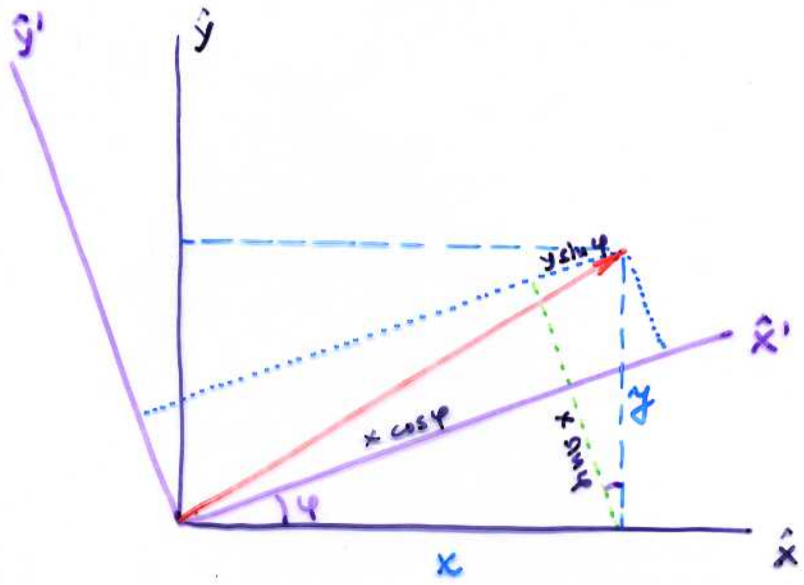
SCALARI - VETTORI - TENSORI

- Si dice scalare una grandezza caratterizzata da un solo numero, come l'intensità: temperatura a
- Si dice vettore una grandezza caratterizzata da tre numeri - intensità e direzione: velocità $\underline{v} = [v_x, v_y, v_z]$
- Si dice tensore una grandezza caratterizzata da più numeri, ad es. 6: tre direzioni e tre intensità: deformazioni in un mezzo continuo $\underline{\underline{\tau}} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix}$

Uno scalare, vettore, tensore può essere costante o funzione di una variabile (scalare, vettore, tensore).
Nel caso sia funzione di una variabile, è detto campo (scalare, vettoriale, tensoriale).

Se il sistema di coordinate cambia, lo scalare rimane invariato, ma le componenti del vettore (tensore) si devono ricalcolare.
Occorre pertanto definire una grandezza fisica in modo tale, da rendere indipendenti dal sistema di coordinate le sue proprietà "fisiche" (es. intensità e direzione per un vettore)

TRASFORMAZIONE DI COORDINATE : 2D



$$x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi$$
$$y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$x_i' = a_{ij}\, x_j$$

NB: sottintesa sommatoria su indici ripetuti!

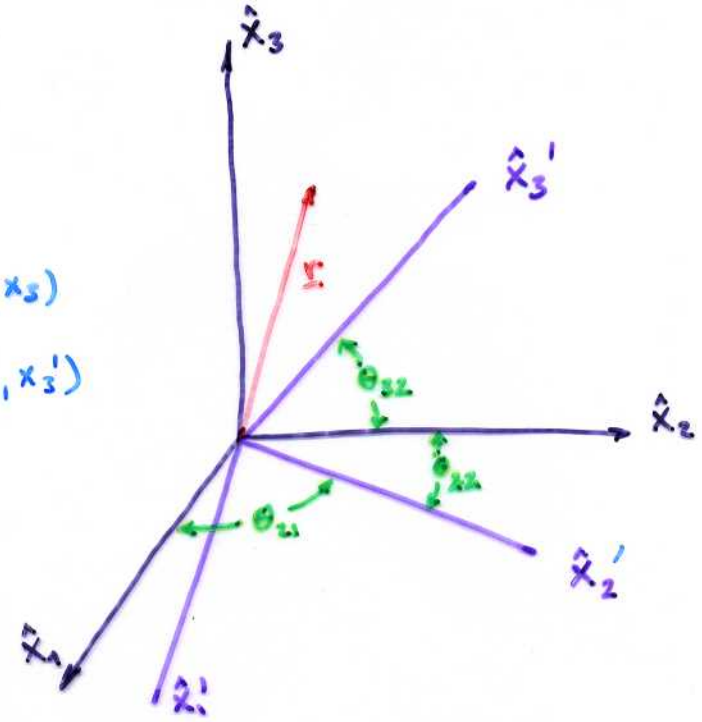
$$a_{ij} = \cos\Theta_{ij} = \cos[x_i', x_j]$$

