CAMPO DI GRAVITÀ

Introduzione

Il campo gravitazionale della Terra riflette il tipo di distribuzione delle masse all'interno del nostro pianeta ed è strettamente legato alla forma della Terra.

L'attrazione gravitazionale tra due oggetti (puntiformi) con massa M ed M_0 ad una distanza r è data dalla

$$\underline{F} = G \frac{M M_0}{r^2} \hat{r}$$

in cui $G = 6.67 \times 10^{-11}\, m^3 kg^{-1} s^{-2}$ è la costante di gravitazione universale. La forza per unità di massa

$$\underline{g} = \frac{\underline{F}}{M_0} = \frac{GM}{r^2} \hat{r}$$

ci dà l'accelerazione di un oggetto in caduta libera diretto verso M, che chiameremo semplicemente gravità.

La gravità dovuta a varie masse è la somma vettoriale nel punto di misura r_m delle gravità dovute alle singole masse nei punti r_s

$$g(\underline{r}_m) = \sum_s \underline{g}_s = \sum_s G M_s \frac{\underline{r}_s - \underline{r}_m}{(|\underline{r}_s - \underline{r}_m|)^3} = \int_V G \rho \frac{\underline{r}_s - \underline{r}_m}{(|\underline{r}_s - \underline{r}_m|)^3} dV_s$$

NB: In fisica di solito $\hat{r}$ è diretto dalla massa M allo osservatore, per cui nelle espressioni date ci vorrebbe un segno meno. In geofisica però è conveniente definire l'accelerazione di gravità diretta verso il centro della Terra come positivo.

POTENZIALE GRAVITAZIONALE

Una via indiretta per rappresentare il campo di gravità è di usare il potenziale, che per una sorgente puntiforme di massa M è

$$U = \frac{GM}{r}$$

e la gravità si ottiene mediante il suo gradiente

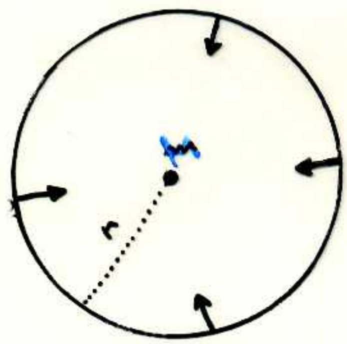
$$\underline{g} = \underline{\nabla} U$$

(ad es. $g_z = \frac{\partial U}{\partial z}$). NB: nella convenzione dei fisici ci vorrebbe un segno meno anche qui!

Poiché ammette potenziale, il campo gravitazionale è conservativo:

$$\underline{\nabla} \times \underline{g} = 0$$

Consideriamo il flusso di gravità attraverso una superficie sferica centrata sulla massa puntiforme! Per simmetria la gravità è la stessa in ogni punto della superficie, per cui



$$\oint_S \underline{g} \cdot d\underline{S} = (4\pi r^2) \cdot g = 4\pi r^2 \frac{GM}{r^2} = 4\pi G \cdot M$$

Qualunque sia la superficie, avremo lo stesso risultato! Tale legge è detta LEGGE DI GAUSS ed è equivalente alla $g = GM/r^2$!

Considerando il flusso per unità di volume - la divergenza - ovvero il teorema di Gauss $\oint_S \underline{g} \cdot \underline{n}\, dS = \int_V \underline{\nabla} \cdot \underline{g}\, dV$, avremo

$$\int_V \underline{\nabla} \cdot \underline{g}\, dV = 4\pi G \int_V \rho\, dV$$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{g} = 4\pi G \rho$$

da cui, sostituendo $g = \nabla U$ si ottiene l'equazione di Poisson

$$\nabla^2 U = 4\pi G \rho$$

CAMPO DI FORZE NEWTONIANO

La legge di Gauss implica che il potenziale gravitazionale all'esterno di un corpo esteso (sfera) con massa totale M è uguale a quello dovuto ad una massa puntiforme posta al baricentro del corpo esteso.
Pertanto, se la Terra fosse esattamente sferica e non rotante con una distribuzione di densità dipendente solo dal raggio $\rho = \rho(r)$, il potenziale gravitazionale esterno sarebbe semplicemente

