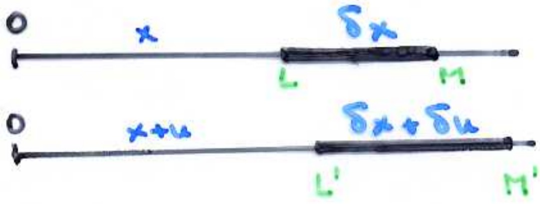
DEFORMAZIONI

Un corpo sottoposto a sforzi cambia la sua forma. Si definisce deformazione il cambio relativo delle dimensioni di un corpo.



Consideriamo uno sforzo agente nella direzione x su un filo elastico.

Il punto L sul filo si muove di una distanza u e si porta al punto L' a sforzo applicato, mentre il punto M si porta al punto M' distante $u+\delta u$.

La deformazione nella direzione x, indicata con e_{xx}, viene definita dal rapporto tra l'allungamento effettivo del segmento e la sua lunghezza originaria:

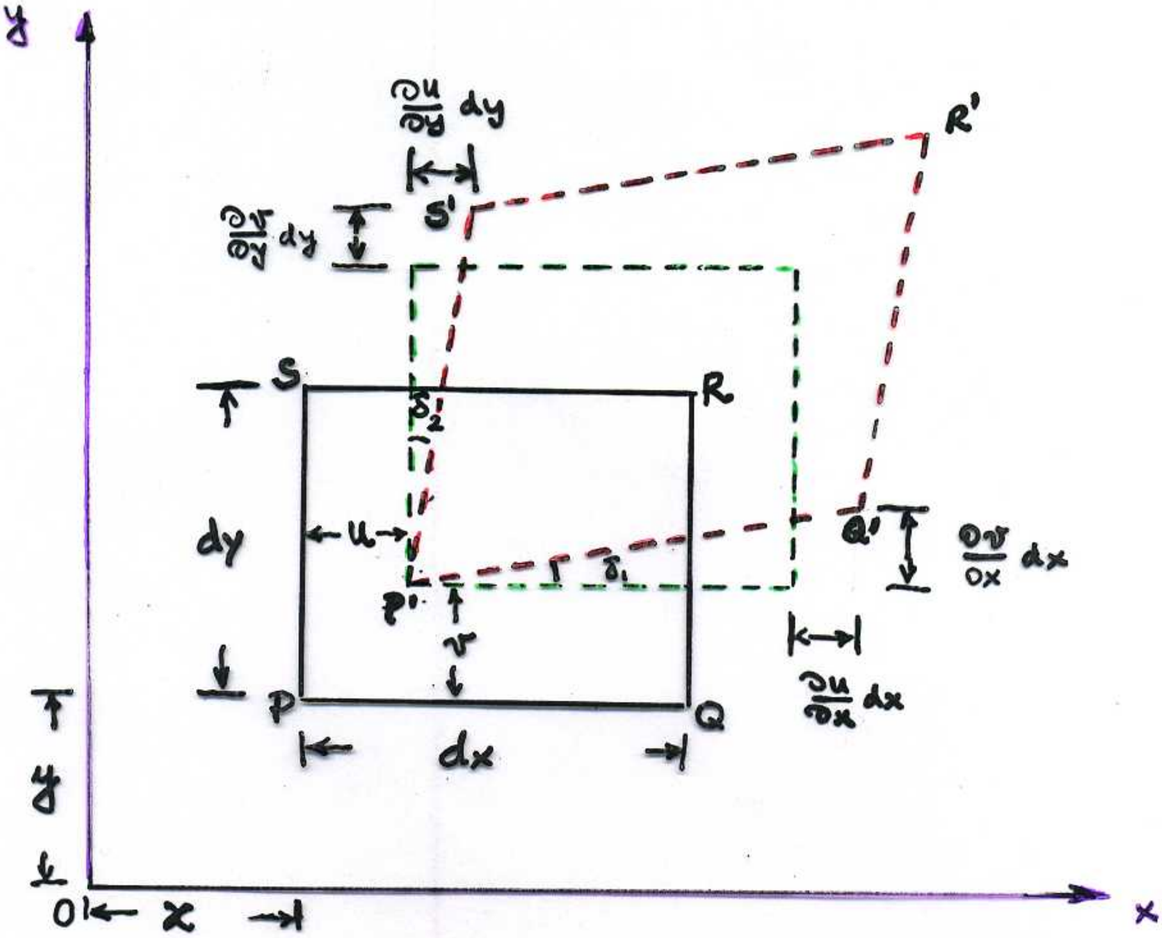
$$e_{xx} = \frac{\text{cambio nella lunghezza di } LM}{\text{lunghezza originaria di } LM}$$

$$= \frac{L'M' - LM}{LM}$$

$$= \frac{\delta x + \delta u - \delta x}{\delta x}$$

$$= \frac{\delta u}{\delta x} \xrightarrow[\lim \delta x \to 0]{} \frac{\partial u}{\partial x}$$