$$a_{11} = \cos[x_1', x_1] = \cos\varphi$$
$$a_{12} = \cos[x_1', x_2] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi$$
$$a_{21} = \cos[x_2', x_1] = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \varphi\right) = -\sin\varphi$$
$$a_{22} = \cos[x_2', x_2] = \cos\varphi$$

TRASFORMAZIONE DI COORDINATE : 3D

$\underline{r} = (x_1, x_2, x_3)$

$\underline{r} = (x_1', x_2', x_3')$



$$x_1' = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3$$

$$x_2' = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3$$

$$x_3' = a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3$$

$$x_i' = a_{ij} x_j$$

$$a_{ij} = \cos \theta_{ij} = \cos [x_i', x_j]$$

$$x_j = a_{ij} x_i'$$

NB $\quad \underline{x}' = \underline{\underline{A}}\, \underline{x}$

$\quad \underline{x} = \underline{\underline{A}}^T \underline{x}'$

chiaramente $\quad A^T = A^{-1}$

TENSORI

$$\underline{T} = T_{ik} = u_i v_k^T = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} [v_1\ v_2\ v_3] = \begin{bmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 \\ u_3 v_1 & u_3 v_2 & u_3 v_3 \end{bmatrix}$$

Trasformiamo:

$$u_i' = a_{ij} u_j$$
$$v_k' = a_{kl} v_l \qquad (v_k')^T = v_l^T \cdot a_{lk}^T$$

$$T_{ik}' = u_i' v_k'^T = (a_{ij} u_j)(v_l^T a_{lk}^T) = a_{ij} T_{jl} a_{lk}^T$$

$$T_{ik}' = a_{ij} a_{kl} T_{jl}$$

Una quantità che obbedisce a tali regole di trasformazione si dice tensore di secondo ordine.

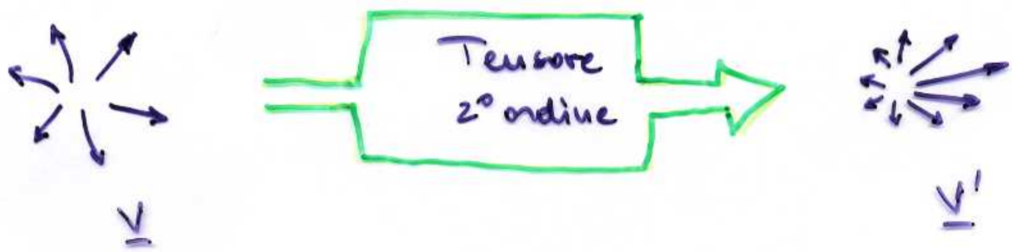
NB: tensore di ordine zero = scalare
tensore di ordine uno = vettore

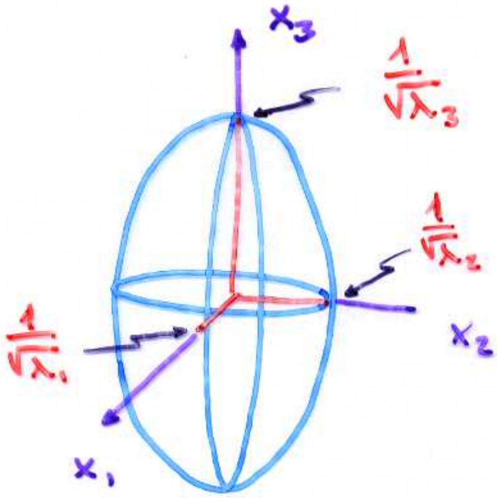
Il tensore di ordine r pone in relazione due tensori di ordine m ed n (con $m+n=r$)

$$T_n \Leftarrow T_{r=n+m} \Rightarrow T_m$$

Es. Un vettore è una trasformazione di un punto nell'altro

Un tensore di secondo ordine trasforma un vettore (campo vettoriale) in un altro vettore (campo vettoriale)





$$\underline{\underline{u}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

La superficie dell'ellissoide di rappresentazione orientato lungo gli assi principali è data da

