

Corso di GEOMETRIA - PROVA SCRITTA
Dipartimento di Ingegneria ed Architettura
Università degli Studi di Trieste - A.A. 2017/2018

Trieste, 10 luglio 2018

Prof. Fabio Perroni

Tutte le risposte vanno adeguatamente motivate.

1. Si considerino i seguenti vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

- (a) Si dimostri che v_1, v_2, v_3 formano una base di \mathbb{R}^3 , che denoteremo \mathcal{B} .
- (b) Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione lineare rappresentata dalla seguente matrice rispetto alla base \mathcal{B} :

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si determinino le coordinate di $f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^3 .

- (c) Si determinino una base di $\ker(f)$ ed una base di $\text{im}(f)$.

2. Si consideri la funzione lineare $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita come segue:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ 2x + z \\ y \end{pmatrix}.$$

Si dica se f è autoaggiunta rispetto al prodotto scalare standard di \mathbb{R}^3 . Nel caso affermativo si determinino gli autovalori di f ed una base ortonormale di \mathbb{R}^3 che diagonalizza f .

3. Si dica se il seguente sistema di equazioni lineari nelle incognite x_1, x_2, x_3 a coefficienti nel campo dei numeri complessi \mathbb{C} è compatibile:

$$(SL) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 & = i \\ x_1 + x_2 + 2x_3 & = 2, \end{cases}$$

dove $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ è l'unità immaginaria. Nel caso affermativo se ne determini l'insieme delle soluzioni.

- (a) Si determini la dimensione ed una base \mathcal{C} dello spazio W delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato ad (SL).

(b) Si completi \mathcal{C} ad una base di \mathbb{C}^3 .

(c) Sia $V = \text{Span} \begin{pmatrix} 2i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \subset \mathbb{C}^3$. Si dica se la somma $W + V$ è diretta.

(Continua sul retro del foglio)

4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ (ovvero \mathbb{R}^3) con il sistema di riferimento affine canonico, sia r la retta affine passante per i punti $P = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, e sia r' la retta affine per i punti $P' = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ e $Q' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

- (a) Si scrivano delle equazioni parametriche e cartesiane di r e di r' .
- (b) Si verifichi che r e r' sono sghembe.
- (c) Si determinino due piani fra loro paralleli contenenti uno r e l'altro r' .