Corso di GEOMETRIA - PROVA SCRITTA
Dipartimento di Ingegneria ed Architettura
Università degli Studi di Trieste - A.A. 2017/2018

Trieste, 26 giugno 2018 — Prof. Fabio Perroni

Tutte le risposte vanno adeguatamente motivate.

1. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ delle matrici quadrate 2×2 a coefficienti in $\mathbb{R}$. Sia $L\colon \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ la funzione definita come segue: $L(A) = {}^tA - A$, dove ${}^tA$ è la matrice trasposta di A.

(a) Si dimostri che L è un endomorfismo e si scriva la matrice che rappresenta L rispetto alla base canonica di $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

(b) Si determini la dimensione ed una base di $\ker(L)$ e di $\mathrm{im}(L)$. Si dica se L è iniettiva, rispettivamente suriettiva.

(c) Si dimostri che $\mathrm{M}_2(\mathbb{R}) = \ker(L) \oplus \mathrm{im}(L)$ e si scriva la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ come somma $A = B + C$, con $B \in \ker(L)$ e $C \in \mathrm{im}(L)$.

2. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{C})$.

(a) Si dimostri che A è diagonalizzabile e si determinino una matrice invertibile $B \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ ed una matrice diagonale $D \in \mathrm{M}_4(\mathbb{C})$, tali che $D = B^{-1} \cdot A \cdot B$.

(b) Si dica se A è simile alla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{C})$.

3. Sia $g\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare, tale che

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

dove $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(a) Si dimostri che g è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$.

(b) Si determini una base ortonormale del sottospazio $V^\perp$ ortogonale a $V := \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ rispetto al prodotto scalare g.

(Continua sul retro del foglio)

4. Si consideri lo spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ (ovvero $\mathbb{R}^3$) con il sistema di riferimento affine canonico. Per quali $a \in \mathbb{R}$ i punti

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \; Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; R = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; S_a = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

sono complanari (cioè giacciono su uno stesso piano)? Per ogni tale a si determinino equazioni Cartesiane e parametriche di un piano che contiene i punti P, Q, R, S_a.