se $\alpha=0$ $\quad R_0=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ autovalore 1
con $m_g(1)=2$

$\alpha=\pi$ $\quad R_\pi=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ autoval. $-1$.

se lavoro su $\mathbb{C}$: $\quad x_{1,2}=\cos\alpha\pm\sqrt{\cos^2\alpha-1}=$

$=\cos\alpha\pm\sqrt{-\sin^2\alpha}=\cos\alpha\pm i\sin\alpha=e^{\pm i\alpha}$

2 autovalori complessi

2) Riflessione

$$S_\alpha=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}$$

$P_{S_\alpha}(x)=x^2-1$ $\quad$ Autoval. $\{1,-1\}$

<u>Prop.</u> $A,B$ simili $\Rightarrow P_A(x)=P_B(x)$

<u>Dim.</u> ~~Se~~ $A=C^{-1}BC$

$P_A(x)=|A-xE_n|=|C^{-1}BC-xE_n|=$

$=|C^{-1}BC-xC^{-1}E_nC|=|C^{-1}(B-xE_n)C|\overset{\text{Binet}}{=}$

$=|C^{-1}||B-xE_n||C|$.

<u>Corollario</u> $A,B$ simili: hanno non solo lo stesso det ma anche la stessa traccia e tutti i coeff. del pol. caratt. sono uguali.

<u>Def.</u> 1. $f:V\to V$ endomorfismo è diagonalizzabile se esiste una base $\mathcal{B}=(v_1,\dots,v_n)$ di $V$ formata da autovettori di $f$.

ciò significa che: $f(v_1)=\lambda_1 v_1, \dots, f(v_n)=\lambda_n v_n$:

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{è diagonale}$$

2) A matrice quadrata è diagonalizzab. se lo è $L(A): K^n \longrightarrow K^n$ $\iff$ $\exists$ base di autovettori di A cioè $M_B(L(A))$ è diagonale $\iff$

A è simile a una matrice diagonale.

$\exists$ S invertibile t.c. $SAS^{-1}$ sia diagonale.

<u>Def.</u> $\lambda$ autovalore di $f: V \longrightarrow V$

la molt. geom. $m_g(\lambda) = \dim \mathrm{Aut}(\lambda)$.

$\lambda$ è radice del pol. caratteristico di $f$ $p_f(x)$: allora $p_f(x)$ è divisibile per $x-\lambda$.

La <u>molteplicità algebrica</u> di $\lambda$ è il massim. esponente $m$ t.c. $p_f(x) = (x-\lambda)^m g(x)$;

$m_a(\lambda)$ è la molteplicità di $\lambda$ come radice di $p_f(x)$; deve essere $g(\lambda) \neq 0$.

$$p_f(x) = (x-\lambda)^{m_a(\lambda)} g(x) \quad \text{con } g(\lambda) \neq 0.$$

<u>Prop.</u> $f: V \longrightarrow V$ endom., $\dim V = n$. Sia $\lambda$ autovalore di $f$. Allora si ha sempre $m_a(\lambda) \geq m_g(\lambda)$.

Dim. Considero $Aut(\lambda)$, prendo una sua base $v_1 \dots v_m$, con $m = m_g(\lambda)$ e la prolungo a una base di $V$:

$B = (v_1 \dots, v_m, \dots, v_n)$

Sia $A = M_B(f)$: $f(v_1) = \lambda v_1, \dots, f(v_m) = \lambda v_m \Rightarrow$

$$A = \begin{array}{c} m \\ \\ \\ \\ \end{array} \left( \begin{array}{ccc|c} \lambda & & 0 & \\ 0 & \ddots & 0 & B \\ & & \lambda & \\ \hline & & 0 & \\ 0 & & 0 & A' \end{array} \right)$$

$$P_f(x) = |A - xE_n| = \left| \begin{array}{cc|c} \lambda - x & & B \\ & \lambda - x & \\ \hline & O & A' - xE_{n-m} \end{array} \right| = \text{a blocchi}$$

$$= (\lambda - x)^m \underbrace{|A' - xE|}_{g(x)} \Rightarrow m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$$

perché non so se $g(\lambda) = 0$ o $g(\lambda) \neq 0$.

Esempio

1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad P_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 1 \\ 0 & -x \end{vmatrix} = x^2$

unico autoval. è $x = 0$, con molt. alg. $m_a(0) = 2$.

$Aut(0) = \{ \overset{x}{(x_1, x_2)} \mid Ax = 0 \} = \{ (x_1, x_2) \mid x_2 = 0 \} =$
$= \{ (x_1, 0) \mid x_1 \in K \} = \langle (1, 0) \rangle$ ha dim 1.
non è diag.

2) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$ $\quad P_A(x) = \begin{vmatrix} \cos\alpha - \lambda & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha - \lambda \end{vmatrix} = x^2 - 1$

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1 \quad m_a(\lambda_1) = m_a(\lambda_2) = 1$

$m_g(\lambda_i)$ non può essere $< 1 \Rightarrow$ sono uguali.

Oss. Se $f$ ha $n$ autovalori distinti $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, ha
nec. molt. alg. uguale a uno, e quindi molt. geom. 1;
ho $n$ autospazi di dim 1 : autovett. rel.
a autovalori distinti sono lin. indip: $f$ è diagon.
D'altra parte $p_f(x) = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_n)$ :
ha grado $n$, non possono essere esponenti
maggiori.
A è simile alla matrice $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \cos\alpha & +\sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$ è simile a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ è simile a $\begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix}$ su $\mathbb{C}$

Oss. se $p_A(x) = (x - \lambda)^n$, $m_a(\lambda) = n$;
l'unico autoval. è $\lambda$; A è diagonalizz.
$\Leftrightarrow$ c'è una base di autovett. di autoval. $\lambda$,
la matrice A è simile a $\lambda E_n$
$\Leftrightarrow$ $Aut(\lambda) = V$ ossia $m_g(\lambda) = n$.
In questo caso $f = \lambda\, id_V$.

Possiamo caratterizzare gli endom.
diagonalizzabili come segue:

Teorema
$f: V \to V$ endomorfismo, $\dim V = n$.
Allora le seguenti prop. sono equivalenti:
1) $f$ è diagonalizzabile;

2) il pol. caratteristico $p_f(x)$ è prodotto di $n$ fattori lineari non necessariamente distinti

$p_f(x) = (\lambda_1 - x)(\lambda_2 - x) \cdots (\lambda_n - x)$,

e per ogni autovalore $\lambda_i$ si ha $m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i)$.

3) se $\mu_1, \dots, \mu_k \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ sono ~~gli~~ tutti gli autovalori distinti di $f$, allora

$V = Aut(\mu_1) \oplus Aut(\mu_2) \oplus \dots \oplus Aut(\mu_k)$.

Dim.

1) ⇒ 2) $f$ diag. ⇒ esiste una base $\mathcal{B}$ di autovettori di $f$, e $M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ è una matrice diagonale.

Allora $p_f(x) = \det(f - \lambda \, id_V) = (\lambda_1 - x) \cdots (\lambda_n - x)$ : ha $n$ fattori lineari. Se per un certo $\lambda_i$ si ~~ha~~ considera $m_a(\lambda_i)$, nella matrice $\lambda_i$ è ripetuto $m_a(\lambda_i)$ volte, ossia nella base $\mathcal{B}$ ci sono $m_a(\lambda_i)$ autovettori di $\lambda_i$.

Allora $\dim Aut(\lambda_i) = m_g(\lambda_i) \geq m_a(\lambda)$;
ma visto che vale sempre la disug. opposta, si conclude $m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i)$ $\forall i$.

2) ⇒ 3) $p_f(x) = (\mu_1 - x)^{r_1} (\mu_2 - x)^{r_2} \cdots (\mu_k - x)^{r_k}$

con $r_1 + r_2 + \dots + r_k = n$.

Allora $r_1 = \underset{\underset{\dim Aut(\mu_1)}{\overset{\shortparallel}{m_g(\mu_1)}}}{\overset{}{m_a(\mu_1)}}, \dots, r_k = \underset{\underset{\dim Aut(\mu_k)}{\overset{\shortparallel}{m_g(\mu_k)}}}{\overset{}{m_a(\mu_k)}}$ per ipotesi

Allora

$\dim \mathrm{Aut}(\mu_1) + \dots + \dim \mathrm{Aut}(\mu_k) = n = \dim V$

Inoltre, siccome ~~set~~ autovettori relativi ad autovalori distinti sono lin. indip.,
la somma $\mathrm{Aut}(\mu_1) + \dots + \mathrm{Aut}(\mu_k)$ è diretta,
ossia se un vettore $v$ si scrive come somma $v = w_1 + \dots + w_k$, con $w_i \in \mathrm{Aut}(\mu_i)$
questa espressione è unica, infatti:
se $v = w_1 + \dots + w_k = w_1' + \dots + w_k'$, allora

$$\underbrace{(w_1 - w_1')}_{\in \mathrm{Aut}(\mu_1)} + \dots + \underbrace{(w_k - w_k')}_{\in \mathrm{Aut}(\mu_k)} = 0 \Rightarrow$$ sono lin. indip. oppure tutti nulli.

Allora $\mathrm{Aut}(\mu_1) \oplus \dots \oplus \mathrm{Aut}(\mu_k)$ ha dim $n$
$\Rightarrow$ è uguale a $V$.

3) $\Rightarrow$ 1) $V = \mathrm{Aut}(\mu_1) \oplus \dots \oplus \mathrm{Aut}(\mu_k)$ : costruisco una base di $V$ unendo basi dei vari autospazi, e ottengo una base di autovettori.

