

Percorsi e tempi di tragitto in modelli della Terra piatta

Raggi sismici

La teoria dei raggi sismici e' analoga a quella dei raggi nell'ottica ed e' stata applicata con successo in sismologia per piu' di cent'anni al fine di interpretare dati sismologici. La teoria e' relativamente semplice e facile da capire, ma ha importanti limitazioni (e' un'approssimazione ad alta frequenza, non tiene conto di effetti "non geometrici" quali, ad esempio, le onde rifratte e diffratte). Ci occuperemo in questa sede solamente della cinematica (tempi di arrivo) e quindi non parleremo di ampiezze.

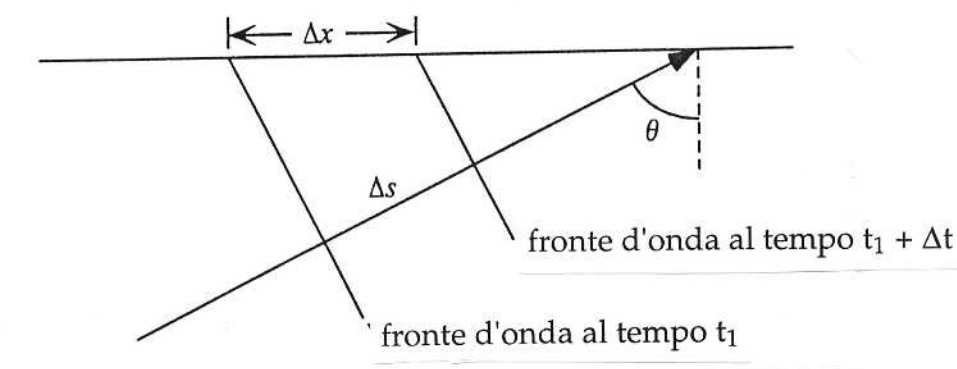


Fig. 1. Un'onda piana incidente su una superficie orizzontale. L'angolo che il raggio forma con la verticale e chiamato angolo di incidenza θ .

Consideriamo un'onda piana che si propaga in un mezzo con velocita' costante, v , e che interseca una superficie orizzontale (Fig. 1). I fronti d'onda ai tempi t e $t + \Delta t$ sono separati da una distanza Δs lungo il cammino del raggio. L'angolo che il raggio forma con la verticale, θ , viene definito come angolo di incidenza e lega Δs alla separazione Δx dei fronti d'onda sulla superficie:

$$\Delta s = \Delta x \sin \theta$$

Poiche' $\Delta s = v \Delta t$

$$v \Delta t = \Delta x \sin \theta$$

ovvero

$$\Delta t / \Delta x = \sin \theta / v = u \sin \theta \equiv p$$

in cui abbiamo definito la *lentezza* u ($u = 1/v$) ed il *parametro del raggio* p .

Nel caso in cui la superficie sia una superficie libera, possiamo leggere i tempi di arrivo del fronte d'onda a due stazioni e misurare p direttamente. Il parametro del raggio p rappresenta quindi la lentezza apparente del fronte d'onda nella direzione orizzontale, per cui p viene anche chiamato *lentezza orizzontale* del raggio.

Consideriamo ora un'onda piana che incide su una superficie orizzontale che separa due mezzi omogenei con velocità diverse, v_1 e v_2 , e l'onda rifratta nel secondo mezzo (Fig. 2). Tracciando fronti d'onda separati da intervalli di tempi costanti, essi saranno separati da distanze diverse nei due mezzi e si può vedere dalla figura che l'angolo di incidenza del raggio deve cambiare all'interfaccia per preservare i tempi dei fronti d'onda nel passaggio attraverso l'interfaccia.

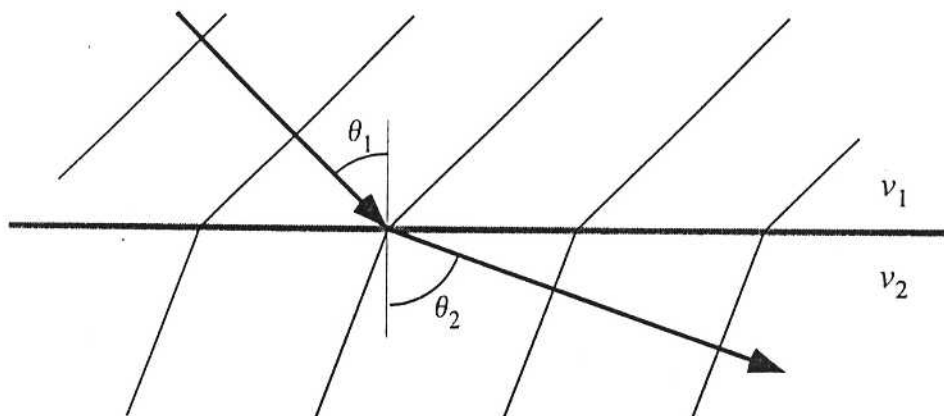


Fig. 2. Un'onda piana che attraversa un'interfaccia orizzontale che separa due semispazi omogenei. La velocità superiore del semispazio in basso fa sì che i fronti d'onda siano più spazati.

Nell'esempio di Figura 2 la lentezza dello strato superiore è maggiore di quella dello strato inferiore e quindi deve cambiare l'angolo d'incidenza nello strato inferiore.

Esprimendo il parametro del raggio in termini delle lentezze e degli angoli di incidenza nei due strati, dovremmo avere:

$$p = u_1 \sin \theta_1 = u_2 \sin \theta_2$$

Da notare che quest'espressione non è altro che la legge di Snell della geometria ottica. L'equazione può essere ricavata anche dal principio di Fermat per il quale il tempo di tragitto tra due punti deve essere stazionario (di solito, ma non sempre, il tempo minimo) rispetto a variazioni nel cammino del raggio.

Nella maggioranza dei casi la velocità delle onde compressionali e di taglio aumenta all'aumentare della profondità nella Terra. Supponiamo di esaminare un'onda che viaggi verso il basso attraverso una serie di strati di velocità via via crescente. Il parametro del raggio rimarrà costante lungo il percorso:

$$p = u_1 \sin \theta_1 = u_2 \sin \theta_2 = u_3 \sin \theta_3$$

Con velocità crescenti l'angolo θ prima o poi raggiungerà i 90° ed il raggio viaggerà orizzontalmente. La cosa è valida anche per gradienti di velocità continui (Fig. 3). In tal caso, denominando u_0 la lentezza in superficie e θ_0 l'angolo di partenza del raggio, avremo:

$$p = u_0 \sin \theta_0 = u \sin \theta$$

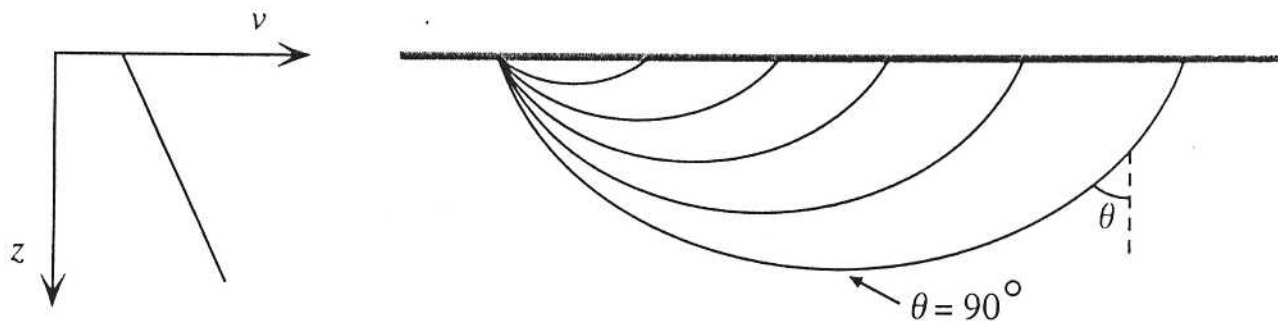
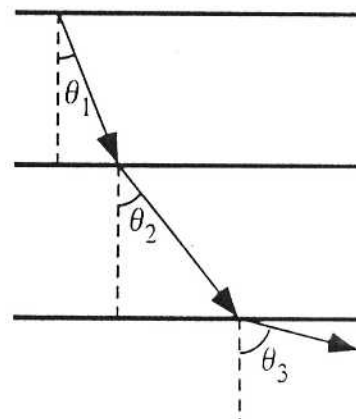


Fig. 3. I percorsi dei raggi per un modello di velocità con un'aumento continuo della velocità con la profondità verranno rifratti verso la superficie. Il punto di inversione in cui il raggio devia verso l'alto è il punto più profondo raggiunto dal raggio ed in esso la direzione del raggio è orizzontale con angolo di incidenza di 90° .

