Corso di GEOMETRIA - PROVA SCRITTA
Dipartimento di Ingegneria ed Architettura
Università degli Studi di Trieste - A.A. 2017/2018

Trieste, 3 settembre 2018 — Prof. Fabio Perroni

Tutte le risposte vanno adeguatamente motivate.

1. Sia $A \in \mathrm{M}_n(K)$ una matrice quadrata $n \times n$ a coefficienti nel campo K, con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Si dimostrino le seguenti affermazioni.

(a) A è invertibile $\Leftrightarrow$ la sua trasposta ${}^tA$ è invertibile.

(b) Se A è invertibile, allora $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

(c) A è invertibile $\Leftrightarrow$ A^n è invertibile per ogni numero naturale $n > 0$, dove $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n-\text{volte}}$. Se A è invertibile, come è fatta $(A^n)^{-1}$?

2. Si consideri la forma bilineare $g\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita come segue:

$$g\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

dove il simbolo $\cdot$ rappresenta il prodotto righe per colonne tra matrici.

(a) Si dica, motivando la risposta, se g è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$.

(b) Si dica se esiste una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ ortonormale rispetto al prodotto scalare standard e tale che $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(g)$ sia diagonale. Nel caso affermativo si determini $\mathcal{B}$.

3. Sia (SL) il seguente sistema di equazioni lineari nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 a coefficienti nel campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$, dove $i \in \mathbb{C}$ è l'unità immaginaria, $i^2 = -1$.

$$\begin{cases} 2x_2 + ax_4 + 5x_5 & = i \\ 2x_1 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 & = i \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & = b \end{cases}$$

(a) Per quali valori dei parametri $a, b \in \mathbb{C}$ il sistema lineare (SL) è compatibile?

(b) Per i valori dei parametri $a, b \in \mathbb{C}$ tali che (SL) è compatibile, sia $S_{a,b}$ il sottospazio affine di $\mathbb{C}^5$ formato dalle soluzioni di (SL). Per quali $a, b \in \mathbb{C}$ si ha che $S_{a,b}$ è parallelo al piano $\Pi \subset \mathbb{C}^5$ passante per l'origine ed avente giacitura

$$W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)?$$

(c) Si determini l'insieme delle soluzioni di (SL) quando $a = 1$ e $b = i$.

(Continua sul retro del foglio)

4. Sia $\mathbb{R}[t]_2$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata t di grado ≤ 2. Si consideri la funzione lineare $f\colon \mathbb{R}[t]_2 \to \mathbb{R}^3$ definita come segue:

$$f(P(t)) = \begin{pmatrix} P(-1) \\ P(0) \\ P(1) \end{pmatrix} ,$$

dove, per ogni $r \in \mathbb{R}$, $P(r)$ è il valore che la funzione polinomiale $P(t)$ assume in r.

(a) Si determini la matrice $\mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)$ che rappresenta f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}[t]_2$ ed $\mathbb{R}^3$, rispettivamente; cioè $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ e $\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(b) Si dimostri che f è un isomorfismo e si determini esplicitamente l'inversa $f^{-1}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}[t]_2$.