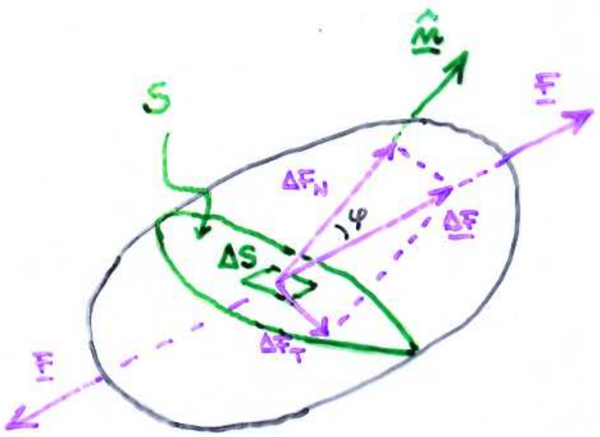
1

TEORIA DELL'ELASTICITÀ E ONDE ELASTICHE

Quando un corpo solido è soggetto a forze esterne (pressione, trazione, flessione, torsione...), si deforma cambiando forma e/o volume. Dicesi solido elastico il solido che al cessare delle forze esterne ritorna alle condizioni di volume e forma originali. Per piccole deformazioni e piccole scale dei tempi (minuti, non milioni di anni), le rocce si possono considerare elastiche.

La teoria dell'elasticità lega le forze applicate sulle superfici esterne di un corpo alle variazioni di forma e/o volume. Tale relazione viene espressa in termini di sforzi e deformazioni.

SFORZI



Consideriamo un corpo soggetto ad una forza di trazione $\underline{F}$ e sia ΔS un elemento di superficie di una generica sezione S del corpo, la cui normale $\underline{n}$ forma un angolo φ con $\underline{F}$. Se indichiamo con $\underline{\Delta F}$ la forza che agisce su ΔS, si definisce sforzo il limite del rapporto

$$\underline{\sigma} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\underline{\Delta F}}{\Delta S} = \frac{d\underline{F}}{dS} = \underline{\sigma}(\hat{n}) \qquad \text{anche TRAZIONE } \underline{T}(\hat{n})$$

Lo sforzo è pertanto una forza per unità di area. La sua unità nel sistema SI è $1\,N\,m^{-2} = 1\,Pa$ (Pascal). Esso può essere scomposto in uno sforzo normale (forza normale alla superficie) ed in uno sforzo tangenziale (forza tangenziale alla superficie): σ_N, σ_T.

CONVENZIONE SUL SEGNO DI σ_{ij}

SFORZI TENSIVI (diretti verso l'esterno del corpo)	POSITIVI +
SFORZI COMPRESSIVI (diretti verso l'interno del corpo)	NEGATIVI −
Componente diretta lungo la direzione positiva di un asse	POSITIVA +
Componente diretta lungo la direzione negativa di un asse	NEGATIVA −

Il segno della componente σ_{ij} è dato dal PRODOTTO DEI SEGNI di cui sopra!

Esempio: La componente di uno sforzo compressivo diretta nel verso negativo di un asse, essendo

$$\ominus \times \ominus = \oplus$$

risulterà POSITIVA!

$1\ N/m^2 = 1\ Pa$

$1\ bar = 10^6\ dyne/cm^2 = 10^5\ Pa$

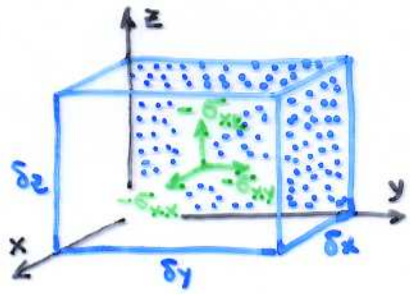
$(10\ bar = 1\ MPa$

$\approx 1\ atm = 760\ mmHg$

$= 750.0616\ mmHg$

$1\ atm = 101325\ Pa$

Lo sforzo tangenziale può a sua volta essere scomposto in due componenti nel piano ΔS perpendicolari tra di loro.