Quando $\theta = 90^\circ$ si dice che il raggio è al *punto di inversione* e $p = u_p$, con u_p la lentezza nel punto di inversione. Poiché la velocità in genere aumenta con la profondità, le lentezze diminuiscono con la profondità. Pertanto i parametri del raggio più piccoli sono più verticali in superficie, invertono la loro direzione più in profondità nella Terra ed in genere viaggiano più lontano.

Negli esempi riportati di strati orizzontali e gradienti di velocità verticali p rimane costante lungo il raggio. Se però consideriamo gradienti di velocità laterali o strati non paralleli, allora p può cambiare lungo il raggio.

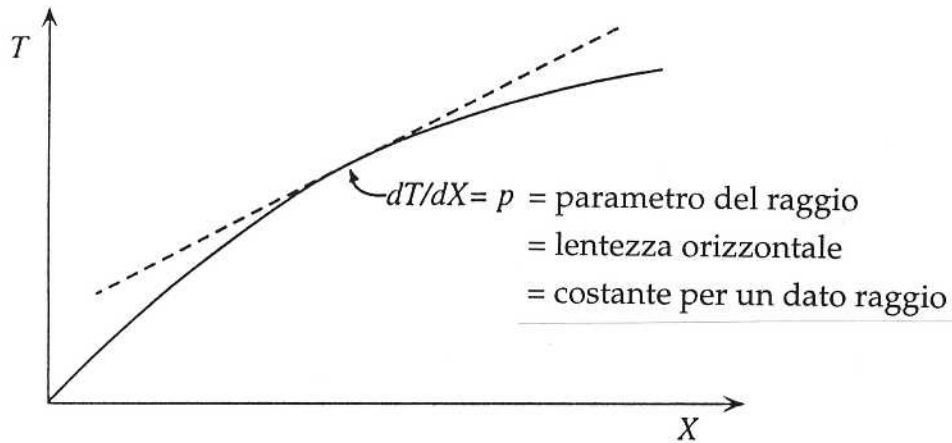


Fig. 4. Curva dei tempi di tragitto per un modello di velocità con un'aumento continuo della velocità con la profondità. Ogni punto sulla curva corrisponde ad un percorso del raggio diverso. La pendenza della curva dT/dX è il parametro del raggio.

In un modello a velocità crescenti con la profondità la curva dei tempi di tragitto avrà la forma riportata in Figura 4. Da notare che p varia lungo la curva e che quindi un raggio diverso è il responsabile dell'arrivo per ogni distanza X .

In ogni punto lungo il raggio il vettore lentezza s può essere scomposto nella sua componente orizzontale e verticale. La lunghezza del vettore s è data da u , la lentezza locale. La componente orizzontale, s_x , della lentezza è il parametro del raggio p . Analogamente possiamo definire la lentezza verticale, η , come

$$\eta = u \cos \theta = (u^2 - p^2)^{1/2}$$

Nel punto di inversione $p = u$ ed $\eta = 0$.

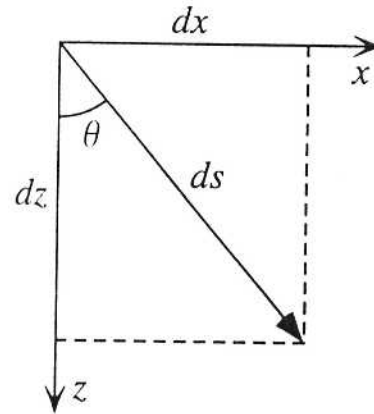
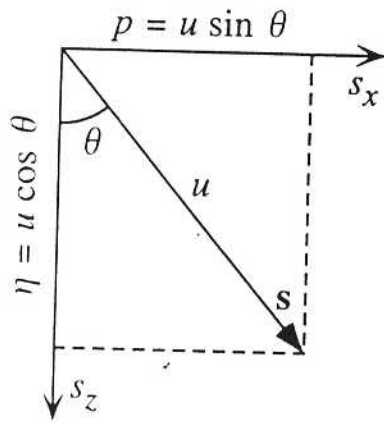
Sviluppiamo ora delle espressioni integrali per calcolarci il tempo di tragitto e la distanza lungo un raggio particolare. Consideriamo a tal proposito un segmento di lunghezza ds lungo il raggio.

Avremo:

$$dx/ds = \sin \theta \quad dz/ds = \cos \theta = (1 - \sin^2 \theta)^{1/2}$$

Poiché $p = u \sin \theta$

$$dx/ds = p/u \quad dz/ds = (1 - p^2/u^2)^{1/2} = u^{-1}(u^2 - p^2)^{1/2}$$



Pertanto:

$$\begin{aligned} dx/dz &= (dx/ds) (ds/dz) = (dx/ds) / (dz/ds) = \\ &= (p/u) [u/(u^2 - p^2)^{1/2}] = p / (u^2 - p^2)^{1/2} \end{aligned}$$

Integrando l'espressione in dz:

$$x(z_1, z_2, p) = p \int_{z_1}^{z_2} dz / [u^2(z) - p^2]^{1/2}$$

Se prendiamo $z_1 = 0$ (in superficie) e $z_2 = z_p$ (profondita' di inversione), la distanza x dalla sorgente superficiale al punto sulla superficie al di sopra del punto di inversione sara'

$$x(p) = p \int_0^{z_p} dz / [u^2(z) - p^2]^{1/2}$$

Essendo il raggio simmetrico rispetto al punto di inversione, la distanza totale dalla sorgente in superficie al ricevitore in superficie sara' il doppio:

$$X(p) = 2p \int_0^{z_p} dz / [u^2(z) - p^2]^{1/2} = 2p \int_0^{z_p} dz / \eta$$

Analogamente possiamo ricavarci un' espressione per il tempo di tragitto $t(p)$:

$$dt = u ds \quad dt/ds = u$$

$$dt/dz = (dt/ds) (ds/dz) = (dt/ds) / (dz/ds) = u^2 / (u^2 - p^2)^{1/2}$$

Integrando otteniamo per il tempo di tragitto dalla superficie al punto di inversione

$$t(p) = \int_0^{z_p} u^2(z) dz / [u^2(z) - p^2]^{1/2}$$

e per il tempo di tragitto totale (sorgente-ricevitore)

$$T(p) = 2 \int_0^{z_p} u^2(z) dz / [u^2(z) - p^2]^{1/2} = 2 \int_0^{z_p} u^2(z) dz / \eta$$

I modelli visti sono appropriati per una distribuzione continua di velocità con la profondità. Nel caso di una serie di strati piani paralleli ed omogenei gli integrali di cui sopra si tramutano in sommatorie:

$$X(p) = 2 p \sum_i \Delta z_i / [(u_i^2 - p^2)^{1/2}] \quad u_i > p$$

$$T(p) = 2 \sum_i [u_i^2 \Delta z_i] / [(u_i^2 - p^2)^{1/2}] \quad u_i > p$$

Le somme partono dallo strato in superficie fino a quello per cui la lentezza dello strato risulta minore del parametro del raggio p .

Nella Terra $X(p)$ di solito aumenta con il diminuire di p , cioè l'angolo di partenza diminuisce con l'aumentare della distanza (Fig. 5a).

Fig. 5a.