Per estendere l'analisi al caso bidimensionale, consideriamo la deformazioni di un rettangolo PQRS nel piano x-y (vedi figura). I punti P, Q, S si porteranno in P', Q', S' di coordinate



$P\,(x\,,\,y)$ $\qquad$ $P'\,(x+u\,,\,y+v)$

$Q\,(x+dx\,,\,y)$ $\qquad$ $Q'\,\left(x+dx+u+\frac{\partial u}{\partial x}dx\,,\,y+v+\frac{\partial v}{\partial x}dx\right)$

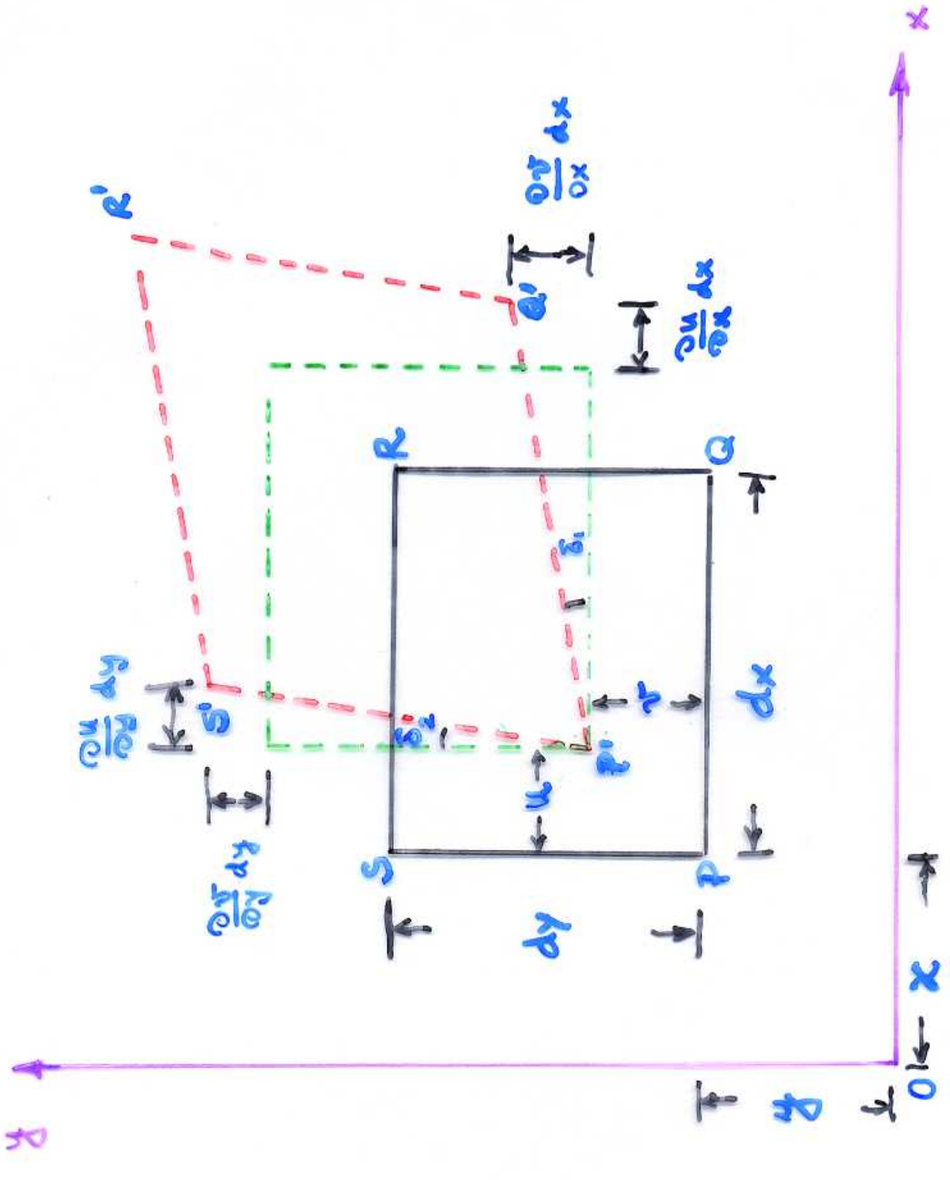
$S\,(x\,,\,y+dy)$ $\qquad$ $S'\,\left(x+u+\frac{\partial u}{\partial y}dy\,,\,y+dy+v+\frac{\partial v}{\partial y}dy\right)$