Consideriamo un parallelepipedo di lati $\delta x, \delta y, \delta z$, sottoposto ad una forza esterna. Su ogni faccia gli sforzi si possono scomporre lungo le direzioni x, y, z. Gli sforzi che agiscono sulla faccia posta nel piano y-z sono $-\sigma_{xx}$, $-\sigma_{xy}$, $-\sigma_{xz}$.

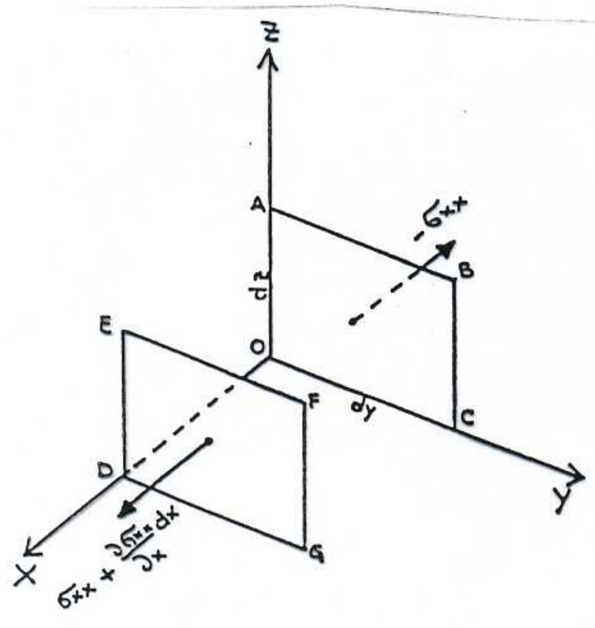
La notazione σ_{xy} si riferisce allo sforzo che agisce nella direzione y sulla faccia che è perpendicolare all'asse x. In questo caso lo sforzo normale è $-\sigma_{xx}$, mentre gli sforzi tangenziali sono $-\sigma_{xy}$, $-\sigma_{xz}$.

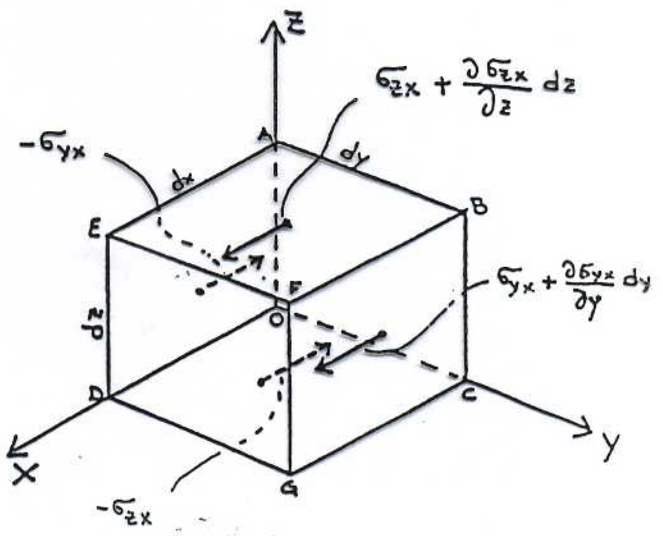
Gli sforzi normali sono considerati positivi quando corrispondono a tensioni (forze dirette verso l'esterno del corpo), e negativi quando corrispondono a pressioni (forze dirette all'interno del corpo).

Equilibrio del parallelepipedo

Affinchè il parallelepipedo si trovi in equilibrio statico (non in moto), è necessario che siano nulle le risultanti delle forze interne ed esterne agenti su di esso e che i momenti risultanti siano nulli. Da notare che sia gli sforzi normali che quelli tangenziali sono funzioni delle coordinate del punto a cui si riferiscono; dovremo pertanto considerare le variazioni degli sforzi, che sono espresse dai differenziali parziali degli sforzi.