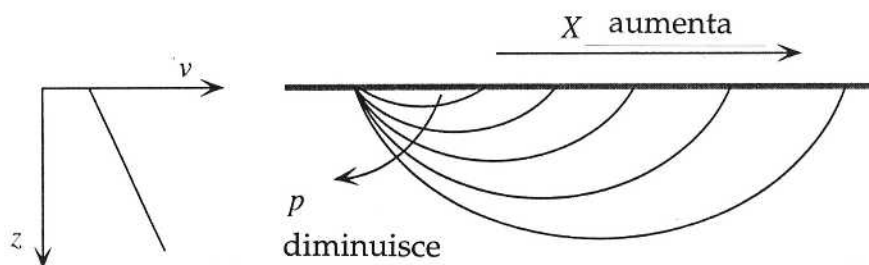
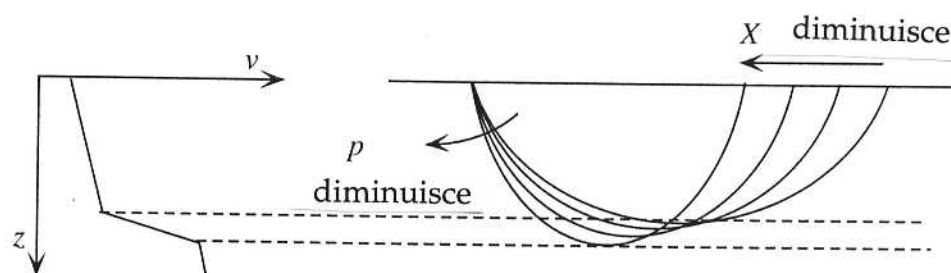


Fig. 5b.



In tal caso la derivata dX/dp è negativa e si dice che il tratto relativo della curva dei tempi di tragitto è *progrado*. Talvolta, in seguito ad un aumento rapido della velocità con la profondità nella Terra, si ha che dX/dp è positivo ed i raggi "ritornano" verso la sorgente all'aumentare di p (Fig. 5b). I tratti della curva dei tempi di tragitto relativi a valori $dX/dp > 0$ si dicono *retrogradi*. Le transizioni da *progrado* a

retrogrado e viceversa generano delle triplicazioni nella curva dei tempi di tragitto (Fig. 6). I punti terminali della triplicazione, per cui $dX/dp = 0$, sono detti *caustiche*.

Fig. 6.

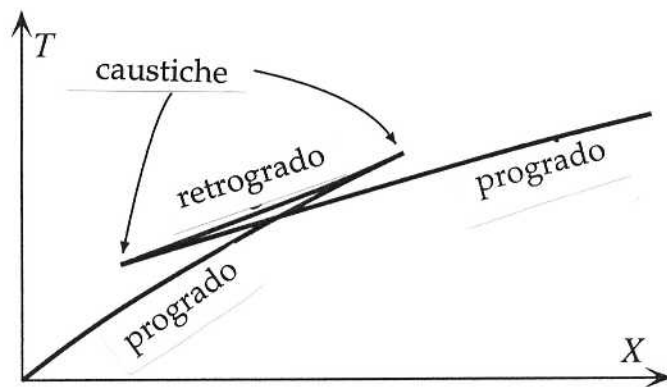
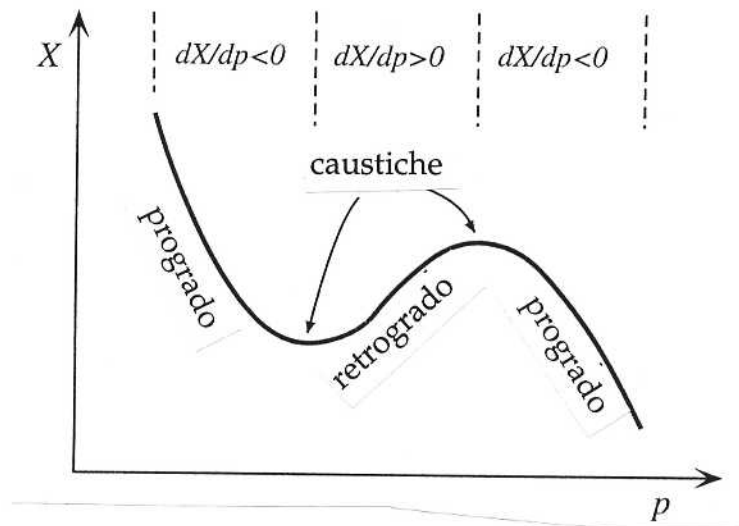


Fig. 7



In questi punti si ha una focalizzazione dell'energia, in quanto vi arrivano diversi raggi con diversi angoli di partenza. Le discontinuità presenti nella curva dei tempi di tragitto scompaiono se consideriamo la curva $X(p)$ (Fig. 8). Su essa le caustiche sono i punti stazionari. Per grandi valori di p i raggi deviano verso l'alto a profondità piccole e viaggiano a distanze brevi. All'aumentare di p la profondità del punto di inversione aumenta ed X pure. Quando il raggio entra nella zona di brusco aumento della velocità, X comincia a diminuire al diminuire di p . Non appena i raggi riescono a passare attraverso il gradiente di velocità ed il punto di inversione è sotto di esso, X ricomincia ad aumentare al diminuire di p .

Si è visto che la funzione $X(p)$ ci comporta meglio della $T(p)$ (esiste un solo valore di X per ogni valore di p), ma la funzione inversa $p(X)$ ha più valori. La combinazione

$$\tau(p) = T(p) - p X(p)$$

e' una funzione ancora migliore, in quanto sia essa che l'inversa sono funzioni ad un solo valore. La funzione $\tau(p)$ si chiama *tempo di ritardo*. Usando le definizioni di $X(p)$ e $T(p)$ e' facile vedere che la sua espressione risulta

$$\tau(p) = 2 \int_0^{z_p} \eta(z) dz$$

Per un mezzo stratificato sara':

$$\tau(p) = 2 \sum_i (u_i^2 - p^2)^{1/2} \Delta z_i = 2 \sum_i \eta_i \Delta z_i \quad u_i > p$$

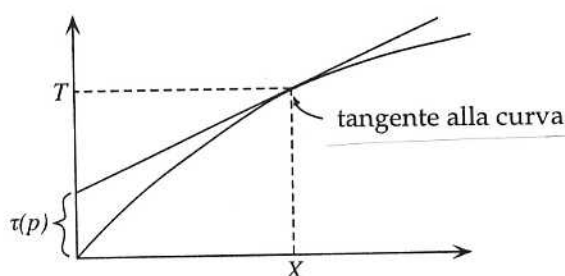


Fig. 8. Il tempo di ritardo, $\tau(p) = T(p) - p X(p)$, e' dato dall'intercetta della tangente alla curva dei tempi di tragitto.

Consideriamo un punto sulla curva dei tempi di tragitto $t(x)$ alla distanza X e tempo T (Fig. 8). L'equazione di una retta tangente alla curva e' $t = T + p(x - X)$. Per $x = 0$ la retta avra' valore $t = T - pX = \tau(p)$. La retta ha pertanto intercetta $\tau(p)$ e pendenza p .

La pendenza della funzione $\tau(p)$ sara':

$$d\tau/dp = d/dp \left[2 \int_0^{z_p} (u^2 - p^2)^{1/2} dz \right] = -2p \int_0^{z_p} dz / (u^2 - p^2)^{1/2} = -X(p)$$

Essendo $X(p) \geq 0$, la curva $\tau(p)$ risulta monotonicamente decrescente. Essa risulta concava verso l'alto per i tratti progradi e concava verso il basso per i tratti retrogradi (Fig. 9). La curva $\tau(p)$ risulta pertanto utile nel calcolarci le funzioni velocita' in funzione della profondita' dai dati dei tempi di arrivo delle onde. Tale trattazione comunque esula dagli scopi di questo corso e si rimanda il lettore ai testi di sismologia (es. Shearer, 1999).