La deformazione nella direzione x è data da

$$e_{xx} = \frac{\text{allungamento del lato PQ}}{\text{lunghezza originaria di PQ}}$$

$$= \frac{dx + \frac{\partial u}{\partial x}dx - dx}{dx}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}$$



Deformazioni in due dimensioni

Analogamente la deformazione nella direzione y è data da

$$e_{yy} = \frac{\text{allungamento del lato PS}}{\text{lunghezza originaria di PS}} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

Le deformazioni e_{xx} , e_{yy} (ed $e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$ in tre dimensioni) sono dette deformazioni normali.

Il rettangolo però non subisce solo un cambio di grandezza, ma anche un cambio di forma. Il lato PQ è ruotato in senso antiorario di $\delta_1 = \frac{\partial v}{\partial x}$, il lato PS è ruotato in senso orario di $\delta_2 = \frac{\partial u}{\partial y}$ (avendo approssimato gli angoli - in quanto piccoli - dalle rispettive tangenti).

L'angolo rettangolo $\widehat{SPQ}$ diminuisce di $\delta_1 + \delta_2$, denominato angolo di taglio

$$\delta_1 + \delta_2 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

Le quantità che misurano i cambiamenti di forma del corpo sono dette deformazioni di taglio. In tre dimensioni ne esistono sei (e_{ij} con $i \neq j$), ma essendo $e_{ij} = e_{ji}$ solo tre sono indipendenti

$$e_{xy} = e_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$e_{xz} = e_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$e_{yz} = e_{zy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

Notiamo che l'angolo di taglio è uguale al doppio della deformazione di taglio.

Se $\delta_1 \neq \delta_2$ tutto il rettangolo risulta pure ruotato in direzione antioraria attorno all'asse z dell'angolo

$$\theta_z = \frac{1}{2}(\delta_1 - \delta_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

In tre dimensioni avremo

$$\theta_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$\theta_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\theta_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

da cui si nota che $2\underline{\theta} = \underline{\nabla} \times \underline{u}$

~~La deformazione~~ L'allungamento $(\delta u, \delta v, \delta w)$ di un qualunque punto $(\delta x, \delta y, \delta z)$ può essere pertanto espressa - al primo ordine - da

$$\delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\delta z$$

$$\delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\delta y + \frac{\partial v}{\partial z}\delta z$$

$$\delta w = \frac{\partial w}{\partial x}\delta x + \frac{\partial w}{\partial y}\delta y + \frac{\partial w}{\partial z}\delta z$$

Le equazioni si possono scrivere in forma vettoriale (matrici) scindendole in una parte simmetrica (deformazione) e una antisimmetrica (rotazioni)

$$(\delta u, \delta v, \delta w) = \begin{pmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{xy} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{xz} & e_{yz} & e_{zz} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\theta_z & \theta_y \\ \theta_z & 0 & -\theta_x \\ -\theta_y & \theta_x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix}$$

o in forma compatta

$$\delta\underline{u} = (\underline{\underline{e}} + \underline{\underline{\theta}})\,\delta\underline{x}$$

La deformazione è una quantità adimensionale! Generalmente in sismologia la deformazione provocata dal passaggio di un'onda sismica è dell'ordine di 10^{-6}.

