Corso di GEOMETRIA - PROVA SCRITTA
Dipartimento di Ingegneria ed Architettura
Università degli Studi di Trieste - A.A. 2017/2018

Trieste, 2 febbraio 2018 — Prof. Fabio Perroni

Tutte le risposte vanno adeguatamente motivate.

1. Si consideri la funzione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita come segue:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2z \\ -y+z \\ z \end{pmatrix}.$$

(a) Si determini la matrice $\mathrm{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f)$ che rappresenta f rispetto alla base canonica $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^3$. Si dimostri che $\mathrm{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f)$ è invertibile e si calcoli l'inversa $(\mathrm{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f))^{-1}$.

(b) Si determini esplicitamente la base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che $\mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,
dove $\mathcal{C}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e $\mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)$ è la matrice che rappresenta f rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$.

2. Per ogni valore del parametro $a \in \mathbb{C}$, si consideri la seguente matrice

$$\mathrm{M} := \begin{pmatrix} a & 1 & i \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C}),$$

dove i è l'unità immaginaria, $i^2 = -1$.

(a) Si dimostri che M è diagonalizzabile per ogni $a \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$.

(b) Per $a = i$, si determinino una matrice invertibile $B \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ ed una matrice diagonale $D \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ tali che $B^{-1} \cdot \mathrm{M} \cdot B = D$.

3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ si consideri la forma bilineare $g\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come segue:

$$g\Big(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \Big) = 2x_1x_2 - x_1y_2 - y_1x_2 + 2y_1y_2 .$$

(a) Si determini la matrice $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(g)$ che rappresenta g rispetto alla base $\mathcal{B} = \Big\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Big\}$ di $\mathbb{R}^2$.

(b) Si dimostri che g è un prodotto scalare di $\mathbb{R}^2$.

(c) Si determini una base di $\mathbb{R}^2$ ortonormale rispetto al prodotto scalare g.

(Continua sul retro del foglio)

4. Si consideri lo spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ (ovvero $\mathbb{R}^3$) con il sistema di riferimento affine canonico. Sia r l'insieme dei punti $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ le cui coordinate soddisfano il seguente sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} 2x + 4y & = 1 \\ x + 2y + z & = 0\,. \end{cases}$$

(a) Dopo aver osservato che r è una retta, si determini un'equazione Cartesiana del piano affine Π che contiene r ed il punto di coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b) Si determinino le equazioni Cartesiane e parametriche della retta r' contenuta nel piano Π del punto (a), passante per il punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e parallela ad r.