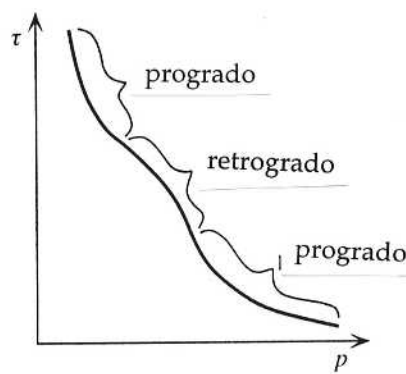


Fig. 9 . La curva dei tempi di ritardo in funzione del parametro del raggio e' monotonicamente decrescente.

Zona a bassa velocita'

In quanto finora detto si e' sempre assunto che la velocita' aumenti con la profondita'. Talvolta ci si trova in condizioni (ad es. onde S nel passaggio dalla litosfera all'astenosfera) nelle quali la velocita' decresce con la profondita' creando una *zona o canale a bassa velocita'*.

Nella parte di gradiente negativo i raggi, che avendo un p abbastanza piccolo riescono ad essere rifratti verso il canale, vengono deviati verso il basso (Fig. 10) e invertono il loro cammino (verso l'alto) solamente nella zona al di sotto del canale in cui le velocita' sono maggiori di qualunque velocita' nel mezzo soprastante.

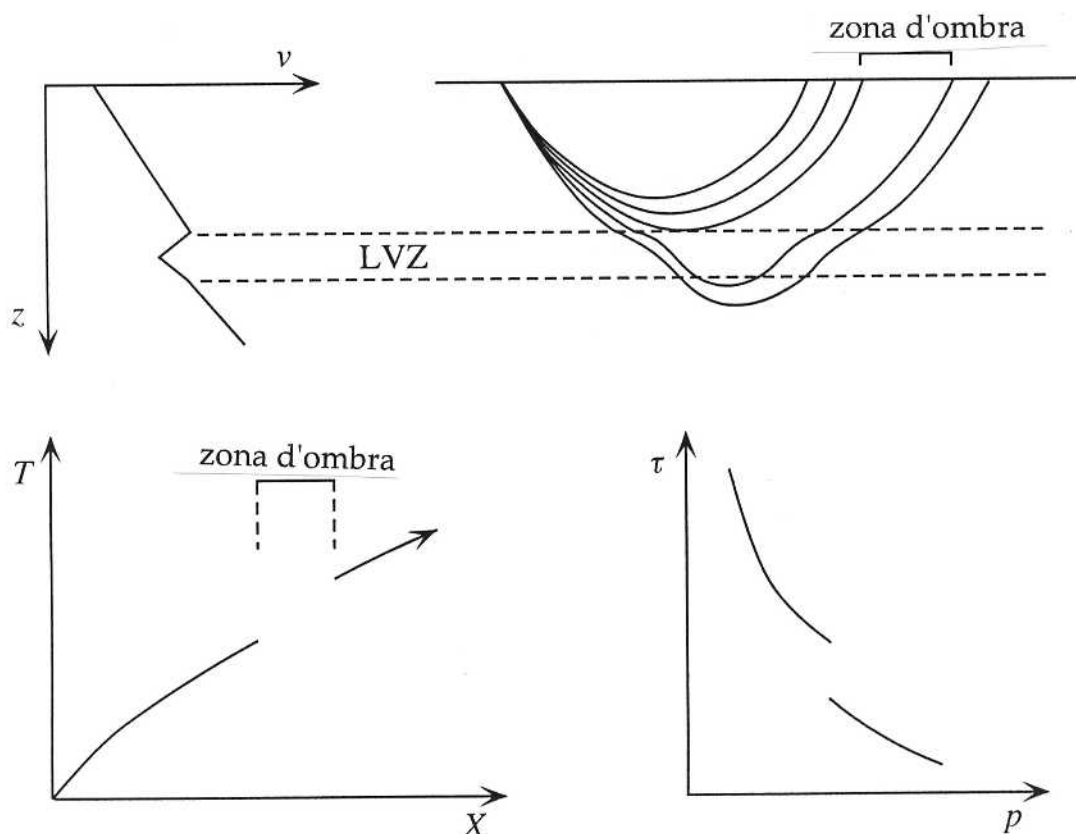


Fig. 10. Una zona a bassa velocita' (LVZ = low velocity zone) e' il risultato di una decremento della velocita' con la profondita'. I raggi vengono deviati verso il basso creando una zona d'ombra in supeorficie e lacune nelle curve $T(X)$ e $\tau(p)$.

L'esistenza di una zona a bassa velocita' crea una lacuna, detta zona d'ombra, sia nelle curve $T(X)$ che $\tau(p)$. L'assenza di raggi che invertono il loro cammino nella zona abassa velocita' rende la determinazione del profilo di velocita' nella stessa alquanto difficile. Vedremo successivamnte che i mezzi offerti dalle onde di superficie riescono a risolvere facilmente anche questo problema.

Nel caso che i raggi abbiamo origine nella zona a bassa velocita', essi possono essere intrappolati nella zona stessa essendo in continuazione rifratti verso l'interno. Ecco perche' la zona a bassa velocita' e' detta anche canale o guida d'onda (Fig. 11).

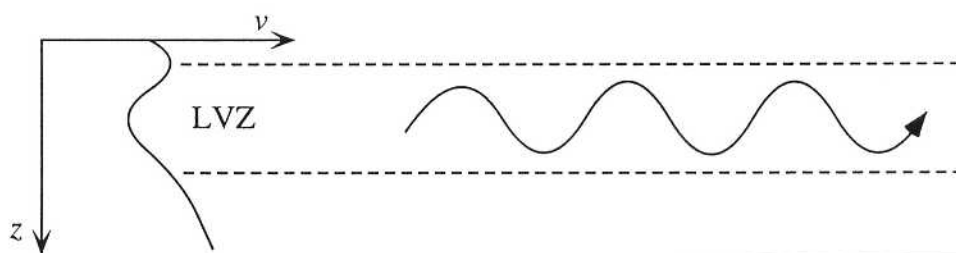


Fig. 11. Una zona a bassa velocita' (LVZ = low velocity zone) puo' intrappolare i raggi e creare un canale o guida d'onda.

Tempi di tragitto delle onde sismiche per un modello a due strati

Consideriamo un modello di crosta a due strati separate da una discontinuità (interfaccia) orizzontale posta all'aprofondità z_1 . Sia la velocità delle onde P nel primo strato α_1 e la velocità delle onde P nel secondo strato sottostante α_2 con $\alpha_1 < \alpha_2$. Consideriamo una sorgente S posta in superficie (es. esplosione) ed un ricevitore R alla distanza x .

L'energia che arriva al ricevitore R può seguire vari percorsi: direttamente attraverso lo strato superiore, mediante riflessioni nello strato superiore, oppure lungo la discontinuità come onda rifratta criticamente (detta anche "head wave"). L'onda rifratta viaggia lungo un raggio che incide sull'interfaccia con un angolo critico i_c , poi viaggia lungo l'interfaccia con la velocità dello strato sottostante e viene rifratta (ancora con l'angolo critico) verso il ricevitore. Da notare che le onde rifratte di questo tipo sono onde di secondo ordine, non predette dalla teoria geometrica dei raggi.

Onda diretta

Il tempo impiegato dall'onda diretta dalla sorgente al ricevitore attraverso lo strato superiore è data semplicemente dalla:

$$t = x / \alpha_1$$

Questa è l'equazione di una retta con pendenza $1/\alpha_1$, se plottiamo il tempo di tragitto in funzione della distanza.

Onda riflessa

Per il cammino dell'onda riflessa (SC + CR, vedi figura) il tempo di tragitto sarà:

$$t = SC/\alpha_1 + CR/\alpha_1$$

Poiché lo strato superiore è omogeneo, il punto di riflessione sull'interfaccia sarà a metà strada tra S ed R. Usando il teorema di Pitagora:

$$SC = CR = [z_1^2 + (x^2 / 4)]^{1/2}$$

Il tempo di tragitto sara' pertanto:

$$t = (2/\alpha_1) [z_1^2 + (x^2 / 4)]^{1/2}$$

ovvero

$$\alpha_1^2 t^2 = 4 z_1^2 + x^2$$

che e' l'equazione di un iperbole.