$$U = \frac{GM}{r}$$ Potenziale Newtoniano

con r distanza dal centro della Terra ed M la massa della Terra.
La gravità avrebbe valore uguale su ogni punto della superficie terrestre. Il valore dell'accelerazione di gravità però varia sulla superficie terrestre - sebbene meno di un centesimo - con un valore medio di circa $9.8\ m\,s^{-2}$ ($980\ cm\,s^{-2} = 980\ gal$).

La Terra reale infatti differisce dall'essere sferica di un trecentesimo. Essa risulta schiacciata ai poli e rigonfia nella zona equatoriale, molto simile ad un ellissoide di rotazione.

Lo schiacciamento della Terra è dato da

$$f = \frac{a-b}{a}$$

con a e b i raggi equatoriale e polare, rispettivamente.
Il valore più recente di f è dato da $f = 1/298.247$.
Il raggio dell'ellissoide di rotazione è dato (al primo termine in f) da

$$r = a(1 - f\sin^2\varphi)$$

con φ latitudine. $a = 6378.14\ km$ $b = 6356.75\ km$

Deviazioni dalla simmetria sferica

Anche la deviazione del campo gravitazionale esterno dal potenziale Newtoniano è dell'ordine del trecentesimo e meno ancora. Già prima dell'avvento dei satelliti artificiali si era riusciti (con misure terrestri) a determinare la prima correzione J_2 alla parte Newtoniana del campo gravitazionale

$$U = \frac{GM}{r}\left[1-\left(\frac{a}{r}\right)^2 J_2 P_2(\cos\theta)\right]$$

con

$$J_2 = \frac{C-\bar{A}}{Ma^2}$$

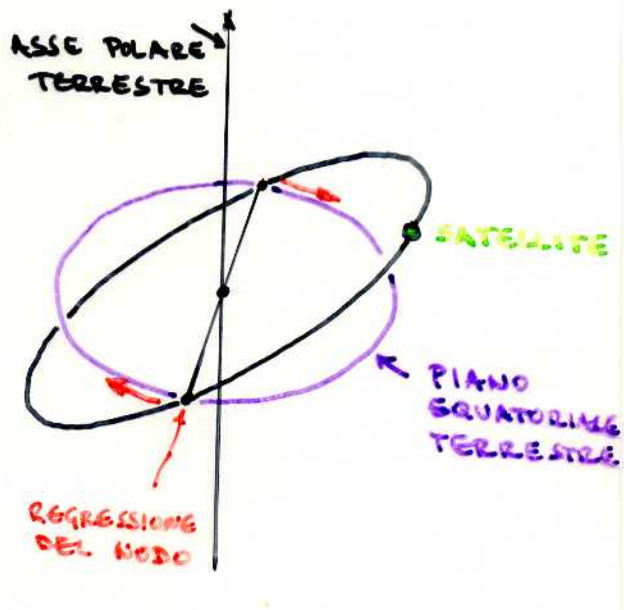
C = momento d'inerzia rispetto all'asse polare

$\bar{A}$ = momento d'inerzia medio rispetto gli assi equatoriali

$P_2(\cos\theta) = \frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}$ è il secondo polinomio di Legendre e θ è la colatitudine: $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$

Il valore attuale di $J_2 = 1082{,}65 \times 10^{-6}$

J_2 misura la deviazione del campo gravitazionale reale della Terra dalla simmetria sferica. Il suo contributo fà sì che un satellite artificiale ruoti attorno alla Terra su un piano orbitale che ruota a sua volta con moto retrogrado, pur restando la sua inclinazione rispetto al piano equatoriale terrestre: regressione dell'orbita



Caso generale.

Il potenziale gravitazionale può essere sviluppato in funzioni sferiche, le cosiddette autofunzioni della sfera (somme di seni e coseni, raggruppate in certo modo, delle variabili latitudine e longitudine).