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 = 1$$

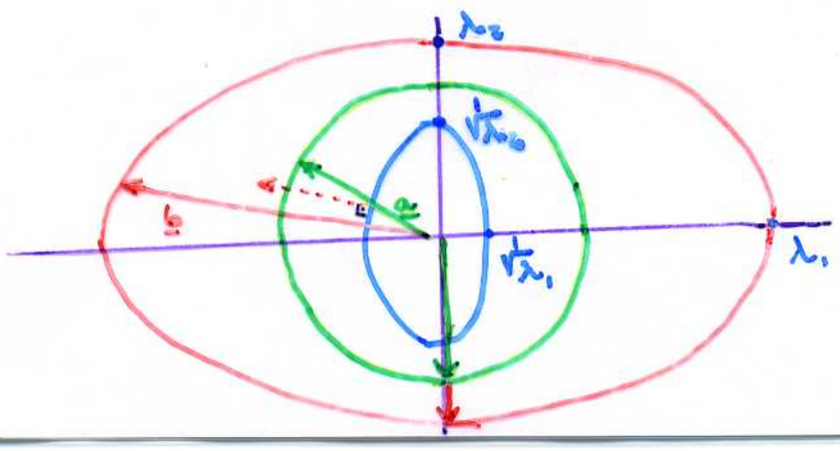
$$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$$

La lunghezza degli assi maggiore, intermedio e minore è data da

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_3}} \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$$

L'ellissoide intensità dà l'intensità del vettore $\underline{b}$ che risulta da $\underline{\underline{u}}\,\underline{a}$

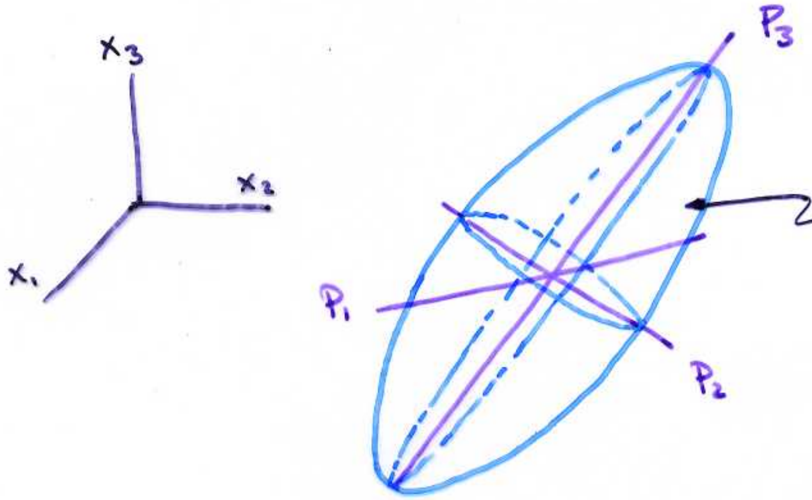
$$\frac{x_1^2}{\lambda_1^2} + \frac{x_2^2}{\lambda_2^2} + \frac{x_3^2}{\lambda_3^2} = 1$$



In quasi tutti i casi di interesse i tensori di secondo ordine

- sono simmetrici $\quad u_{ij} = u_{ji} \rightarrow$ 6 comp. indip.
- hanno autovalori positivi $\quad \lambda_i > 0$