Il cambiamento relativo di volume dovuto alla deformazione si dice dilatazione cubica e lo si indica con Δ. Il volume del parallelepipedo originario è

$$V = \delta x \, \delta y \, \delta z$$

Il volume del parallelepipedo deformato è in prima approssimazione $V + \delta V$

$$V + \delta V = (1 + e_{xx})\delta x \, (1 + e_{yy})\delta y \, (1 + e_{zz})\delta z$$

La dilatazione cubica risulta pertanto

$$\Delta = \frac{\text{variazione di volume}}{\text{volume originario}}$$

$$= \frac{V + \delta V - V}{V}$$

$$= \frac{1}{\delta x \, \delta y \, \delta z}\left[(1 + e_{xx})(1 + e_{yy})(1 + e_{zz})\delta x \, \delta y \, \delta z - \delta x \, \delta y \, \delta z\right]$$

Ritenendo solo i termini di primo ordine (i prodotti delle deformazioni si possono trascurare) otteniamo

$$\Delta = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$= \underline{\nabla} \cdot \underline{u}$$

La dilatazione cubica risulta quindi uguale alla divergenza dello spostamento.

RELAZIONE TRA SFORZI E DEFORMAZIONI

Di solito si vuole calcolare la deformazione avendo degli sforzi noti. Hooke propose che, per deformazioni piccole, ogni deformazione è proporzionale allo sforzo che la provoca: è la legge di Hooke, alla base della teoria dell'elasticità. In una dimensione la legge può scriversi

$$\sigma_{xx} = c\, e_{xx}$$

con c costante che dipende dal mezzo. In tre dimensioni ognuna delle sei componenti del tensore degli sforzi può dipendere linearmente dalle sei componenti del tensore delle deformazioni:

$$\sigma_{xx} = c_1 e_{xx} + c_2 e_{xy} + c_3 e_{xz} + c_4 e_{yy} + c_5 e_{yz} + c_6 e_{zz}$$
$$\vdots$$
$$\sigma_{zz} = c_{31} e_{xx} + c_{32} e_{xy} + c_{33} e_{xz} + c_{34} e_{yy} + c_{35} e_{yz} + c_{36} e_{zz}$$

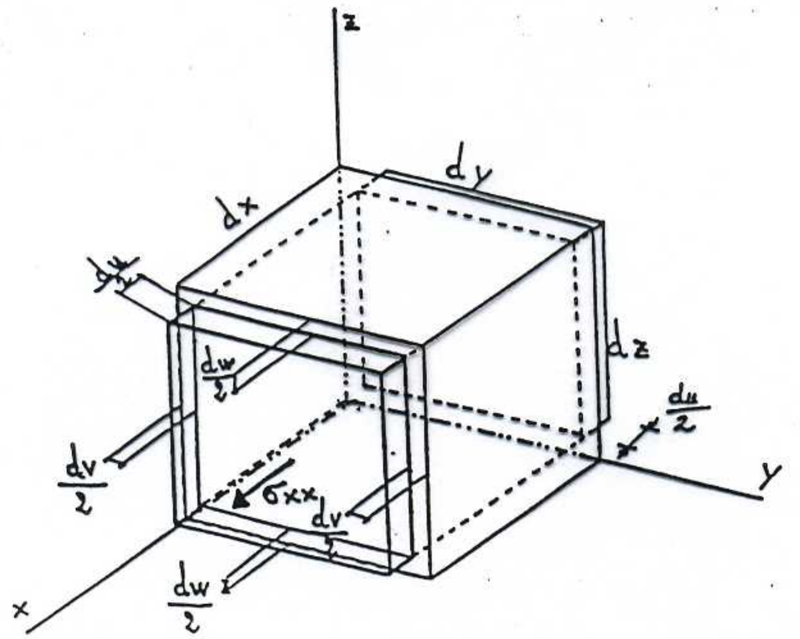
Ci si ritrova con ben 36 costanti, che però si riducono a due, se si considera mezzi isotropi (le cui proprietà non variano con la direzione):

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu) e_{xx} + \lambda e_{yy} + \lambda e_{zz} = \lambda\Delta + 2\mu e_{xx}$$
$$\sigma_{yy} = \lambda\Delta + 2\mu e_{yy}$$
$$\sigma_{zz} = \lambda\Delta + 2\mu e_{zz}$$
$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = 2\mu e_{xy}$$
$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx} = 2\mu e_{xz}$$
$$\sigma_{yz} = \sigma_{zy} = 2\mu e_{yz}$$

o in notazione tensoriale

$$\sigma_{ij} = \lambda\Delta\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}$$

con δ_{ij} tensore unitario ($\delta_{ij} = 1$ per $i=j$; $\delta_{ij} = 0$ per $i \neq j$).