Traslazioni: consideriamo le forze interne agenti lungo l'asse x. Il contributo degli sforzi normali è quello relativo alle due facce ortogonali all'asse x.





Per la faccia DEFG lo sforzo è dato da σ_{xx} addizionato del suo incremento lungo l'asse x, dovuto alla distanza dx. La forza agente su DEFG sarà

$$\text{forza} = (\text{sforzo} \times \text{superficie}) = \left[\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx\right] dy\, dz$$

mentre per la faccia ABCO la forza è (segno negativo dovuto alla direzione lungo l'asse x negativo)

$$-\sigma_{xx} \cdot dy\, dz$$

La somma delle forze dovute agli sforzi normali è pertanto

$$-\sigma_{xx}\, dy\, dz + \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx\right) dy\, dz = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\, dx\, dy\, dz$$

Il contributo degli sforzi tangenziali è relativo alle due coppie di facce parallele ad x. Per i lati perpendicolari all'asse y

$$-\sigma_{yx}\, dx\, dz + \left(\sigma_{yx} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} dy\right) dx\, dz = \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y}\, dx\, dy\, dz$$

Mentre per i lati perpendicolari all'asse z

$$-\sigma_{zx}\, dx\, dy + \left(\sigma_{zx} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} dz\right) dx\, dy = \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z}\, dx\, dy\, dz$$

La risultante delle forze agenti lungo l'asse x sarà:

$$\left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz$$

Analogamente, per gli assi y e z otteniamo:

$$\left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} \right) dx\,dy\,dz$$

$$\left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) dx\,dy\,dz$$

Le forze esterne agenti nel parallelepipedo sono quelle dovute alla gravità, che ha accelerazione $\underline{g}$. Se il parallelepipedo ha densità ρ, la forza di gravità agente lungo x sarà

$$\rho\, dV\, g_x = \rho\, dx\,dy\,dz\, g_x$$

Le condizioni di equilibrio che evitano le traslazioni si possono pertanto esprimere nel seguente modo

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + \rho g_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + \rho g_y = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho g_z = 0$$

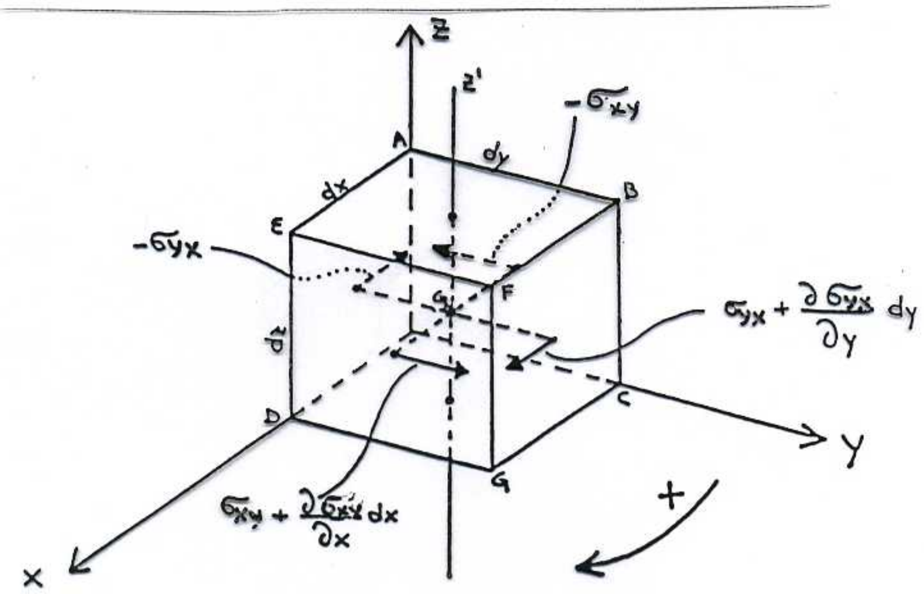
che si possono esprimere in forma tensoriale o vettoriale più semplicemente come

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho g_i = 0$$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{g} = 0$$

Rotazioni: consideriamo le componenti della rotazione attorno ad assi passanti per il baricentro del parallelepipedo e paralleli agli assi x, y e z.