L'iperbole interseca l'asse dei tempi ($x = 0$) nel punto $t = 2 z_1 / \alpha_1$. Inoltre, per distanze molto grandi (valori di $x \rightarrow \infty$), il termine costante $4 z_1^2$ risulta trascurabile rispetto ad x^2 e pertanto il tempo di tragitto risulta $t = x / \alpha_1$, che e' l'equazione per il tempo di tragitto dell'onda diretta. La retta che rappresenta i tempi di tragitto dell'onda diretta risulta pertanto l'asintoto dell'iperbole dei tempi di tragitto delle onde riflesse.

Onda rifratta (Head wave)

Per il cammino dell'onda rifratta (SC + CR in Fig.) il tempo di tragitto sara':

$$t = SA/\alpha_1 + AB/\alpha_2 + BR/\alpha_1$$

Per simmetria avremo $SA=BR$ ed usando il triangolo SOA risulta:

$$SA = z_1 / \cos i_c$$

ed

$$OA = z_1 \tan i_c$$

per cui

$$AB = x - 2 z_1 \tan i_c$$

Sostituendo queste espressioni nell'equazione del tempo di tragitto, e ricordando che:

$$\sin i_c = \alpha_1 / \alpha_2$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} t &= \frac{2z_1}{\alpha_1 \cos i_c} + \frac{x}{\alpha_2} - \frac{2z_1}{\alpha_2} \tan i_c \\ &= \frac{2z_1}{\alpha_1 \cos i_c} \left[1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \sin i_c \right] + \frac{x}{\alpha_2} \\ &= \frac{2z_1}{\alpha_1} \cos i_c + \frac{x}{\alpha_2} \\ &= \frac{2z_1}{\alpha_1} \sqrt{1 - \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}} + \frac{x}{\alpha_2} \end{aligned}$$

Nel grafico tempi di tragitto in funzione della distanza x questa è ancora l'equazione di una retta con pendenza $1/\alpha_2$ ed intercetta sull'asse dei tempi

$$(2z_1 / \alpha_1) [1 - (\alpha_1 / \alpha_2)^2]^{1/2}$$

Distanza critica

Notiamo comunque che la distanza minima a cui possiamo registrare un'onda rifratta è x_c , detta distanza critica, che risulta essere:

$$x_c = 2z_1 \tan i_c = 2z_1 \alpha_1 / [\alpha_2^2 - \alpha_1^2]^{1/2}$$

Per distanze minori abbiamo solamente la riflessione pre-critica (e l'onda diretta). Alla distanza critica x_c , il tempo di tragitto dell'onda rifratta è uguale al tempo di tragitto dell'onda riflessa, poiché per tale distanza il tragitto AB risulta nullo ed i due percorsi coincidono. Inoltre, sempre per $x = x_c$ la retta dei tempi dell'onda rifratta risulta tangente all'iperbole dei tempi dell'onda riflessa. Infatti, la pendenza dell'iperbole è data da:

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dx} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\alpha_1} \sqrt{4z_1^2 + x^2} \right) \\ &= \frac{x}{\alpha_1} \frac{1}{\sqrt{4z_1^2 + x^2}} \end{aligned}$$

Alla distanza critica ($x_c = 2 z_1 \tan i_c$) la pendenza risulta:

$$\begin{aligned} \left. \frac{dt}{dx} \right|_{x=x_c} &= \frac{2 z_1 \tan i_c}{\alpha_1} \frac{1}{\sqrt{4 z_1^2 + 4 z_1^2 \tan^2 i_c}} \\ &= \frac{\sin i_c}{\alpha_1} \\ &= \frac{1}{\alpha_2} \end{aligned}$$

per cui le due curve, avendo uguale pendenza, risultano tangenti.

Distanza di crossover

Definiamo la distanza di crossover x_{cross} come la distanza a cui l'onda diretta e l'onda rifratta hanno il medesimo tempo di tragitto. Dall'equazione delle due onde per $x = x_{\text{cross}}$ avremo:

$$\frac{x_{\text{cross}}}{\alpha_1} = \frac{x_{\text{cross}}}{\alpha_2} + \frac{2 z_1}{\alpha_1} \sqrt{1 - \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}$$

da cui

$$x_{\text{cross}} = 2 z_1 \sqrt{\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}}$$

Osservando il diagramma dei tempi di tragitto in funzione della distanza per il semplice modello a due strati, notiamo che per piccole distanze e' l'onda diretta ad arrivare per prima, seguita dall'onda riflessa. Per distanze grandi e' invece l'onda rifratta ad arrivare per prima, seguita dall'onda diretta a cui segue l'onda riflessa.

Se nel caso di un esperimento di rifrazione plottiamo in grafico i tempi di tragitto osservati, possiamo stimare le velocita' α_1 ed α_2 e lo spessore z_1 , nell'ordine, come segue:

1. α_1 e' determinato dall'inverso della pendenza della retta dell'onda diretta per distanze minori di x_{cross} .
2. α_2 e' determinato dall'inverso della pendenza della retta dell'onda rifratta per distanze maggiori di x_{cross} .
3. z_1 e' determinato dall'intercetta della retta delle onde rifratte sull'asse dei tempi. Lo spessore z_1 potrebbe essere determinato anche dalla distanza di crossover, ma normalmente questa risulta non ben definita e da' valori poco accurati di z_1 .

Alle distanza critica x_c i tempi di arrivo dell'onda riflessa e rifratta sono uguali.

$$\frac{1}{\alpha_1} \sqrt{4z_1^2 + x_c^2} = \frac{2z_1}{\alpha_1} \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2} + \frac{x_c}{\alpha_2}$$

$$\frac{2}{\alpha_1} \sqrt{z_1^2 + \left(\frac{x_c}{2}\right)^2} - \frac{2z_1}{\alpha_1} \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2} = \frac{x_c}{\alpha_2}$$

$$\frac{2}{\alpha_1} \left[\frac{z_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2}} - z_1 \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2} \right] = \frac{x_c}{\alpha_2}$$

per cui $\cos i_c = \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2 + \left(\frac{x_c}{2}\right)^2}}$ e $\cos i_c = \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2}$

$$2z \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left[\frac{1 - \left\{1 - \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\right\}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2}} \right] = x_c$$

$$\boxed{2z \frac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}} = x_c}$$

oppure $x_c = 2z \tan i_c$

Alle distanze critiche la retta dell'onda rifratta è tangente alla iperbole dell'onda riflessa.

derivata onda rifratta = $\frac{1}{\alpha_2}$

derivata onda riflessa = $\frac{d}{dx} \left(\frac{2}{\alpha_1} \sqrt{z_1^2 + \frac{x^2}{4}} \right)$

