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

che non è continua nel punto $x = 0$. Risulta

$$\lim_{n \to +\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^2 = 0,$$

al contrario si ha

$$f\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\right)=f(0)=-1.$$

Quindi in questo caso non vale più la (b) del teorema 7.9.

Esercizi

7.6 Dimostrare il teorema 7.9.

7.7 Applicare il teorema 7.9 per calcolare i limiti

(a) $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$

(b) $\lim_{x\to-\infty}\cos\left(\dfrac{\pi x^3-1}{\sqrt{x^6+2}}\right).$

7.5 Proprietà fondamentali delle funzioni continue

In questo paragrafo presenteremo alcuni importanti teoremi relativi alle funzioni continue. Come vedremo, si tratta di risultati del tutto naturali; non daremo, pertanto, tutte le dimostrazioni, preferendo analizzare le ipotesi sotto le quali valgono questi teoremi, esibendo controesempi semplici ma istruttivi.

7.10 TEOREMA (permanenza del segno) *Sia f una funzione continua in un punto x_0. Se $f(x_0)>0$ (oppure $f(x_0)<0$), allora la f è positiva (rispettivamente negativa) in un intorno del punto x_0, cioè esiste $\delta>0$ tale che*

$$f(x)>0 \quad (\textit{rispettivamente } f(x)<0) \qquad \textit{per ogni } x\in I(x_0;\delta).$$

Dimostrazione

Sia $f(x_0)=a>0$. Segue dalla definizione di continuità (con la scelta $\epsilon=a$) che esiste $\delta>0$ tale che $I(x_0;\delta)\subseteq \operatorname{dom} f$ e

$$-a<f(x)-a<a \qquad \text{per } x\in I(x_0;\delta),$$

ovvero $f(x)-a>-a$ e quindi $f(x)>a-a=0$ in $I(x_0;\delta)$. ■

7.13 *Esempio*

Per la funzione

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{per } x\geq 0\\ -1 & \text{per } x<0\end{cases}$$

non vale la tesi del teorema nel punto $x = 0$, nel quale la funzione è discontinua (vedi fig. 7.9).

7.11 TEOREMA (degli zeri di una funzione continua) *Sia f una funzione continua in un intervallo I. Se esistono due punti $x_1, x_2 \in I$ tali che $f(x_1) < 0$ e $f(x_2) > 0$, allora esiste un punto x_0 compreso tra x_1 e x_2 tale che $f(x_0) = 0$.*

Daremo una dimostrazione costruttiva di questo teorema (secondo il metodo di bisezione) nel paragrafo 10.5.

7.14 *Esempio*

Per la funzione discontinua $f(x)$, che abbiamo definito nell'esempio precedente non vale la tesi del teorema 7.11 nell'intervallo $[-1, 1]$ in cui $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$.

7.12 TEOREMA *Una funzione continua e limitata in un intervallo I assume tutti i valori compresi tra $\sup_I f$ e $\inf_I f$.*

Dimostrazione

Basta considerare il caso in cui $\sup_I f \neq \inf_I f$. Sia y un numero compreso tra $\inf_I f$ e $\sup_I f$. Allora, dalla definizione di estremo superiore e inferiore, esistono due punti x_1 e x_2 in I tale che $f(x_1) < y < f(x_2)$. Per il teorema 7.11, applicato alla funzione $f(x) - y$, esiste un punto x_0 compreso tra x_1 e x_2 tale che $f(x_0) - y = 0$, cioè $f(x_0) = y$. ■

Si noti che il teorema 7.12 non ci dice se la funzione ha un massimo e minimo nell'intervallo I.

7.13 TEOREMA (di Weierstrass) *Sia f una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato: $I = [a, b]$. Allora f è limitata in I e ha massimo e minimo in I.*

Non daremo la dimostrazione; illustriamo, invece, con alcuni controesempi, come nessuna delle ipotesi sia eliminabile.

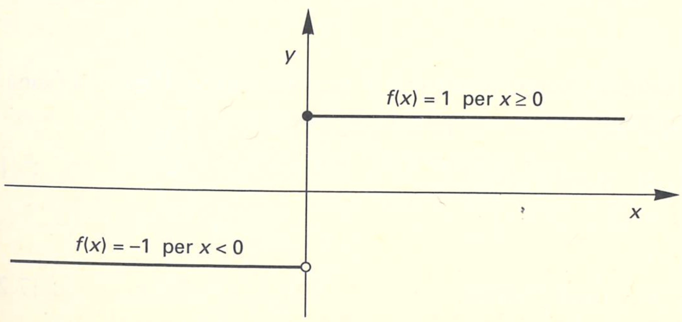


Figura 7.9

7.15 *Esempio*

(a) (I limitato ma non chiuso) Sia $I = (0,1]$. La funzione $f(x) = 1/x$ è continua ma non è limitata in I. La funzione $f(x) = 1 - x$ è continua e limitata ma non ha massimo in I.
(b) (I non limitato) Sia $I = [1,+\infty)$. La funzione continua $f(x) = x$ non è limitata in I. La funzione $1/x$ è continua e limitata in I ma non ha minimo.
(c) (funzione discontinua) Sia $I = [0,1]$. La funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

non è limitata in I. La funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è limitata ma non ha minimo in I.