Per un asse parallelo a z gli sforzi che provocano rotazioni sono quelli agenti lungo x e y.



Considerando positivi i momenti che generano una rotazione oraria, avremo per il momento relativo agli sforzi tangenziali paralleli all'asse x (NB: momento = sforzo × superficie × braccio)

$$(-\sigma_{yx})\, dx\, dz \left(-\frac{dy}{2}\right) + \left(\sigma_{yx} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} dy\right) dx\, dz \left(\frac{dy}{2}\right)$$

Analogamente, per gli sforzi paralleli all'asse y sarà:

$$-\left\{(-\sigma_{xy})\, dy\, dz \left(-\frac{dx}{2}\right) + \left(\sigma_{xy} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} dx\right) dy\, dz\, \frac{dx}{2}\right\}$$

Per non avere rotazioni la somma dei momenti deve essere nulla. Trascurando i termini del 4° ordine ($dx^2 dy dz$), si trova

$$(\sigma_{xy} - \sigma_{yx})\, dx\, dy\, dz = 0$$

da cui si deduce

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$$

Risultati analoghi si ottengono per gli altri assi e quindi in genere sarà

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

Il tensore degli sforzi è pertanto un tensore simmetrico ed ha solo 6 componenti indipendenti.

SFORZI DEVIATORI

In profondita' nella Terra sono presenti grandi sforzi compressivi a causa del carico gravitazionale delle rocce sovrastanti. E' talvolta opportuno rimuovere l'effetto di tale carico e considerare solamente lo sforzo rimanente, che chiameremo "deviatorio".
Definendo lo sforzo medio:

$$M = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3 = \sigma_{ii}/3$$

come un terzo della somma degli sforzi normali, ovvero della traccia del tensore degli sforzi, che e' un'invariante (rimane uguale cambiando sistema di riferimento).
Pertanto lo sforzo medio e' anche uguale al terzo della traccia del tensore diagonalizzato

$$M = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$$

Lo sforzo deviatorio D e' definito rimuovendo l'effetto dello sforzo medio:

$$D_{ij} = \sigma_{ij} - M\,\delta_{ij}$$

$$D = \begin{pmatrix} \sigma_{11} - M & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - M & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - M \end{pmatrix}$$

Pertanto, quando gli sforzi principali sono grandi e quasi uguali, il tensore sforzo deviatorio rimuove tale effetto e ci indica lo stato di sforzo residuo. Anche il tensore sforzo deviatorio puo' essere diagonalizzato ed ha gli stessi assi di sforzo principali come il tensore degli sforzi.

Il tenosore sforzo deviatorio e' in genere il risultato delle forze tettoniche e produce fagliazione e talvolta l'anisotropia nella propagazione di onde sismiche.
Per profondita' maggiori di qualche chilometro si assume di frequente che esiste uno stato di sforzi litostatico, per il quale gli sforzi normali sono uguali a meno la pressione dovuta al carico gravitazionale delle rocce soprastanti e gli sforzi deviatori sono uguali a zero.
Poiche' il carico di una colonna di roccia alta z e di densita' ρ vale $\rho g z$, la pressione P ad una profondita' di 3 km sotto una colonna di roccia di densita' 3 g/cm^3 vale:

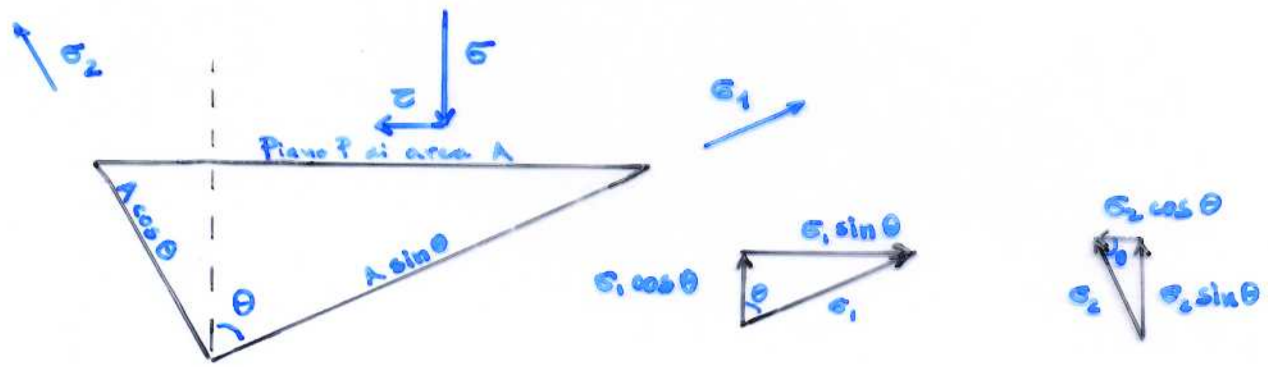
$$P = (3\ \mathrm{g/cm^3})\ (980\ \mathrm{cm/s^2})\ (3 \times 10^5\ \mathrm{cm}) = 9 \times 10^8\ \mathrm{dyn/cm^2} = 0.9\ \mathrm{kbar}$$

La pressione ad una profondita' di 3 km e' pertanto circa 1 kbar o 100 Mpa.
Poiche' esistono anche gli sforzi deviatori (piccoli) la relazione e' solo una (buona) approssimazione.

CERCHIO DEGLI SFORZI DI MOHR

L'ellissoide degli sforzi è poco adatto a rappresentare la relazione tra l'orientazione di un piano e l'intensità degli sforzi normale e tangenziale su di esso. Una comoda rappresentazione grafica bidimensionale dello stato tridimensionale degli sforzi in un punto è dato dai cerchi di Mohr.

Per derivarci lo sforzo normale e tangenziale su un piano, consideriamo un elemento prismatico con due faccie parallele agli sforzi principali σ_1 e σ_2 ($\sigma_1 > \sigma_2$) e con la terza faccia P di area A, la cui normale forma un angolo θ con la direzione di σ_1.



Consideriamo l'equilibrio del prisma nelle direzioni perpendicolare e parallela al piano P! Per l'equilibrio lungo la direzione parallela a P:

$$(\sigma_2 \cos\theta)\underbrace{(A \sin\theta)}_{\text{superficie} \perp \sigma_2} + \tau A = (\sigma_1 \sin\theta)\underbrace{(A \cos\theta)}_{\text{superficie} \perp \sigma_1}$$

da cui

$$\tau = (\sigma_1 - \sigma_2) \sin\theta \cos\theta = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\theta$$

Analogamente, per l'equilibrio lungo la direzione perpendicolare a P:

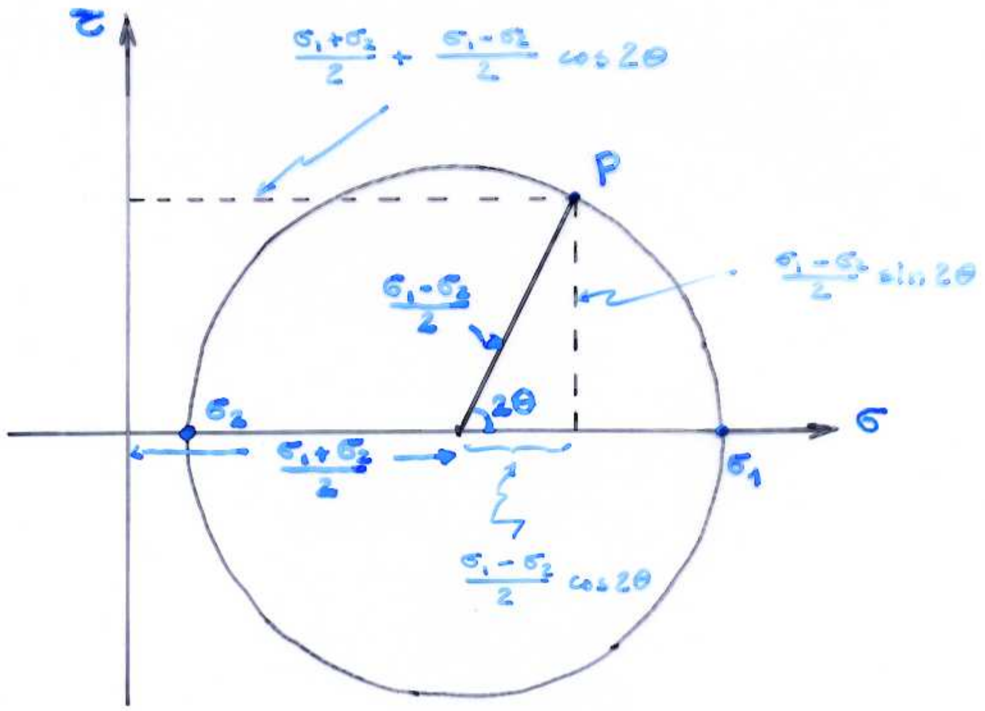
$$\sigma A = (\sigma_2 \sin\theta)(A \sin\theta) + (\sigma_1 \cos\theta)(A \cos\theta)$$

da cui:

$$\sigma = \sigma_1 \cos^2\theta + \sigma_2 \sin^2\theta$$
$$= \tfrac{1}{2}\sigma_1 (1+\cos 2\theta) + \tfrac{1}{2}\sigma_2 (1-\cos 2\theta)$$
$$= \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\cos 2\theta$$

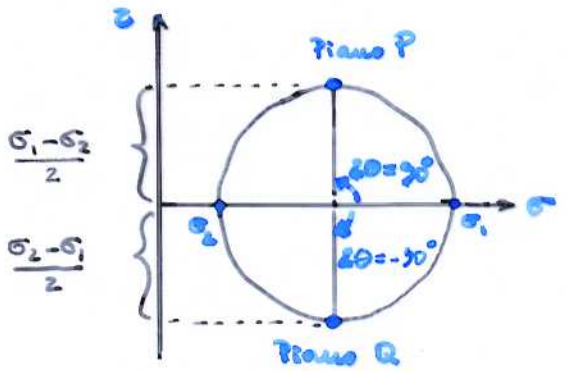
Da queste equazioni possiamo calcolare il valore della componente normale σ e tangenziale τ su un qualunque piano, dati θ, σ_1, σ_2.

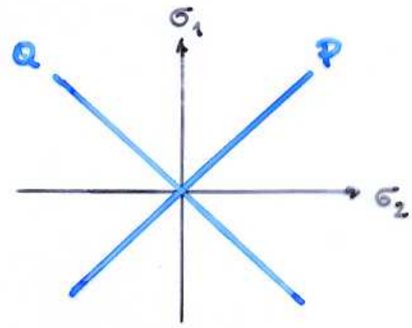
La rappresentazione grafica di questa soluzione (luogo di un numero infinito di punti che rappresentano gli sforzi sui piani con tutti i valori θ possibili) è il CERCHIO DI MOHR



Convenzioni sui segni: gli sforzi compressivi sono positivi (a destra dell'origine), quelli tensionali sono negativi. Sforzi di taglio antiorari o sinistrorsi ($\leftrightarrows$) sono positivi, gli altri negativi.
Gli angoli θ misurati in senso antiorario dalla direzione $\hat{\sigma}_1$ sono positivi.