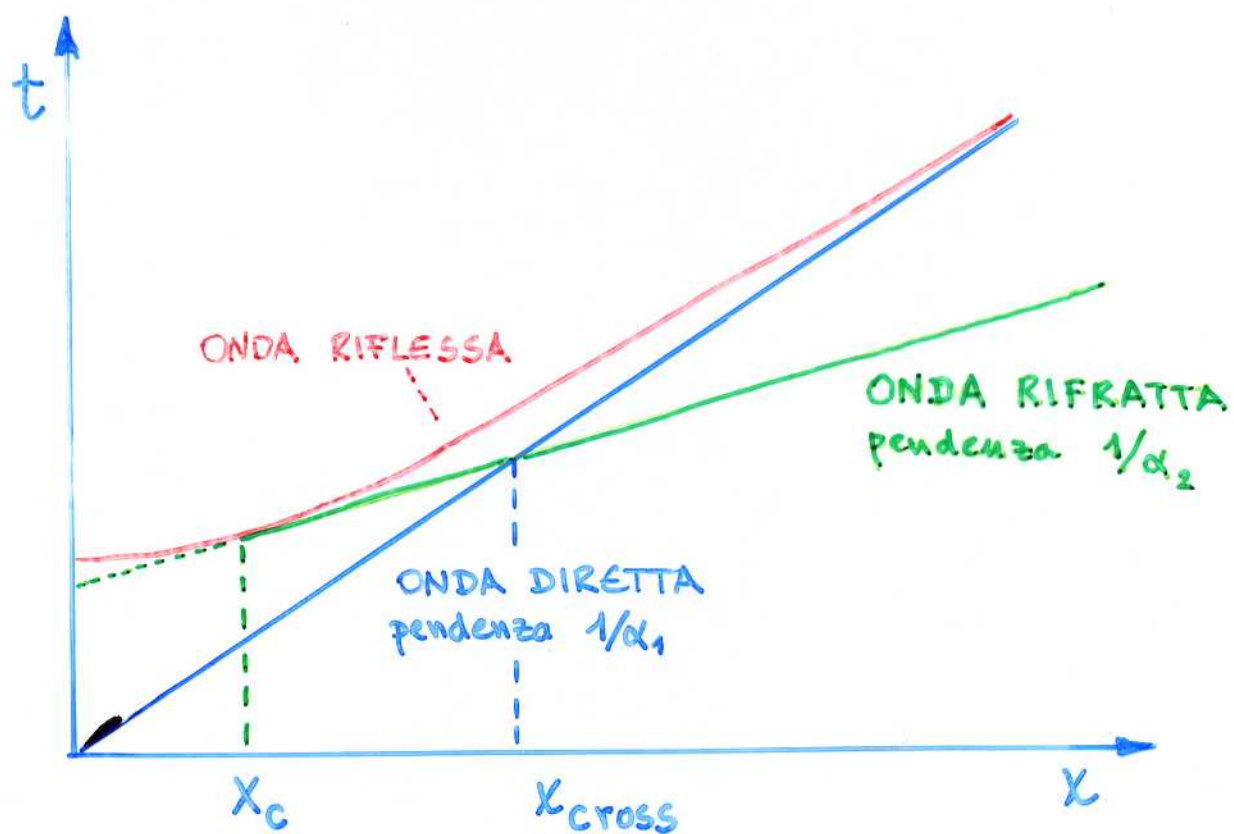
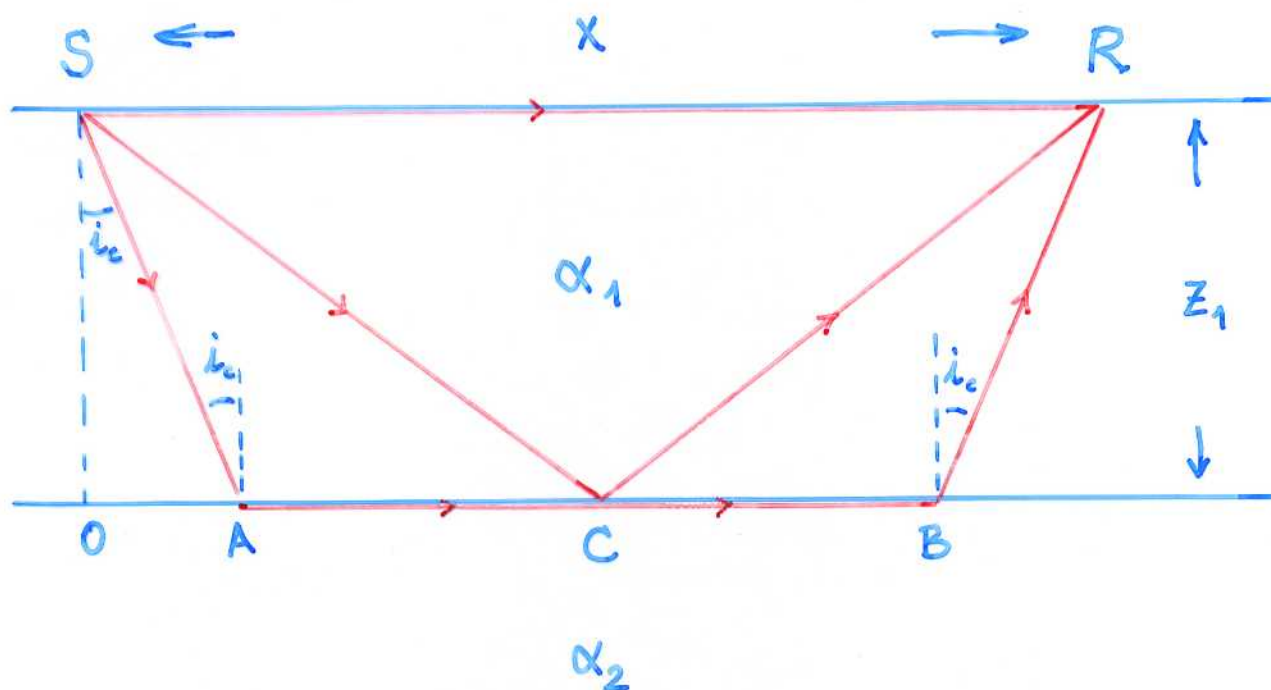
$$= \frac{1}{2} \frac{2}{\alpha_1} \frac{1}{\sqrt{z_1^2 + \frac{x^2}{4}}} \cdot \frac{2x}{4}$$

$$= \frac{x}{2\alpha_1} \frac{1}{\sqrt{z_1^2 + \frac{x^2}{4}}}$$

$$= \frac{x}{2\alpha_1 z_1} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{2z_1}\right)^2}}$$

Nel punto $x = x_c \rightarrow = \frac{2z_1 \tan i_c}{2\alpha_1 z_1} \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 i_c}}$

$$= \frac{\tan i_c}{\alpha_1} \cos i_c = \frac{\sin i_c}{\alpha_1} = \frac{\alpha_1 / \alpha_2}{\alpha_1} = \frac{1}{\alpha_2}$$



ONDE SISMICHE PER DISTANZE FINO A 10°

Per tali distanze la Terra può approssimarsi con un modello piatto; inoltre consideriamo modelli strutturali della crosta terrestre semplificati (uno o due strati).

Considerando una sorgente di onde sismiche F e varie stazioni di registrazione S_1, S_2, S_3 . Ad una stazione potranno arrivare vari tipi di onde (dirette, riflesse, trasmesse...)

Onda diretta

Si propaga nella crosta (superiore, per la maggior parte degli eventi) e viene indicata come P_g, S_g ove il g indica la propagazione nel granito.