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$$

è diagonalizzabile?

$$p_A(x) = \det(A - xE_3) = \begin{vmatrix} -x & -1 & 1 \\ -3 & -2-x & 3 \\ -2 & -2 & 3-x \end{vmatrix} =$$

$= x(2+x)(3-x)+6+6-2(x+2)-6x-3(3-x) =$

$= -x^3+x^2+\cancel{6x}+12-2x-4-\cancel{6x}-9+3x =$

$= -x^3+x^2+x-1 = -x^2(x-1)+(x-1) =$

$= (1-x^2)(x-1) = (1-x)(1+x)(x-1) =$

$= -(1-x)^2(x+1)$: si fattorizza in fattori lineari

gli autovett. sono

$\lambda_1 = 1$ con $m_a(1)=2$ : $m_g(1)$ ?

$\lambda_2 = -1$ con $m_a(-1)=1 \Rightarrow m_g(-1)=1$

$$Aut(1) = Ker(A - E_3) = ker \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice ha rg 1 $\Rightarrow$ il nucleo ha dim 2

$\Rightarrow m_g(1)=2 \Rightarrow A$ è diagonalizzabile.

Base di autovettori:

$Aut(1)$: $x_1+x_2-x_3=0$

$x_1 = -x_2+x_3$

$(-x_2+x_3, x_2, x_3) = x_2(-1,1,0)+x_3(1,0,1)$

$Aut(1) = \langle (-1,1,0), (1,0,1) \rangle$

$$Aut(-1) = Ker(A+E_3) = ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & -4 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$+2x_2 = 3x_3$ $\quad x_2 = \frac{3}{2}x_3$ $\quad x_1 = x_2 - x_3 = \frac{3}{2}x_3 - x_3 =$

$(\frac{1}{2}x_3, \frac{3}{2}x_3, x_3)$ $\quad Aut(-1) = \langle (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1) \rangle =$

$\langle (1, 3, 2) \rangle$

$$B = \left( (1,0,1), (-1,1,0), (1,3,2) \right)$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = S^{-1} A S$$

$$\overset{\shortparallel}{M_B(L(A))} = \underset{S^{-1}}{M_B^{\mathcal{B}}(id)} \underset{A}{M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(L(A))} \underset{S}{M_{\mathcal{B}}^{B}(id_{\mathbb{R}^3})}$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad S^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det S = 2 - 3 - 1 = -2$.

Faccio poi la verifica: $A' = S^{-1} A S$ ossia

$SA' = AS$

$$SA' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$AS = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

## Teorema fondamentale dell'algebra.

Sia $p(x)$ un polinomio a coeff. in $\mathbb{C}$ di grado $n \geq 1$

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{C}[x]$$

con $a_n \neq 0$, $a_n, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$.

Allora $p(x)$ ha almeno una radice $\lambda$ in $\mathbb{C}$. Dunque $p(x)$ è divisibile per $x - \lambda$;

$p(x)=(x-\lambda)\,p_1(x)$, con $p_1(x)$ di grado $n-1$;

allora si ripete ~~e~~ e si ottiene che $p(x)$ è prodotto di $n$ fattori lineari.

Per trovare $p_1(x)$ si esegue la divisione di polinomi.

<u>Attenzione!</u> formula risolutiva per radicali solo per grado $n\leq 4$.

<u>Esempio</u>

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} \qquad p_A(x)=\det\begin{pmatrix}-x & 1\\ -1 & -x\end{pmatrix}=x^2+1=$$

$$=(x+i)(x-i)$$

$\Rightarrow A$ è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$; è simile a $\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}$; non lo è su $\mathbb{R}$.

$$Aut(i)=\ker\begin{pmatrix}-i & 1\\ -1 & -i\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & i\\ -i & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & i\\ 0 & 1+i^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & i\\ 0 & 0\end{pmatrix} \qquad x_1+ix_2=0$$

$$(-ix_2,\ x_2)=x_2(-i,\ 1)$$

$$Aut(i)=\langle(i,-1)\rangle$$

$$Aut(-i)=\ker\begin{pmatrix}i & 1\\ -1 & i\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -i\\ i & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -i\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$x_1-ix_2=0 \qquad (ix_2,\ x_2)=x_2(i,\ 1)$$

$$B=((i,-1),(i,1))$$

$$A'=\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}=S^{-1}AS,\quad \text{con } S=\begin{pmatrix}i & i\\ -1 & 1\end{pmatrix},$$

$$\det S=2i \qquad S^{-1}=\frac{1}{2i}\begin{pmatrix}1 & -i\\ 1 & i\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}i\begin{pmatrix}1 & -i\\ 1 & i\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}i & 1\\ i & -1\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2i}=a+bi \qquad 2ai+2bi^2=1 \qquad 2ai-2b-1=0$$

$$=-\frac{1}{2}i \qquad 2ai-2b=1 \qquad b=-\frac{1}{2} \quad a=0$$

Classe di matrici non diagonalizzabili su qualunque campo: blocchi (o matrici) di Jordan. Sono le matrici della forma

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ 1 & \lambda & & \\ & 1 & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{oppure} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

triangolare inferiore (bassa) — triangolare superiore (alta)

Il nome viene dal matematico francese Camille Jordan (1838 - 1922).

