

**Corso di GEOMETRIA - PROVA SCRITTA**  
**Dipartimento di Ingegneria ed Architettura**  
**Università degli Studi di Trieste - A.A. 2017/2018**

Trieste, 10 luglio 2018

Prof. Fabio Perroni

*Tutte le risposte vanno adeguatamente motivate.*

1. Si considerino i seguenti vettori  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ .

- (a) Si dimostri che  $v_1, v_2, v_3$  formano una base di  $\mathbb{R}^3$ , che denoteremo  $\mathcal{B}$ .
- (b) Sia  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la funzione lineare rappresentata dalla seguente matrice rispetto alla base  $\mathcal{B}$ :

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si determinino le coordinate di  $f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^3$ .

- (c) Si determinino una base di  $\ker(f)$  ed una base di  $\text{im}(f)$ .

2. Si consideri la funzione lineare  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita come segue:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ 2x + z \\ y \end{pmatrix}.$$

Si dica se  $f$  è autoaggiunta rispetto al prodotto scalare standard di  $\mathbb{R}^3$ . Nel caso affermativo si determinino gli autovalori di  $f$  ed una base ortonormale di  $\mathbb{R}^3$  che diagonalizza  $f$ .

3. Si dica se il seguente sistema di equazioni lineari nelle incognite  $x_1, x_2, x_3$  a coefficienti nel campo dei numeri complessi  $\mathbb{C}$  è compatibile:

$$(SL) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 & = i \\ x_1 + x_2 + 2x_3 & = 2, \end{cases}$$

dove  $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$  è l'unità immaginaria. Nel caso affermativo se ne determini l'insieme delle soluzioni.

- (a) Si determini la dimensione ed una base  $\mathcal{C}$  dello spazio  $W$  delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato ad (SL).

- (b) Si completi  $\mathcal{C}$  ad una base di  $\mathbb{C}^3$ .

- (c) Sia  $V = \text{Span} \begin{pmatrix} 2i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \subset \mathbb{C}^3$ . Si dica se la somma  $W + V$  è diretta.

**(Continua sul retro del foglio)**

4. Nello spazio affine  $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$  (ovvero  $\mathbb{R}^3$ ) con il sistema di riferimento affine canonico, sia  $r$  la retta affine passante per i punti  $P = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  e  $Q = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ , e sia  $r'$  la retta affine per i punti  $P' = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$  e  $Q' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ .

- (a) Si scrivano delle equazioni parametriche e cartesiane di  $r$  e di  $r'$ .
- (b) Si verifichi che  $r$  e  $r'$  sono sghembe.
- (c) Si determinino due piani fra loro paralleli contenenti uno  $r$  e l'altro  $r'$ .