Onda riflessa

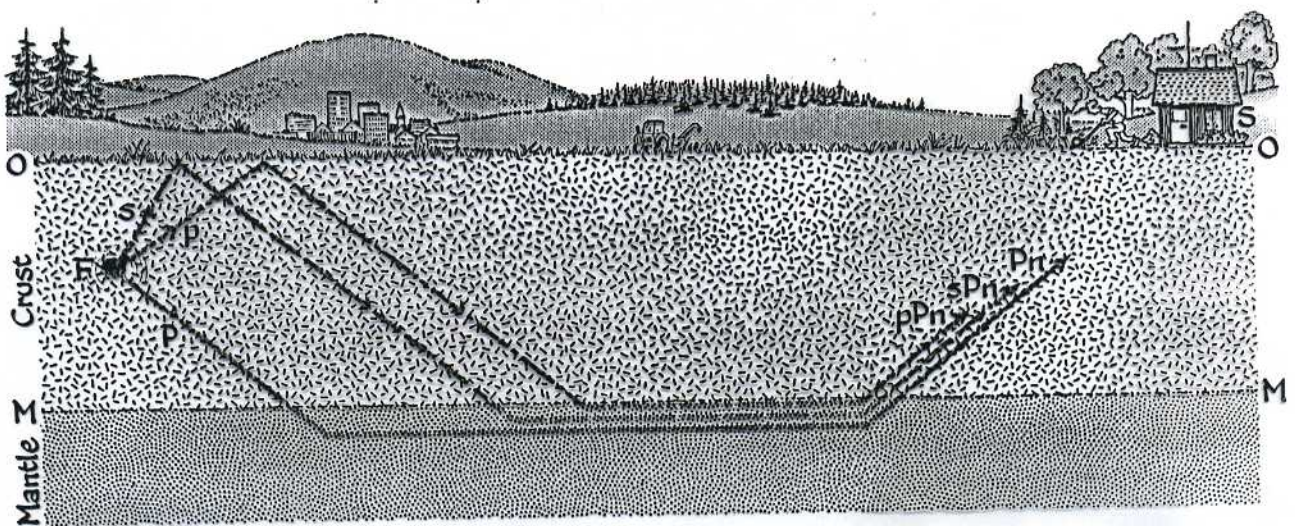
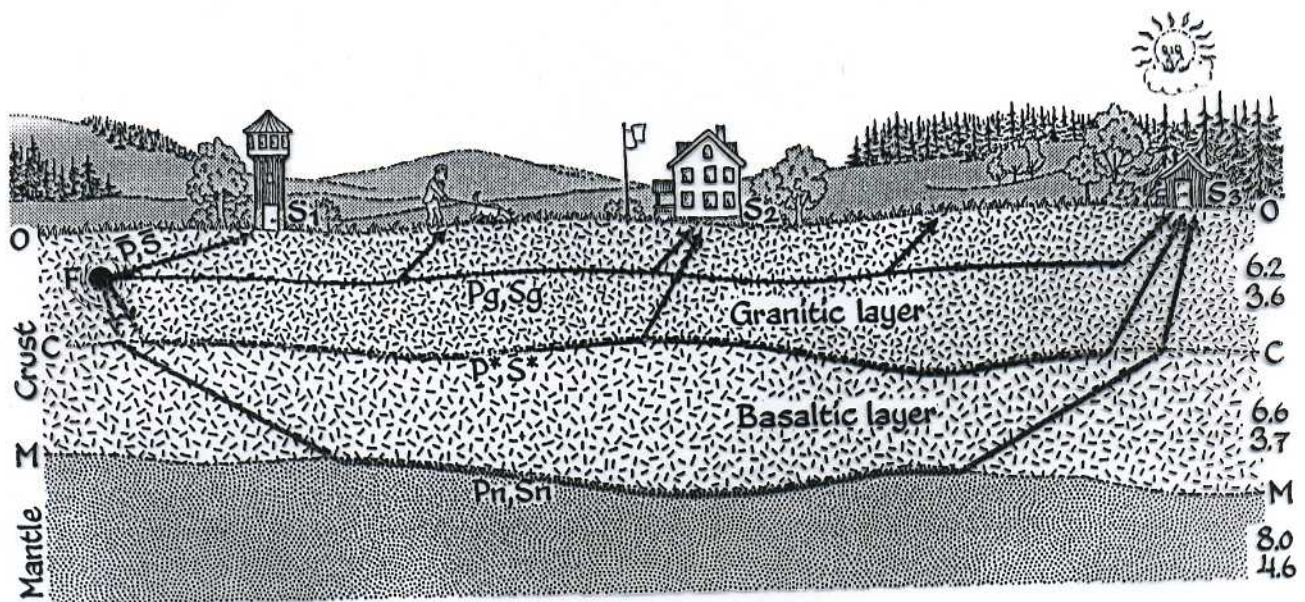
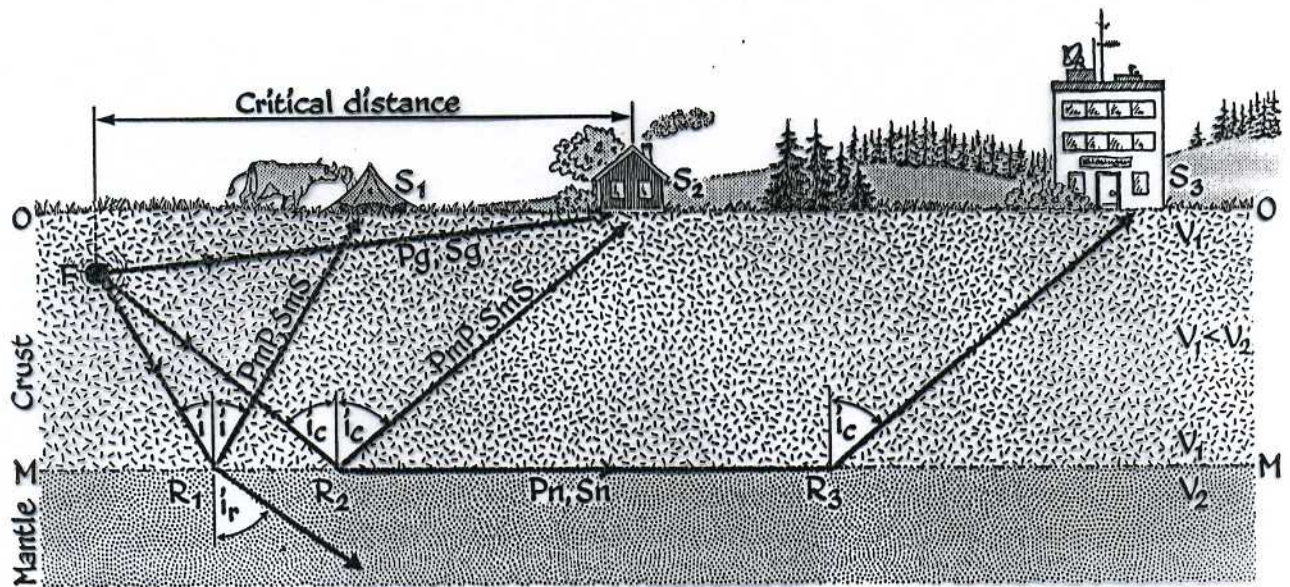
L'onda riflessa dalla discontinuità crosta-mantello - la Moho - viene indicata come P_{HP}, S_{HS}

Onde rifratte

Per distanze superiori a quella corrispondente all'angolo critico si possono osservare onde che si propagano lungo la Moho con velocità corrispondenti a quelle del mantello. Esse si indicano con P_m, S_m e sono chiamate anche col termine inglese **head wave**.

Nel modello a due strati crostali (granito e basalto, separati dalla discontinuità detta di Conrad), le onde rifratte che si propagano lungo la discontinuità sono indicate come P^*, S^* o P_b, S_b .

Esempi di onde nella crosta e sismogrammi registrati a 220 km dalla sorgente sono mostrati nelle figure successive.



