ESERCIZI DI GEOMETRIA 1, FOGLIO 9

Trieste, 9 dicembre 2018

1. Dati n punti $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ in $\mathbb{R}^2$, con $x_i \neq x_j$ per $i \neq j$, dimostrare che esiste esattamente un polinomio reale $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x_{n-1}$, di grado al più $n-1$, tale che $p(x_1) = y_1, \ldots, p(x_n) = y_n$.

(Suggerimento: interpretare $p(x_1) = y_1, \ldots, p(x_n) = y_n$ come un sistema lineare di n equazioni in n incognite $a_0, \ldots, a_{n-1}$: qual è la matrice dei coefficienti di questo sistema lineare?)

2. (i) Sia $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ una matrice quadrata a coefficienti in K, e sia $A(x)$ la matrice che al posto d'indici i, j ha $a_{ij} - x$, dove x è un'indeterminata. Dimostrare che il determinante di $A(x)$ è un polinomio della forma $p(x) = \alpha x + \beta$, con coefficienti $\alpha, \beta \in K$ (verificare la pura esistenza, non computare α e β), poi dimostrare che $\beta = det(A)$.

(Suggerimento: operare con trasformazioni elementari non di Gauss sulle righe di A).

(ii) Sia $a \neq b$. Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a & a & \ldots & a \\ b & \lambda_2 & a & \ldots & a \\ b & b & \lambda_3 & \ldots & a \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b & b & b & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

(Suggerimento: applicare la parte (i), e poi porre $x = a$ e $x = b$.)

3. Determinare per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la matrice reale A è diagonalizzabile, e per quali $c \in \mathbb{R}$ lo è la matrice C :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2a & b & a \\ 10 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Sia A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

su un campo K. Determinare se A è diagonalizzabile, risp. triangolarizzabile, sui campi $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_5$.