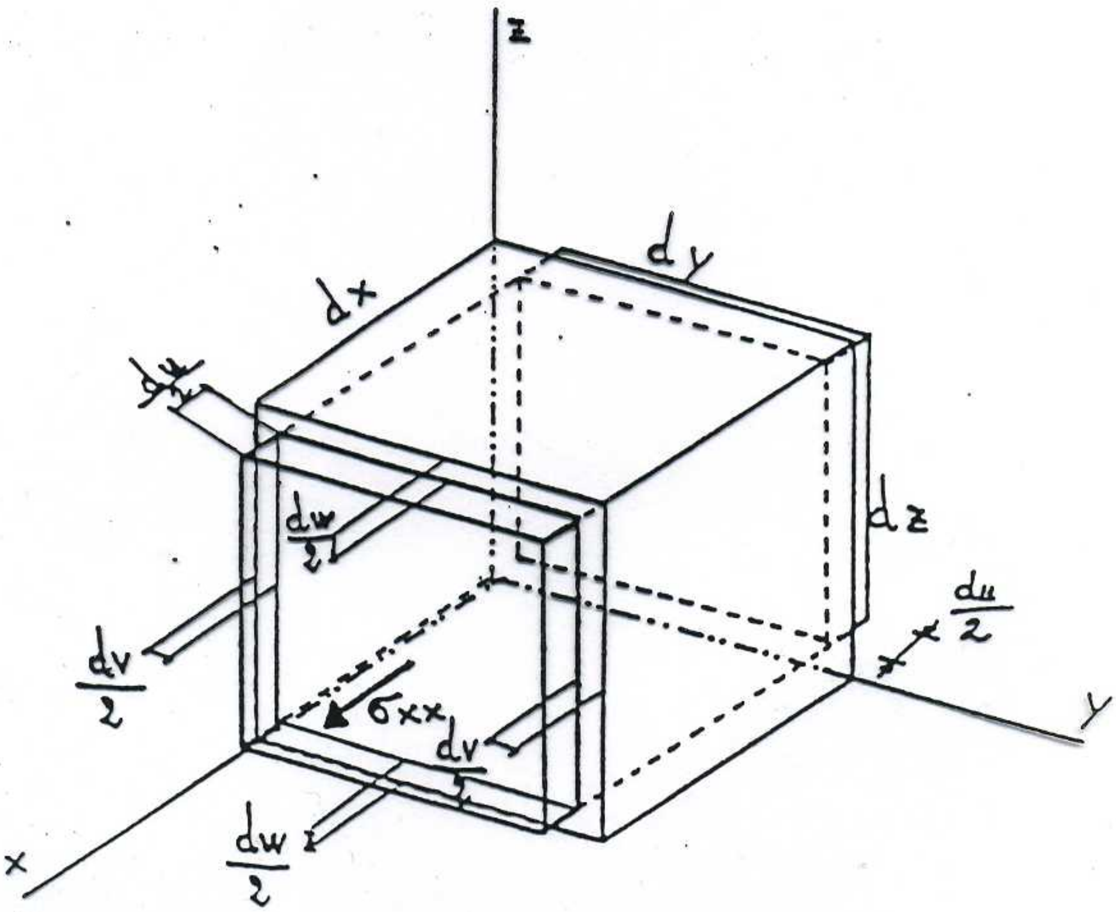


Le costanti λ e μ sono note col nome di costanti di Lamè.
La costante μ ($\mu = \sigma_{xy}/2e_{xy}$) da una misura della resistenza di un corpo a sforzi di taglio e viene detta modulo di taglio o modulo di rigidità. Chiaramente il modulo di taglio per un liquido o gas risulta nullo.

Oltre alle costanti di Lamè si usano pure ~~altre~~ costanti: il modulo di Young, il rapporto di Poisson ed il modulo di incompressibilità.