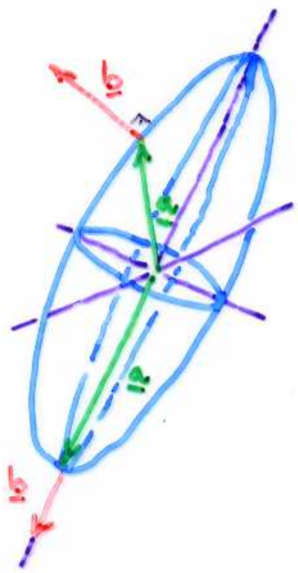
Tali tensori si possono rappresentare mediante superfici ellissoidali.



$$\underline{\underline{u}} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{bmatrix}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sono rispettivamente gli autovalori (maggiore, intermedio, minore), intersezioni dell'ellissoide lungo la direzione degli assi principali - autovettori - P_1, P_2, P_3.

Un tensore che agisce su un vettore lo trasforma in un altro vettore



$$u_{ij}\, a_j = b_i$$

La direzione di $\underline{b}$ è perpendicolare alla intersezione di $\underline{a}$ con l'ellissoide $\underline{u}$

Nel caso $\underline{a}$ sia parallelo ad uno dei tre assi principali, allora $\underline{b} \parallel \underline{a}$.

ESEMPIO

Il tensore indice di rifrazione $\underline{\underline{n}}$ dà la velocità e la direzione (vettore $\underline{b}$) di un'onda nel mezzo rispetto alla velocità e direzione (vettore $\underline{a}$) dell'onda fuori dal mezzo.

OPERAZIONI TRA VETTORI

Prodotto tra scalare e vettore

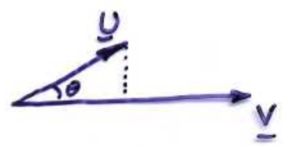
$$s\cdot \underline{V} = s(V_1 , V_2 , V_3) = (sV_1 , sV_2 , sV_3)$$

Prodotto scalare di due vettori

$$\underline{U}\cdot\underline{V} = UV\cos\theta = U_1V_1 + U_2V_2 + U_3V_3$$

se $\underline{U} \parallel \underline{V} \rightarrow \cos\theta = 1 \qquad \underline{U}\cdot\underline{V} = UV$

se $\underline{U} \perp \underline{V} \rightarrow \cos\theta = 0 \qquad \underline{U}\cdot\underline{V} = 0$

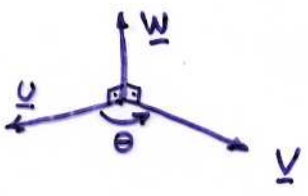


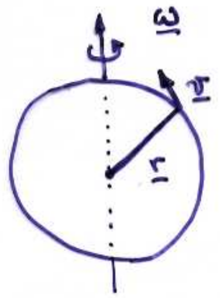
Prodotto vettoriale di due vettori

$$\underline{U} \times \underline{V} = \underline{W} \qquad \text{con} \qquad W = UV\sin\theta$$

$$\underline{W} = (U_2V_3 - U_3V_2 \,,\; U_3V_1 - U_1V_3 \,,\; U_1V_2 - U_2V_1)$$

$$\underline{W} = \underline{U}\times\underline{V} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ U_1 & U_2 & U_3 \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix}$$





$$\underline{v} = \underline{\omega} \times \underline{r}$$

CAMPI

È detto campo uno stato fisico dello spazio o della materia che vi è contenuta (es. magnetico, gravitazionale, elastico, termico, acustico ...)

Si descrive un campo mediante opportune grandezze fisiche che lo caratterizzano. Nel momento in cui si decide di descrivere un dato campo mediante un gruppo di grandezze piuttosto che un altro, si fa un modello matematico del campo

Ogni campo ha delle sorgenti o cause (sorgenti di calore, masse, cariche elettriche ....). Esse sono concentrate (puntiformi) o estese in una regione dello spazio. La distribuzione delle sorgenti è descritta dalla funzione densità di sorgente.