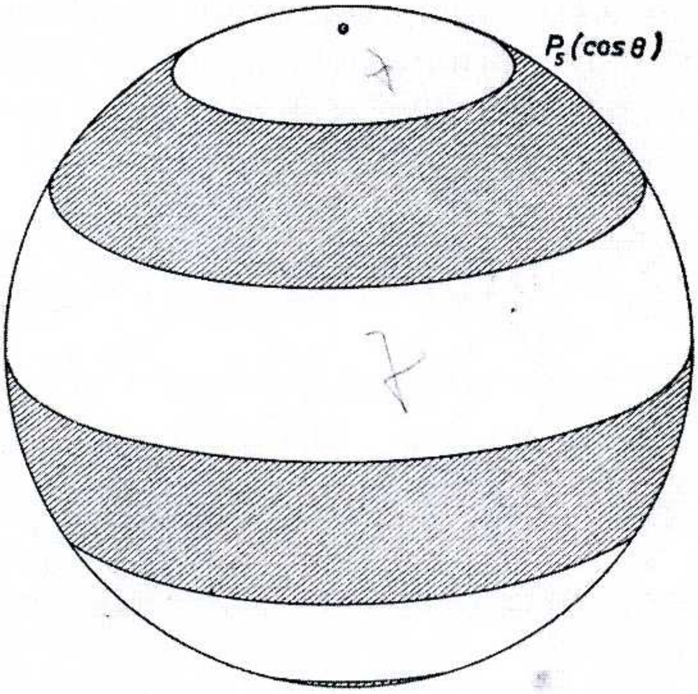
$$U = \frac{GM}{r}\left\{1 - \sum_{2}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{n} J_n P_n(\cos\theta) + \sum_{2}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{a}{r}\right)^{n} P_n^m(\cos\theta) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left[A_{nm}\cos m\lambda + B_{nm}\sin m\lambda\right]\right\}$$

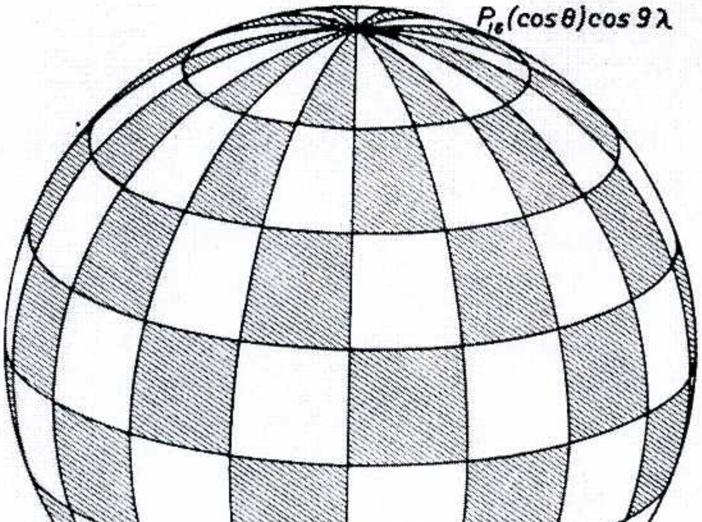
con $P_n^m(\cos\theta)$ i polinomi associati di Legendre (di ordine n rispetto a $\cos\theta$ e $\sin\theta$) e J_n, A_{nm}, B_{nm} sono i momenti gravitazionali (da determinare sperimentalmente).

Da notare che: termini di primo ordine in θ $(n=1)$ non compaiono, avendo scelto il baricentro della Terra come origine del sistema di riferimento!

