Corso di GEOMETRIA - PROVA SCRITTA
Dipartimento di Ingegneria ed Architettura
Università degli Studi di Trieste - A.A. 2017/2018

Trieste, 19 febbraio 2018 — Prof. Fabio Perroni

Tutte le risposte vanno adeguatamente motivate.

1. Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$:

$$U := \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad V := \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

(a) Si determinino equazioni Cartesiane per U e per V, cioè si determinino due matrici $A \in \mathrm{M}_{m,4}(\mathbb{R})$ e $B \in \mathrm{M}_{n,4}(\mathbb{R})$, tali che $U = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid A \cdot x = 0\}$ e $V = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid B \cdot x = 0\}$.

(b) Si determini una base della somma $U + V$ ed una base dell'intersezione $U \cap V$.

(c) Esiste un endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, tale che $\ker(f) = U$ ed $\operatorname{im}(f) = V$?

2. Sia $g\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare, tale che

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

dove $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(a) Si dimostri che g è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$.

(b) Si determini una base del sottospazio $V^\perp$ ortogonale a $V := \operatorname{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, rispetto al prodotto scalare g.

3. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$.

(a) Si determini lo spettro di A e si dica se A è diagonalizzabile.

(b) Si dica se A è simile alla matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$.

(Continua sul retro del foglio)

4. Si consideri lo spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ (ovvero $\mathbb{R}^3$) con il sistema di riferimento affine canonico. Si considerino i punti

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \; Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; R_a = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

(a) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, si determinino equazioni parametriche e Cartesiane del piano $\Pi_a \subset \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ contenente i punti P, Q, R_a.

(b) Si determinino i valori del parametro $a \in \mathbb{R}$, tali che il piano Π_a del punto precedente sia parallelo alla retta $r : \begin{cases} 2x + 4y & = 1 \\ x + 2y + z & = 0 \,. \end{cases}$