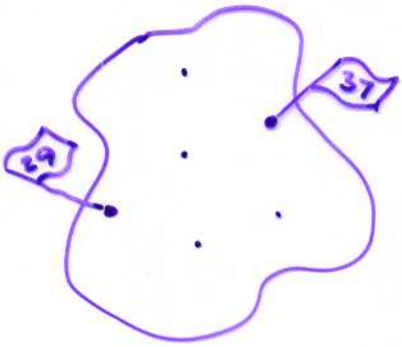
PROBLEMA FONDAMENTALE: data la distribuzione e l'intensità delle sorgenti di un campo determinare il campo stesso (cioè la funzione $f(\underline{r},t)$).

Per risolverlo occorre una relazione tra sorgente e campo (determinata sperimentalmente) detta legge del campo (legge di Newton, leggi di Maxwell ...)

Una forma tipica delle leggi del campo è una relazione tra sorgenti del campo e la variazione delle funzioni che lo descrivono nell'intorno di ogni punto. Le variazioni delle grandezze sono descrivibili mediante differenziali

La legge del campo ha la forma di un'equazione differenziale!

Campo scalare



Una regione dello spazio è sede di un campo scalare, se in ogni punto della regione ed in ogni istante di tempo è definito un numero (indicante la misura di una grandezza fisica od una grandezza ad esso correlata.

Scelto un sistema di coordinate, il campo è descritto da una funzione detta potenziale del campo

$$f = f(\underline{r}, t)$$

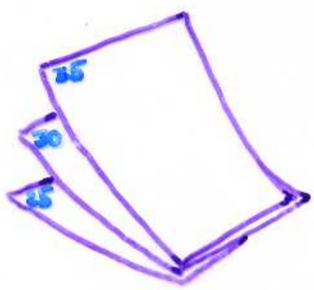
Esempi:

campo termico
campo delle densità
campo del potenziale gravitazionale

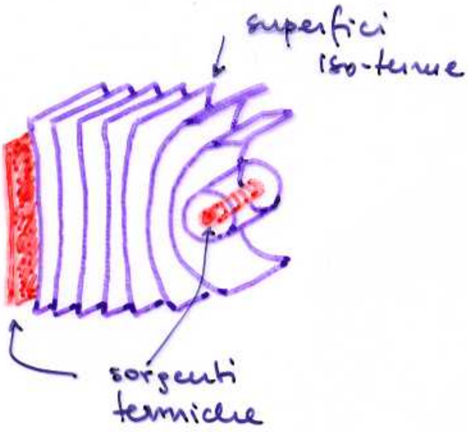
Le superfici luogo dei punti per i quali, ad un generico istante t_0, la funzione ha lo stesso valore

$$f(\underline{r}, t_0) = c(t_0)$$

sono dette superfici equipotenziali



GRADIENTE



Consideriamo le superfici equipotenziali di un campo termico $T(\underline{r},t)$.
Per indicare la differenza di temperatura per unità di percorso nella direzione di massima variazione si introduce il concetto di gradiente di temperatura.

Esempi: gradiente geotermico
→ 3°C ogni 100 m
gradiente di pressione atm
→ 10KPa ogni 1000 m

Il gradiente indica la variazione della grandezza scalare nella direzione in cui tale variazione per unità di percorso è massima. Il gradiente è un vettore!

Esempio: il flusso di calore è proporzionale, ma di direzione opposta, al gradiente di temperatura

$$\underline{J}(\underline{r}) = -k\left[\text{grad}\, T(\underline{r})\right]$$

La componente di grad T in qualunque direzione è data dal tasso di variazione di T in quella direzione.
Così la componente x sarà $\frac{\partial T}{\partial x}$, quella y sarà $\frac{\partial T}{\partial y}$ e quella z sarà $\frac{\partial T}{\partial z}$. Pertanto (in coordinate cartesiane)

$$\text{grad}\, T \equiv \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}\right)$$

Notazione:

$$\text{grad}\, T = \underline{\nabla} T = e_i T_{,i}$$

ove con $\underline{\nabla}$, detto "nabla", indico un operatore vettoriale, cioè un complesso di operazioni da eseguirsi su un ente matematico.

$$\underline{\nabla} = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right]$$

Derivata direzionale

La derivata di una funzione in una data direzione $\underline{\nu}$ si ottiene proiettando il vettore gradiente su quella direzione:

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\nu}} = \underline{\nabla} f \cdot \underline{\nu} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos\gamma$$

ove $\cos\alpha$, $\cos\beta$ e $\cos\gamma$ sono i coseni direttori del versore $\underline{\nu}$, cioè le proiezioni di $\underline{\nu}$ sugli assi x, y, z.