7.6 Funzioni inverse di funzioni continue

Nel paragrafo 1.7 abbiamo definito le funzioni invertibili in un intervallo I e le loro inverse. Le funzioni invertibili non sono sempre monotone; per esempio, la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

è iniettiva, quindi invertibile, nell'intervallo $[0,2]$, ma non è monotona (vedi fig. 7.10).

Però una funzione *continua* che sia invertibile in un intervallo è necessariamente monotona:

7.1 LEMMA *Sia f una funzione invertibile in un intervallo I. Se $f \in C(I)$, allora la f è strettamente monotona in I.*

**Dimostrazione*

Procediamo per assurdo. Supponiamo che f non sia strettamente monotona in I; allora esistono tre punti $x_1 < x_2 < x_3$ in I tali che

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad \text{e} \quad f(x_2) \geq f(x_3) \tag{7.19}$$

oppure

$$f(x_1) \geq f(x_2) \quad \text{e} \quad f(x_2) \leq f(x_3). \tag{7.20}$$

7.20 *Esempio*

Ponendo $y = \ln x$, si ottiene:

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{arctg}(\ln x) = \lim_{y\to -\infty} \operatorname{arctg} y = -\frac{\pi}{2}.$$

Esercizi

*__7.8__ Si noti che la funzione $f(x) = \sinh x$ è invertibile in R. Per determinare la sua inversa f^{-1} si pone $y = f^{-1}(x)$. Allora

$$x = \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \Longleftrightarrow e^y - 2x - e^{-y} = 0 \Longleftrightarrow (e^y)^2 - 2xe^y - 1 = 0.$$

Calcolare gli zeri del polinomio $z^2 - 2xz - 1$ per dimostrare che

$$y = f^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

7.9 Calcolare i seguenti limiti:

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x3^{-\sqrt{x+1}}$

(b) $\lim\limits_{x\to 1} (x-1)\ln x$

(c) $\lim\limits_{x\to 1^+} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1-x}\right)$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{arctg}\left(\frac{\ln(x+1)}{x+x^2}\right)$

(e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(\sqrt{x}+2)}{x}$

(f) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{10}3^x2^{-(x+1)}$.

7.8 Funzioni discontinue

La continuità è una proprietà importante, ma come sappiamo non tutte le funzioni sono continue. Cerchiamo di descrivere i possibili comportamenti di una funzione in un punto di discontinuità. Sia, per esempio,

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{per } x > 2 \\ 0 & \text{per } x \le 2. \end{cases}$$

Chiaramente esistono i limiti da destra e da sinistra in $x = 2$, che valgono:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} x = 2 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 2^-} f(x) = 0.$$

Quindi il limite destro non è uguale al limite sinistro, e dunque f non è continua in 2. Questo tipo di discontinuità si dice *di prima specie*:

7.10 DEFINIZIONE *Sia f una funzione definita in un intervallo $(x_0-\delta, x_0+\delta)$. Se il limite destro e il limite sinistro della f nel punto x_0 esistono e appartengono a R ma non sono uguali, la f ha una discontinuità di prima specie in x_0. Se il limite destro oppure il limite sinistro della f non esistono in R, allora la funzione ha una discontinuità di seconda specie in x_0.*

Diamo un esempio di una funzione con una discontinuità di seconda specie.

7.21 *Esempio*

Sia f la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

La f è continua nei punti $x \neq 0$ e assume i valori compresi tra -1 e 1. Possiamo calcolare facilmente i valori di x in corrispondenza dei quali la f assume i valori ± 1 (vedi fig. 7.14):

$$f(x) = 1 \iff \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathsf{Z}) \iff x = \frac{1}{\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi} (k \in \mathsf{Z}) \qquad [7.29]$$

e

$$f(x) = -1 \iff \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathsf{Z}) \iff x = \frac{1}{-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi} (k \in \mathsf{Z}). \qquad [7.30]$$

Dimostriamo che $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ non esiste, cioè che la f ha una discontinuità di seconda specie nel punto 0.

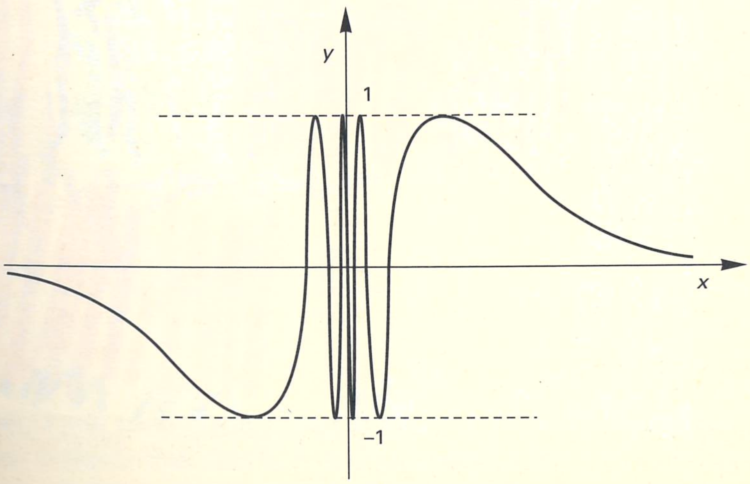


Figura 7.14
$f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$.