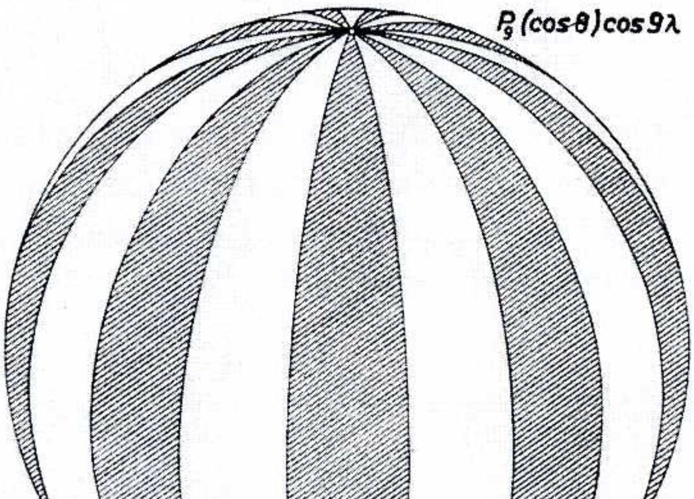
Già agli inizi degli anni '60 erano noti una decina di momenti zonali J_n (che generano perturbazioni secolari nelle orbite dei satelliti artificiali) e alcune decine di momenti tesserali A_{nm}, B_{nm} che suscitano invece variazioni periodiche di breve durata.


$P_5(\cos\theta)$

(a)


$P_{18}(\cos\theta)\cos 9\lambda$

(b)


$P_9(\cos\theta)\cos 9\lambda$

(c)

Deviazione della Terra dall'equilibrio idrostatico

Per una Terra esattamente in equilibrio idrostatico (non esistono cioè tensioni tangenziali), il potenziale gravitazionale sarebbe

$$U = \frac{GM}{r}\left[1 - \left(\frac{a}{r}\right)^2 J_2 P_2(\cos\theta) - \left(\frac{a}{r}\right)^4 J_4 P_4(\cos\theta) - \dots\right]$$

con presenti solo i numeri zonali pari J_{2n}. Inoltre i valori di J_{2n} dovrebbero decrescere rapidamente al crescere di n con

$$J_{2n} \sim \left(\frac{1}{300}\right)^n$$

Se così fosse il termine correttivo successivo a J_2 sarebbe J_4. Da misure da satelliti si è però giunti alla conclusione che tutti i momenti gravitazionali, a cominciare da J_3, sono circa dello stesso ordine ed uguali a qualche unità per 10^{-6}: dell'ordine del quadrato dello schiacciamento f^2. Inoltre la diminuzione dei momenti al crescere di n è molto lenta.

La deviazione della Terra dall'equilibrio idrostatico è pertanto dell'ordine del quadrato dello schiacciamento!

Ne segue che nella Terra, oltre alla tensione idrostatica, agiscono anche tensioni tangenziali, le quali sono dell'ordine di qualche MPa.

La forma della Terra differisce da quella idrostatica: lo spessore dello strato in equilibrio è $\sim f^2 a = 70\,m$.

Momento d'inerzia

Per lo studio della struttura interna della Terra è di grande interesse il valore del momento d'inerzia medio

$$I = \frac{A+B+C}{3} \approx \frac{C+2\bar{A}}{3}$$

il quale, assieme al valore della densità media della Terra,

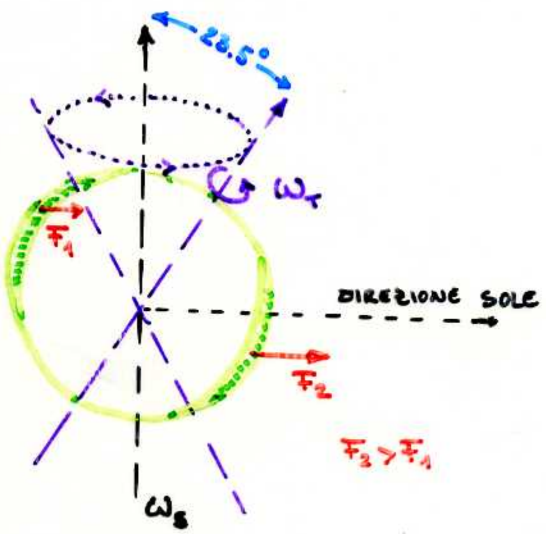
$$\rho_0 = \frac{3M}{4\pi a^2 b}$$

ed i dati sismologici, permette di determinare la distribuzione di densità all'interno della Terra.