NB: Il vettore gradiente in un punto è sempre ortogonale alla superficie equipotenziale passante per quel punto!

Esempio

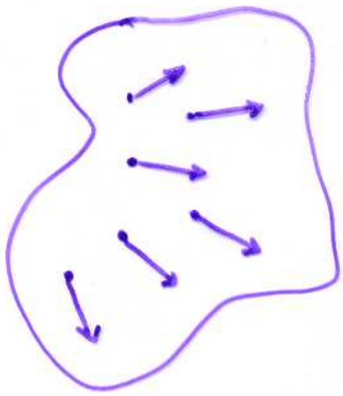
$$\varphi(\underline{r}) = x^2 + y^2 - 2z$$

$$\underline{\nabla}\varphi = [2x, 2y, -2]$$

$$= 2x\,\underline{i} + 2y\,\underline{j} - 2\,\underline{k}$$

Le componenti di $\underline{\nabla}\varphi$ nel punto $\underline{r}_0 = (3, -1, 2)$ sono $\underline{\nabla}\varphi(\underline{r}_0) = (6, -2, -2)$ con modulo $|\nabla\varphi(\underline{r}_0)| = \sqrt{44}$

Campo vettoriale

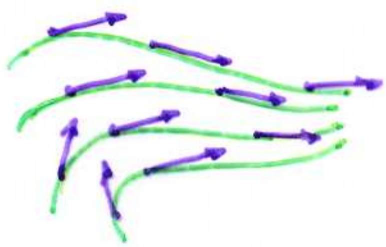


Una regione dello spazio è detta campo vettoriale se in ogni punto della regione ed in ogni istante è definito un vettore indicante una grandezza fisica

$$\underline{v} = \underline{v}(\underline{r},t) = \begin{bmatrix} v_1(\underline{r},t) \\ v_2(\underline{r},t) \\ v_3(\underline{r},t) \end{bmatrix}$$

Esempi: campo elettrico
campo magnetico
campo delle velocità

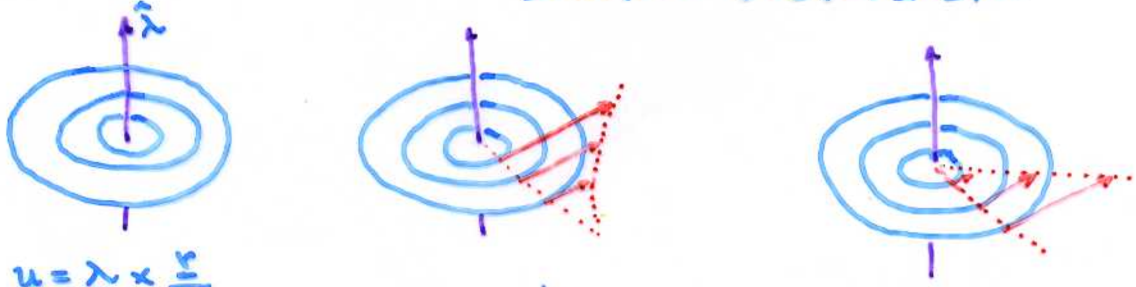
Le linee di inviluppo dei vettori del campo sono dette linee di flusso (i vettori sono sempre tangenti a tali linee)



NB. Molti campi vettoriali ammettono superfici ortogonali alle linee del campo, ma in genere tali superfici non esistono.