Altri 2 matematici Jordan erano tedeschi:

Pascual Jordan: noto per le algebre di Jordan, meccanica quantistica, quantum field theory (1902 - 1980)

Wilhelm Jordan: algoritmo di Gauss - Jordan (1842 - 1899).

$P_J(\lambda) = (\lambda - x)^n$ dunque un solo autovalore con $m_a(\lambda) = n$.

$$Aut(\lambda) = \ker(J - \lambda E_n) = \ker \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

la matrice ha rango $n-1$, dunque $Aut(\lambda)$ è una retta, e ha equazioni $x_1 = \dots = x_{n-1} = 0$. $Aut(\lambda) = \langle e_n \rangle$.

$J$ non è diagonalizzabile ma è triangolare.

<u>Definizione</u> 1) $f: V \to V$ è triangolarizzabile (o triangolabile) se $\exists$ una base $\mathcal{B}$ di $V$ tale che $M_{\mathcal{B}}(f)$ sia triangolare (superiore).

2) $A$ matrice $n \times n$ è triangolarizzabile se è simile a una matrice triangolare.

<u>Teorema</u>

$f: V \to V$ è triangolarizzabile se e solo $p_f(x)$ è prodotto di fattori lineari, ossia ha tutte le sue radici su $K$.

<u>Dim.</u>

Se $f$ è triang., $\exists$ $B$ t.c. $M_{\mathcal{B}}(f) =$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow p_f(x) = (\lambda_1 - x) \cdots (\lambda_n - x).$$

Viceversa, dim. per induzione su $n = \dim V$.

Per $n = 1$ è ovvio.

Supp. vero il teorema per $n-1$ e lo dim. per $n$.

Sia $p_f(x)$ prodotto di fattori lineari; $\dim V = n$.

Allora $f$ ha almeno un autovalore $\lambda$

e un autovettore relativo $v_1 \neq 0 : f(v_1) = \lambda v_1$.

Prolungo $v_1$ a una base di $V$: $(v_1, w_2, \dots, w_n) = B'$

Allora $V = \langle v_1 \rangle \oplus \langle w_2, \dots, w_n \rangle$; pongo

$W = \langle w_2, \dots, w_n \rangle$. $W$ ha $w_2, \dots, w_n$ come base: $B''$

Ogni vettore di $V$ si scrive in modo unico come $v = \mu v_1 + w$, con $\mu \in K$, $w \in W$. Questo permette di definire un'applicazione $p: V \longrightarrow W$; $v \longrightarrow w$;

$p$ è lineare (verif.) Usiamo $p$ per def. un endomorfismo di $W$ cui applicheremo l'ipotesi induttiva, in quanto $\dim W = n-1$.

Sia $w \in W$; consideriamo $f(w) \in V$ e poi $p(f(w)) \in W$. In altro modo: $f(w)$ si scrive in modo unico

$$f(w) = \mu_1 v_1 + \underbrace{\mu_2 w_2 + \dots + \mu_n w_n}_{= p(f(w))}$$

Pongo $g = p \circ f$.

$g: W \longrightarrow W$ è un endomorfismo.

Consideriamo

$$A = M_{B'}(f) = \begin{array}{c} \\ \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & M_{B''}(g) & \\ 0 & & & \end{array}\right) \\ f(v_1) \quad f(w_2) \quad \cdots \quad f(w_n) \end{array}.$$

questa matrice è proprio la matrice di $g$ risp. a $B'' = (w_2, \dots, w_n)$

Allora $p_f(x) = \det(A - xE_n) =$ a blocchi

$= (\lambda - x) \det\left(M_{B''}(g) - xE_{n-1}\right) =$

$= (\lambda - x)\, p_g(x)$. Ma $p_f(x)$ è prodotto di fattori lineari, quindi anche $p_g(x)$ lo è.

Allora per ip. induttiva $g$ è triangolabile, cioè $\exists (v_2, \ldots, v_n)$ base di $W$ rispetto a cui la matrice di $g$ è triangolare sup.

Allora considero $M_B(f)$, dove $B = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ e risulta triangolare superiore. ∎

Corollario

Usando tale teorema + teorema fondamentale dell'algebra, ogni endomorfismo su $\mathbb{C}$, o ogni matrice quadrata su $\mathbb{C}$, è triangolarizzabile.