

Corso di GEOMETRIA - PROVA SCRITTA
Dipartimento di Ingegneria ed Architettura
Università degli Studi di Trieste - A.A. 2017/2018

Trieste, 1 giugno 2018

Prof. Fabio Perroni

Tutte le risposte vanno adeguatamente motivate.

1. Si consideri la funzione lineare $f: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^4$ definita come segue:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y - iz \\ 2ix + 3z \\ ix - y \\ x - y - z \end{pmatrix},$$

dove $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ è l'unità immaginaria.

(a) Si determini la matrice $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)$ che rappresenta f rispetto alla base

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ di } \mathbb{C}^3 \text{ e la base canonica } \mathcal{C} \text{ di } \mathbb{C}^4.$$

(b) Si determini il rango di f , la dimensione di $\ker(f)$, una base di $\text{im}(f)$ ed una base di $\ker(f)$.

(c) Per quali valori di $a \in \mathbb{C}$ si ha che $\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -a \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{im}(f)$?

2. Si consideri la seguente forma bilineare su $\mathbb{R}^3$:

$$g \left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \right) = v_1 w_1 + v_1 w_2 + v_2 w_1 + 2v_2 w_2 + v_3 w_3.$$

(a) Si verifichi che g è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$.

(b) Si trovi una base ortonormale di $(\mathbb{R}^3, g)$.

(c) Si determini la proiezione ortogonale (rispetto al prodotto scalare g) del vettore e_1 sul piano $\text{Span}(e_2, e_3)$, dove $\{e_1, e_2, e_3\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

3. Si consideri la seguente matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}),$$

al variare dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di a, b tali che M sia diagonalizzabile. Per tali a, b si determini una matrice diagonale D ed una matrice invertibile A , tale che $D = A^{-1}MA$.

(Continua sul retro del foglio)

4. Nello spazio affine $A^3(\mathbb{R})$ (ovvero $\mathbb{R}^3$) con il sistema di riferimento affine canonico, si considerino i seguenti sottospazi affini in forma cartesiana:

$$r : \begin{cases} 3x + 3y - z &= -9 \\ x + y &= -2 \end{cases}, \quad \Pi : x + y + z = 1.$$

- (a) Si stabilisca se Π contiene r .
- (b) Si trovi un'equazione cartesiana e parametrica del piano passante per l'origine e contenente r .