

**Corso di GEOMETRIA - PROVA SCRITTA**  
**Dipartimento di Ingegneria ed Architettura**  
**Università degli Studi di Trieste - A.A. 2017/2018**

Trieste, 19 gennaio 2018

Prof. Fabio Perroni

*Tutte le risposte vanno adeguatamente motivate.*

**1.**

i) Per quali valori del parametro  $k \in \mathbb{R}$  il vettore  $w = \begin{pmatrix} 2 \\ k \\ -1 \end{pmatrix}$  è combinazione

lineare dei vettori  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  e  $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ? Per ogni tale  $k$  si determinino  $a, b \in \mathbb{R}$  tali che  $w = av_1 + bv_2$ .

ii) Esiste una base  $\mathcal{B}$  di  $\mathbb{R}^3$  che contenga i vettori  $v_1$  e  $v_2$  del punto precedente? Nel caso affermativo si determini una tale base  $\mathcal{B}$ .

**2.** Si consideri lo spazio vettoriale  $\mathbb{C}^3$  sul campo dei numeri complessi  $\mathbb{C}$ .

i) Si dimostri che esiste un'unica funzione lineare  $f: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ , tale che

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dove  $i \in \mathbb{C}$  è l'unità immaginaria,  $i^2 = -1$ .

ii) Si determini la matrice  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$  che rappresenta  $f$  rispetto alla base canonica  $\mathcal{B}$  di  $\mathbb{C}^3$ .

iii) Si determini il rango di  $f$ , una base di  $\ker(f)$  ed una base di  $\text{im}(f)$ .

**3.** Si consideri la funzione lineare  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita come segue:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ x + z \\ y + z \end{pmatrix}.$$

Si dimostri che  $f$  è autoaggiunta rispetto al prodotto scalare standard di  $\mathbb{R}^3$  e si determinino una base ortonormale  $\mathcal{B}$  di  $\mathbb{R}^3$  che diagonalizza  $f$  e la matrice  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$  che rappresenta  $f$  rispetto a  $\mathcal{B}$ .

**(Continua sul retro del foglio)**

4. Nello spazio affine  $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$  con il riferimento canonico, si considerino il punto  $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  e la retta  $r : \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$ .

i) Si determini il piano  $\Pi$  contenente la retta  $r$  ed il punto  $P$  (in forma Cartesiana o parametrica).

ii) Si determini l'intersezione tra il piano  $\Pi$  e la retta  $r' : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$ .

iii) Si dica se esiste una retta  $\tilde{r} \subset \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$  che passa per il punto  $P$  ed interseca le rette  $r$  ed  $r'$ . Nel caso affermativo si determini  $\tilde{r}$ .