Possiamo pensare ad un campo vettoriale come ottenuto associando ad un campo di direzioni (modulo unitario) un campo scalare

$$\underline{v}(\underline{r},t) = \varphi(\underline{r},t)\,\underline{u}(\underline{r},t)$$



$\underline{u} = \underline{\lambda} \times \frac{\underline{r}}{r}$

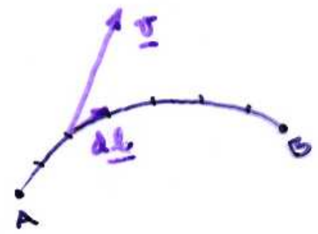
$\varphi(\underline{r}) = \frac{k}{|\underline{r}|}$

$\varphi(\underline{r}) = k|\underline{r}|$

ROTORE

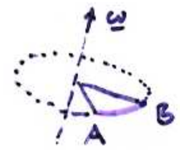
La circolazione, C, di un vettore $\underline{v}$ lungo una linea AB è definita da

$$C = \int_A^B \underline{v}(\underline{r},t)\cdot d\underline{l}$$



Consideriamo il campo di velocità di un corpo rigido che ruoti attorno ad un asse con velocità angolare costante. La circolazione tra due punti AB giacenti nella stessa linea vettoriale sarà

$$\int_A^B \underline{v}\cdot d\underline{l} = \int_0^\theta (\omega r)(r\,d\theta) = \omega r^2\theta$$



La circolazione lungo ACDB sarà invece

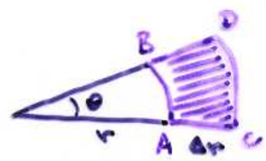
$$\int_A^B \underline{v}\cdot d\underline{l} = \int_A^C + \int_C^D + \int_D^B = \int_C^D \omega(r+\Delta r)(r+\Delta r)\,d\theta$$

$$= \omega(r+\Delta r)^2\theta$$

La circolazione pertanto dipende dalla linea congiungente i due punti! La circolazione lungo la linea chiusa ACDBA sarà

$$C = \omega\theta\left[(r+\Delta r)^2 - r^2\right]$$

Ora l'espressione dell'area racchiusa dalla linea è



$$A = \frac{1}{2}(r+\Delta r)\theta(r+\Delta r) - \frac{1}{2}r\theta r$$

$$= \frac{1}{2}\theta\left[(r+\Delta r)^2 - r^2\right]$$

Si avrà quindi

$$C = 2\omega A$$

Al rapporto C/A si dà il nome di rotore del campo di velocità:

$$\text{rot}\,\underline{v} = 2\omega = \frac{C}{A}$$

Si può vedere che il rapporto C/A è massimo quando la linea chiusa giace nel piano perpendicolare all'asse di rotazione. L'orientazione di rot $\underline{v}$ è data dal verso con cui si calcola la circolazione lungo la linea chiusa e dalla regola del "cavatappi".

In generale pertanto il rotore di un vettore è definito da

$$\text{rot}\,\underline{v} = \max\left\{\lim_{\ell\to 0} \frac{\oint_\ell \underline{v}\cdot d\underline{s}}{\text{Area}}\right\}$$

Notazione:

$$\text{rot}\,\underline{v} = \underline{\nabla}\times\underline{v} = \epsilon_{ijk}\, e_i\, v_{k,j}$$

Espressione cartesiana del vettore rotore

$$\underline{\nabla}\times\underline{v} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

Esempio:

$$\underline{v}(\underline{r}) = (2x - z^2)\underline{i} + (yz - x^2)\underline{j} + (zx - yz)\underline{k}$$

$$\underline{\nabla} \times \underline{v} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 2x - z^2 & yz - x^2 & zx - yz \end{vmatrix} =$$

$$= (-z-y)\underline{i} + (-3z)\underline{j} + (-2x)\underline{k}$$

Proprietà

- Se il circuito di C/A relativo ad un piano è nullo, allora il vettore rotore giace in quel piano.