Per determinare I occorre conoscere, oltre a J_2, qualche altra grandezza legata ai momenti d'inerzia A e C. Un'informazione adatta ci viene dall'astronomia, i cui metodi permettono di determinare la costante di precessione dell'asse terrestre

$$H = \frac{C-\bar{A}}{C} \qquad H = 0.0032732$$

La precessione dell'asse terrestre è l'interazione tra la rotazione terrestre ω_T e la rivoluzione attorno al Sole ω_S, le quali avvengono secondo due assi inclinati di circa 23.5° l'uno rispetto all'altro. Il non parallelismo tra i due assi, unitamente allo schiacciamento terrestre, genera un momento torcente che tenderebbe a renderli paralleli, dando luogo al fenomeno della precessione degli equinozi (T ≈ 26.000 anni!).



Per un pianeta a densità costante (sfera omogenea) il momento adimensionale d'inerzia risulterebbe

$$I^* = \frac{I}{MR^2} = 0.4$$

Se la densità all'interno del pianeta cresce dall'esterno verso l'interno, I^* assume valori inferiori a 0.4; viceversa se la densità diminuisce con la profondità, esso avrà un valore superiore a 0.4

In base alle osservazioni per la Terra risulta $I^* = 0.33076$, cui corrisponde ad una notevole concentrazione della massa terrestre nelle zone centrali del pianeta.

Cause di crescita della densità con la profondità:

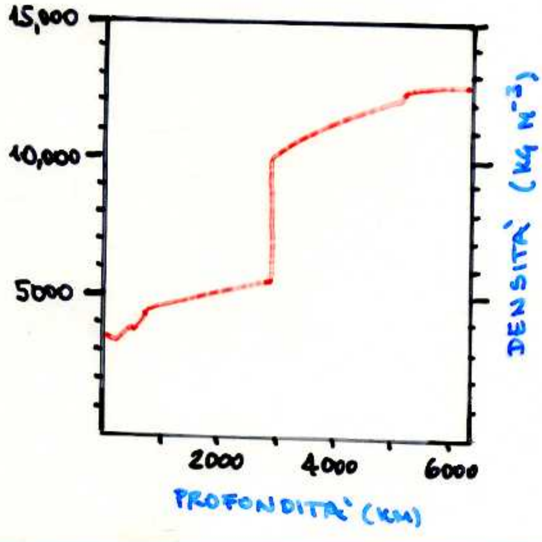
1) compressione dovuta agli strati sovrastanti
2) aumento con la profondità degli elementi pesanti
3) possibili transizioni di fase ad alta pressione

Cause di diminuzione della densità con la profondità:

1) aumento della temperatura verso l'interno della Terra
2) fusione (parziale) con separazione dei componenti a densità minore.

Chiaramente sono più efficaci le cause di crescita della densità con la profondità.

Nel caso di forti inversioni di densità, sulla regione a bassa densità agirebbe la cosiddetta "spinta di Archimede" (confronta un turacciolo sott'acqua!) che riporterebbe le regioni a densità elevata sotto quelle a bassa densità.



POTENZIALE DI ROTAZIONE E POTENZIALE TOTALE

Per una Terra che ruota attorno al proprio asse con velocità angolare ω, occorre considerare pure la forza centrifuga, data per un punto a distanza r dall'asse di rotazione $\underline{\omega}$, da

$$\underline{F} = \omega^2 \underline{r} \cdot m$$

Il campo di forze è conservativo ed il relativo potenziale è dato da

$$U_R = \frac{1}{2} \omega^2 r^2$$

L'accelerazione gravitazionale totale agente su un corpo sarà pertanto minore di quella agente su un corpo posto su una Terra non ruotante