Lo sforzo tangenziale è massimo su due piani perpendicolari fra di loro, uno si trova a $\theta = 45°$ da σ_1, l'altro a $\theta = -45°$ da σ_1.



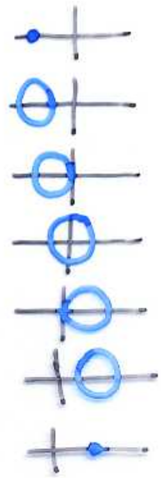


Per ora abbiamo considerato il caso di uno sforzo piano (uno ed uno solo degli sforzi principali è nullo), per cui il tensore degli sforzi (assumendo $\sigma_3 = 0$) sarà:

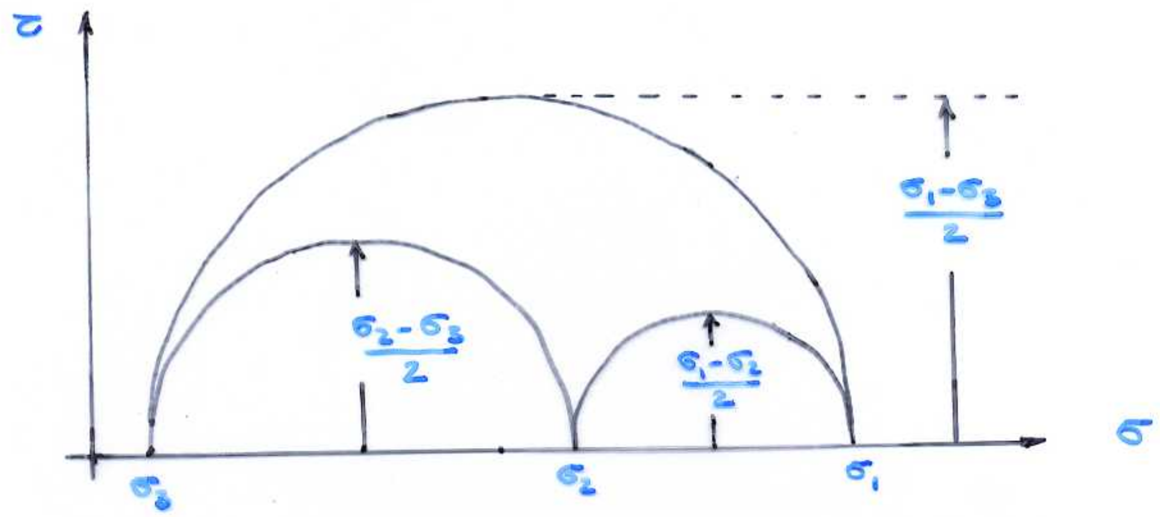
$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ovvero} \quad \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Possibili stati di sforzi bidimensionali e loro rappresentazione

TENSIONE IDROSTATICA	Non verosimile nella Terra	
TENSIONE GENERALE	Possibile vicino alla superficie	
TENSIONE UNIASSIALE	Possibile	
SFORZI DI TAGLIO PURO	Possibile	caso speciale $\sigma_2 = -\sigma_1$
COMPRESSIONE UNIASSIALE	Possibile	
COMPRESSIONE GENERALE	Comune	
COMPRESSIONE IDROSTATICA	Possibile, specie a grandi prof.	



Passando da uno sforzo piano ad uno generale tridimensionale, avremo tre coppie di sforzi principali con cui costruire tre cerchi di Mohr, ognuno descrivente lo stato degli sforzi nel piano contenente gli assi principali corrispondenti.



Per simmetria abbiamo rappresentato solo la parte $\tau > 0$ del grafico. Si può dimostrare che un qualunque punto giacente <u>tra</u> i tre cerchi può rappresentare gli sforzi normale e tangenziale su un certo piano orientato con normale $\hat{n} = (\cos\phi, \cos\beta, \cos\theta)$
Per il piano dS il punto è q!