- Se per un campo vettoriale esistono superfici perpendicolari alle linee di flusso, allora il vettore rotore

  1) o è nullo

  2) o è perpendicolare al vettore del campo relativo allo stesso punto

$$\underline{v} \cdot (\underline{\nabla} \times \underline{v}) = 0$$

- La circolazione del vettore gradiente di una funzione lungo una linea chiusa è nulla.

$$\oint_\ell \underline{\nabla}\varphi \cdot d\underline{\ell} = 0$$

Teorema di Stokes

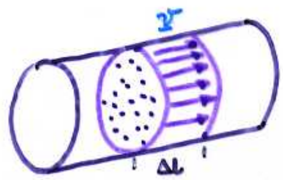
$$\oint_\ell \underline{v} \cdot d\underline{\ell} = \iint_S (\underline{\nabla} \times \underline{v}) \cdot \underline{n} \, dS$$

In un campo vettoriale la circolazione del vettore lungo una linea chiusa è uguale al flusso del vettore rotore attraverso una superficie che ha la linea come contorno!

DIVERGENZA

La quantità d'acqua che passa attraverso una sezione di un tubo nell'unità di tempo è detta flusso

$$\text{flusso} = \frac{\text{volume di fluido che transita}}{\text{tempo}}$$



Per un tubo a sezione costante il flusso sarà

$$\Phi = \frac{S \cdot \Delta l}{\Delta t} = S \cdot v$$

Il flusso del vettore $\underline{v}$ attraverso una superficie S può scriversi in generale come ($\underline{n}$ è la normale alla superficie S)

$$\Phi = \iint_S \underline{v}(\underline{r}, t_0) \cdot \underline{n} \, dS$$

Se si considera un fluido comprimibile, la differenza tra flusso entrante e flusso uscente da un volume V nell'unità di tempo, rappresenta la quantità di fluido accumulata nel volume (o prodotta dal volume).

La quantità di flusso accumulata (prodotta) per unità di tempo ed unità di volume dicesi divergenza del vettore velocità.

$$\text{divergenza}(\underline{v}) = \lim_{V \to 0} \frac{\Phi_{in} - \Phi_{out}}{\text{volume}}$$

Se il flusso attraverso una superficie chiusa non è nullo, ciò significa che nel volume racchiuso dalla superficie si ha o una produzione o un accumulo di flusso o entrambi (sorgenti o pozzi).

Al fine di valutare l'intensità di produzione o di accumulo di flusso: fissiamo un punto P_0, consideriamo una superficie chiusa che lo contenga, facciamo il rapporto tra il flusso attraverso la sua superficie ed il volume racchiuso dalla superficie e facciamo il limite per $V \to 0$.
Tale limite, scalare, è indicato come divergenza del vettore.

$$\operatorname{div} \underline{v} = \lim_{V \to 0} \frac{\oint\!\!\oint_S \underline{v}(P_0, t_0) \cdot \underline{n} \, dS}{V}$$

Notazioni

$$\operatorname{div} \underline{v} = \underline{\nabla} \cdot \underline{v} = v_{i,i}$$

Espressione cartesiana

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{v} = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right] \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

Teorema di Gauss

$$\oint\!\!\oint_S \underline{v} \cdot \underline{n} \, dS = \iiint_V \underline{\nabla} \cdot \underline{v} \, dV$$

PROPRIETA' DEI CAMPI

Se $\quad \text{rot}\, \underline{v} = 0 \quad$ il campo dicesi irrotazionale o conservativo

se $\quad \text{div}\, \underline{v} = 0 \quad$ il campo dicesi solenoidale

se $\quad \begin{cases} \text{rot}\, \underline{v} = 0 \\ \text{div}\, \underline{v} = 0 \end{cases} \quad$ il campo dicesi armonico

$$\hookrightarrow \quad \text{div}(\text{grad}\, \varphi) = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \varphi) = 0$$

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

Equazione di Laplace

Un generico campo vettoriale $\underline{v}$ può sempre scomporsi in una parte irrotazionale ed in una solenoidale:

$$\underline{v} = \text{grad}\, \varphi + \text{rot}\, \underline{w}$$

il potenziale φ si ricava dall'equazione

$$\text{div}(\text{grad}\, \varphi) = \text{div}\, \underline{v}$$

$$\nabla^2 \varphi = \text{div}\, \underline{v}$$

Equazione di Poisson

mentre il potenziale vettore $\underline{w}$ si ricava da

$$\text{rot}\, \underline{w} = \underline{v} - \text{grad}\, \varphi$$