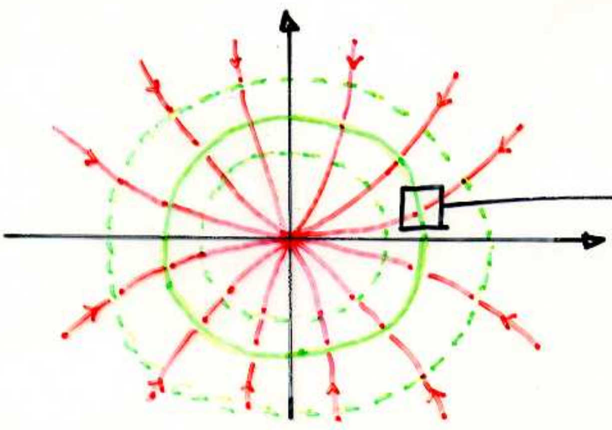
$$g = g_N - \omega^2 a \cos^2 \varphi$$

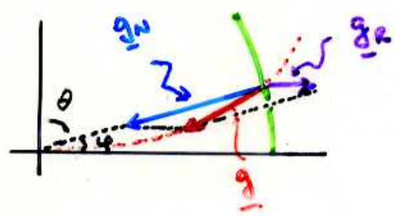
Il potenziale totale di gravità sarà pertanto dato dalla somma del potenziale del campo di forze newtoniane e da quello del campo di forze centrifughe

$$U = U_N + U_R$$

$$= \frac{GM}{r} [1 - \dots] + \frac{1}{2} \omega^2 a^2 \sin^2 \theta$$

La concavità delle linee di forza del campo totale è rivolta verso l'asse di rotazione e le superfici equipotenziali la forma ellissoidica chiusa (fino a una distanza di circa 5-6 a)





ELLISSOIDE DI RIFERIMENTO

Se la Terra fosse una massa fluida con densità che aumenta con la profondità e ruotante attorno all'asse polare, avrebbe la forma di un ellissoide di rotazione. La sua superficie inoltre, essendo liquida, è necessariamente una superficie equipotenziale. Tale ellissoide dà la superficie equipotenziale di un modello della Terra sferoidale con variazioni radiali realistiche della densità e con un potenziale centrifugo e viene chiamato ellissoide di riferimento. La forza di gravità è ovunque perpendicolare alla sua superficie e può essere calcolata matematicamente.

La formula adottata dall' International Association of Geodesy nel 1967 è:

$$g(\varphi) = g_e \left(1 + \alpha \sin^2\varphi + \beta \sin^4\varphi\right)$$

ove

$g_e = 978.03185$ gal $\qquad \alpha = 5.278895 \times 10^{-3} \qquad \beta = 2.3462 \times 10^{-5}$

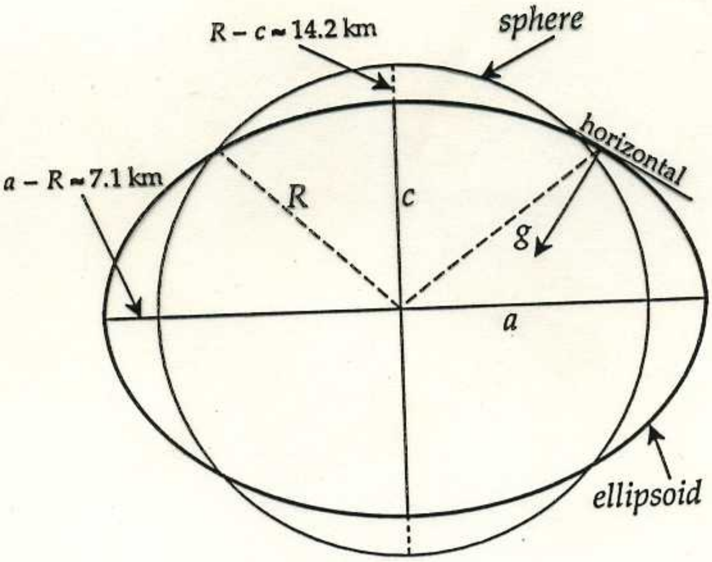
Circa il 40% della variazione della gravità con la latitudine è dovuta alla differenza tra ellissoide e sfera (allo schiacciamento cioè), mentre il 60% è dovuto alla rotazione terrestre.