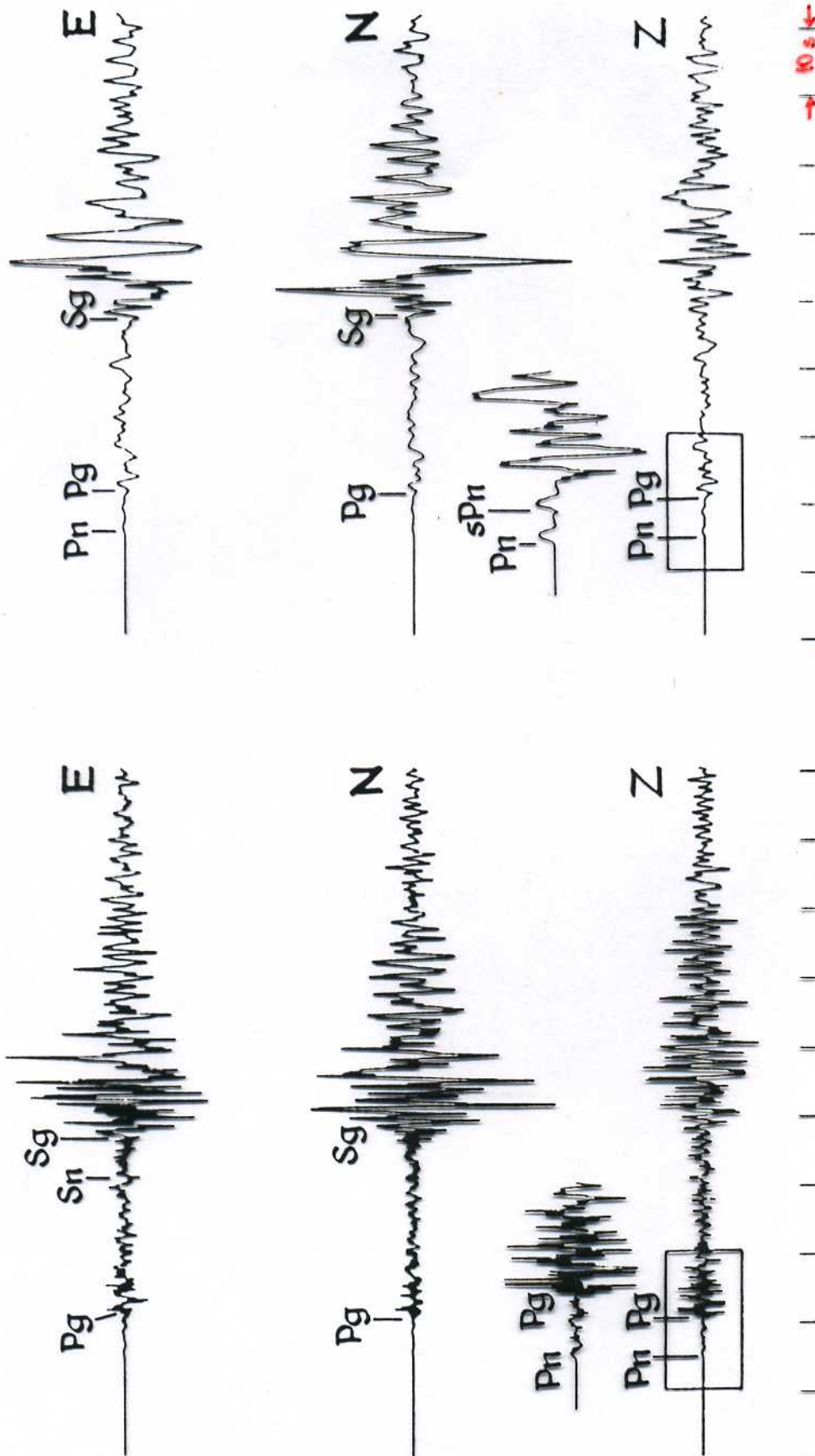


Plate 10. Velocity (left) and displacement seismograms (right) of the Swabian Jura, southern FRG, earthquake of September 3, 1978 ($M_s=5.9$). A three-component broad-band recording system at GRF, Bayern, FRG, at an epicentral distance of 220 km, has been used. All four essential crustal phases, i.e. P_n , P_g , S_n and S_g can be identified on the records, even though the S_n onset is somewhat ambiguous. S_g is best seen on the horizontal channels. The enlarged segment of the initial portion of the vertical-component displacement record (framed) shows a clear "one-sided" onset between P_n and P_g , arriving 2.6 s after P_n . By making use of synthetic (computed) seismograms, this phase has been interpreted (Kind, 1979) as sP_n (see Fig. 11). The successful revelation of the sP_n phase made it possible to determine the focal depth of the event to be about 6 km. As follows from the displayed records the velocity seismograms enhance the high frequencies and thus are useful in precise readings of the onset (arrival) times. The displacement seismograms, on the other hand, emphasize the low frequencies and are suitable for determination of dynamic source parameters, for displaying the low-frequency surface waves, etc. There is 10 s between successive time marks at the bottom of the plate.

Travel times for $h=0$

Δ	Pg		P^*		Pn		Sg		S^*		Sn		$Sg - Pg$		PmP		Rg	
km	m	s	m	s	m	s	m	s	m	s	m	s	m	s	m	s	m	s
0	0						0						0				0	
10	1.6						2.8						1.2				3.3	
20	3.2						5.6						2.4				6.6	
30	4.8						8.4						3.6				9.9	
40	6.4						11.2						4.8	13.7			13.2	
50	8.0						14.0						6.0	14.2			16.6	
60	9.6						16.8						7.2	15.1			19.9	
70	11.3						19.6						8.3	16.1			23.2	
80	12.9						22.3						9.4	17.2			26.5	
90	14.5						25.1						10.6	18.3			29.8	
100	16.1						27.9						11.8	19.5			33.1	
110	17.7	18.7	20.8		30.7						36.8		13.0	20.8			36.4	
120	19.3	20.2	22.1		33.5						39.0		14.2	22.1			39.7	
130	20.9	21.7	23.3		36.3						41.2		15.4	23.4			43.0	
140	22.5	23.2	24.6		39.1						43.4		16.6	24.8			46.4	
150	24.1	24.7	25.9		41.9						45.6		17.8	26.1			49.7	
160	25.7	26.2	27.2		44.7	45.9	47.7				19.0		27.5	27.5			53.0	
170	27.3	27.7	28.5		47.5	48.6	49.9				20.2		28.9	28.9			56.3	
180	28.9	29.2	29.7		50.3	51.4	52.1				21.4		30.3	30.3			59.6	
190	30.6	30.8	31.0		53.1	54.1	54.3				22.5		31.8	31.8	1	02.9		
200	32.2	32.3	32.3		55.9	56.8	56.5				23.7		33.2	33.2	1	06.2		
210	33.8	33.8	33.6		58.7	59.5	58.7				24.9					1	09.5	
220	35.4	35.3	34.8	1	01.4	1	02.2	1	00.9		26.0					1	12.8	
230	37.0	36.8	36.1	1	04.2	1	04.9	1	03.1		27.2					1	16.2	
240	38.6	38.3	37.4	1	07.0	1	07.6	1	05.3		28.4					1	19.5	
250	40.2	39.8	38.7	1	09.8	1	10.3	1	07.5		29.6					1	22.8	

Fig. 25. Sample section ($0 \leq \Delta \leq 250$ km) of travel-time tables for near events with surface focus in Sweden. Times of travel are listed for Pg , P^* , Pn , Sg , S^* , Sn , PmP , Rg and for the difference $Sg-Pg$. (After Båth, 1979b).

NEAR EARTHQUAKE PHASES

Times of Transmission for a Surface Focus

Δ	P_g	P^*	P_n	S_g	S^*	S_n
0.0	0 0.0	0 (2.8)	0 (6.8)	0 0.0	0 (3.9)	0 (10.7)
0.2	4.0			6.6		
0.4	8.0	(9.6)		13.2		
0.6	12.0	13.1		19.8	21.7	
0.8	16.0	16.5	18.3	26.4	27.7	31.0
1.0	20.0	19.9	21.1	33.0	33.6	36.1
1.2	23.9	23.3	23.9	39.6	39.5	41.2
1.4	27.9	26.7	26.8	46.3	45.5	46.3
1.6	31.9	30.2	29.6	52.9	51.4	51.3
1.8	35.9	33.6	32.5	59.5	57.4	56.4
2.0	39.9	37.0	35.4	I 6.1	I 3.3	I 1.5
2.2	43.9	40.4	38.3	12.7	9.2	6.6
2.4	47.9	43.8	41.2	19.3	15.2	11.7
2.6	51.9	47.3	44.0	25.9	21.1	16.7
2.8	55.9	50.7	46.9	32.5	27.1	21.8
3.0	59.8	54.1	49.7	39.1	33.0	26.9
3.2	I 3.8	57.5	52.5	45.7	38.9	32.0
3.4	7.8	I 0.9	55.4	52.3	44.9	37.1
3.6	11.8	4.4	58.2	58.9	50.8	42.1
3.8	15.8	7.8	I 1.1	2 5.6	56.8	47.2

Fig. 26. Sample section ($0 \leq \Delta \leq 3.8^\circ$) of JB travel-time tables for near events with surface focus. Times of travel are listed for P_g , P^* , P_n , S_g , S^* and S_n . Figures in parentheses give travel times of P^* , S^* and P_n , S_n vertically reflected from Conrad and Moho discontinuities, respectively. (From Jeffreys and Bullen 1967).