Modulo di Young

Consideriamo un solido elastico sottoposto ad uno sforzo tensionale lungo un'unica direzione (vedi figura sopra!). In tal caso ci sarà una proporzionalità diretta tra sforzo applicato e la deformazione lineare. Il modulo di Young E è definito come rapporto tra lo sforzo tensionale e la corrispondente deformazione longitudinale. Se applichiamo uno sforzo σ_{xx} , avremo un allungamento du lungo l'asse x ed accorciamenti dv e dw lungo y e z.


z
dx
dy
dz
$\frac{du}{2}$
y
$\frac{dw}{2}$
$\frac{dv}{2}$
σ_{xx}
$\frac{dv}{2}$
$\frac{dw}{2}$
x

L'allungamento du è proporzionale allo sforzo σ_{xx}, alla lunghezza dx ed inversamente proporzionale alla resistenza del materiale:

$$du = \frac{\sigma_{xx}\, dx}{E}$$

da cui

$$E = \frac{\sigma_{xx}}{e_{xx}}$$

Per ottenere la relazione tra E e le costanti di Lamè λ e μ esprimiamo σ_{xx} e e_{xx} in termini di λ e μ. Poichè solo σ_{xx} è diverso da zero

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \lambda\Delta + 2\mu e_{xx} \\ 0 &= \lambda\Delta + 2\mu e_{yy} \\ 0 &= \lambda\Delta + 2\mu e_{zz} \\ 0 &= e_{xy} = e_{xz} = e_{yz} \end{aligned}$$

Sommando le prime tre equazioni

$$\sigma_{xx} = 3\lambda\Delta + 2\mu\Delta$$

Sostituendo tale espressione di σ_{xx} nella prima equazione:

$$3\lambda\Delta + 2\mu\Delta = \lambda\Delta + 2\mu e_{xx}$$

si ottiene

$$e_{xx} = (\lambda+\mu)\frac{\Delta}{\mu}$$

Pertanto il modulo di Young risulta

$$E = \frac{\sigma_{xx}}{e_{xx}} = \frac{(3\lambda+2\mu)\Delta\mu}{(\lambda+\mu)\Delta} = \frac{(3\lambda+2\mu)\mu}{\lambda+\mu}$$

Il modulo di Young (come del resto λ e μ) ha le dimensioni di uno sforzo ed assume valori relativamente grandi, dell'ordine di 10^{10} Pa.

Rapporto di Poisson

Il parallelepipedo sottoposto a sforzo assiale σ_{xx} si allunga lungo x, ma si contrae di dv e dw lungo y e z. La contrazione sarà proporzionale alla deformazione assiale e_{xx} ed alla lunghezza del corpo nella direzione di contrazione. Per z avremo:

$$-dw = -\frac{\partial w}{\partial z}dz = \sigma\, e_{xx}\, dz$$

da cui si vede che il coefficiente di proporzionalità σ - coefficiente o rapporto di Poisson - è definito dal rapporto tra la deformazione che avviene ortogonalmente allo sforzo assiale e la deformazione assiale

$$\sigma = -\frac{e_{zz}}{e_{xx}}$$

Poichè per uno sforzo assiale (vedi pagina precedente) abbiamo

$$e_{xx} = (\lambda+\mu)\,\Delta/\mu$$
$$e_{zz} = -\lambda\Delta/2\mu$$

l'espressione del rapporto di Poisson in termini di costanti di Lamé risulta

$$\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$$

Chiaramente σ risulta adimensionale e compreso tra zero e 0,5. Per i liquidi ($\mu=0$) $\sigma = 0.5$, mentre per rocce molto compatte $\sigma = 0.05$. Il valore medio per le rocce è $\sigma = 0.25$ che corrisponde all'ipotesi $\lambda = \mu$, chiamata relazione di Poisson.

Modulo di incompressibilità (Bulk modulus)

Consideriamo un corpo soggetto a pressione idrostatica (e.g. corpo immerso in un liquido): il rapporto tra la pressione e la compressione (= dilatazione cubica negativa!) è detto modulo di incompressibilità K. Per una pressione idrostatica:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -p$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$$

Per cui

$$\lambda\Delta + 2\mu e_{xx} = -p$$
$$\lambda\Delta + 2\mu e_{yy} = -p$$
$$\lambda\Delta + 2\mu e_{zz} = -p$$

Sommando le tre equazioni

$$3\lambda\Delta + 2\mu\Delta = -3p$$

Per cui

$$K = \frac{\text{pressione}}{\text{compressione}} = \frac{\text{pressione}}{-\text{dilatazione}}$$

$$= \frac{p}{-\Delta} = \lambda + \frac{2}{3}\mu$$

K rappresenta la resistenza opposta da un materiale ad un aumento della pressione idrostatica.

Il modulo di Young, il modulo di incompressibilità e i parametri di Lamè sono tutti positivi, con unità $N m^{-2} = Pa$ e con valori (per le rocce) generalmente tra 20 e 120 GPa.