L'errore massimo della formula è di 4 μgal.

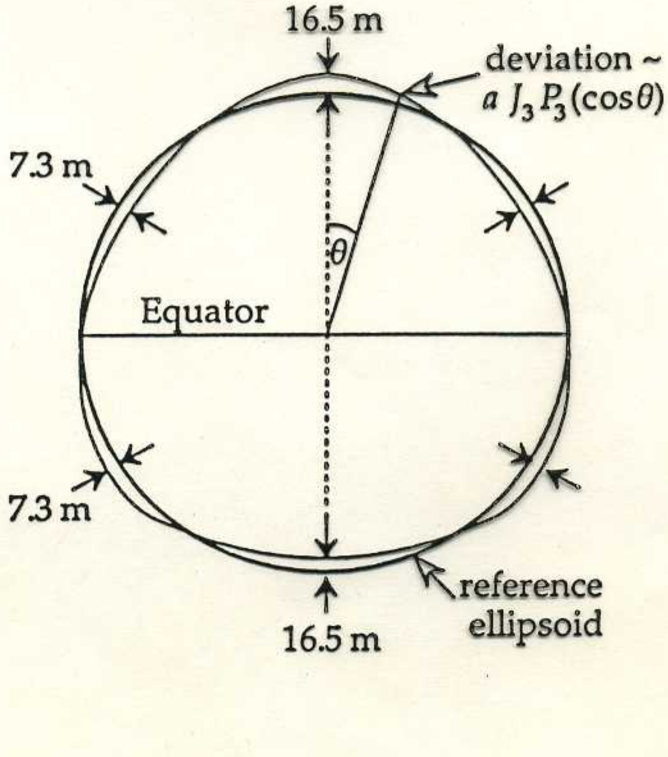
La gravità calcolata con questa formula costituisce la cosiddetta gravità normale.

Table 3.1 Standard gravity values at various latitudes.

Latitude	γ	*Latitude*	γ
0°	978.03185	50°	981.06948
5°	978.07107	55°	981.50655
10°	978.18755	60°	981.91695
15°	978.37780	65°	982.28813
20°	978.63611	70°	982.60872
25°	978.95472	75°	982.86890
30°	979.32402	80°	983.06068
35°	979.73289	85°	983.17816
40°	980.16897	90°	983.21773
45°	980.61905		



$$a = 6378.136 \text{ km}$$
$$c = 6356.751 \text{ km}$$
$$R = 6371.000 \text{ km}$$



La determinazione delle quattro costanti necessarie per calcolare la gravità normale sono:

$a = 6378.14$ km $\qquad \omega = 0.7292115 1 \times 10^{-4}\ s^{-1}$

$f = 1/298.247 \qquad GM = 398.603 \times 10^{9}\ m^3 s^{-2}$

Inoltre, tali parametri sono legati da varie relazioni:

① $f + f^* = \frac{5}{2} m$ TEOREMA DI CLAIRAUT

$$f^* = \frac{g_p - g_e}{g_e}$$ "schiacciamento gravimetrico"

$$m = \frac{\omega^2 a}{g_e} = \frac{\omega^2 a^3}{GM}$$ $\frac{\text{acceler. centrifuga all'equatore}}{\text{gravità all'equatore}}$

② $GM = a b g_e \left(1 + \frac{3}{2} m\right)$

③ $f = \frac{3}{2} J_2 + \frac{1}{2} m$

Come già detto, il valore di J_2 viene calcolato oggigiorno con i dati ottenuti dall'osservazione del periodo di regressione dell'orbita dei satelliti artificiali.

Il valore di GM viene invece calcolato osservando distanze e periodi di rivoluzione sia di satelliti artificiali che quelli relativi all'orbita lunare.

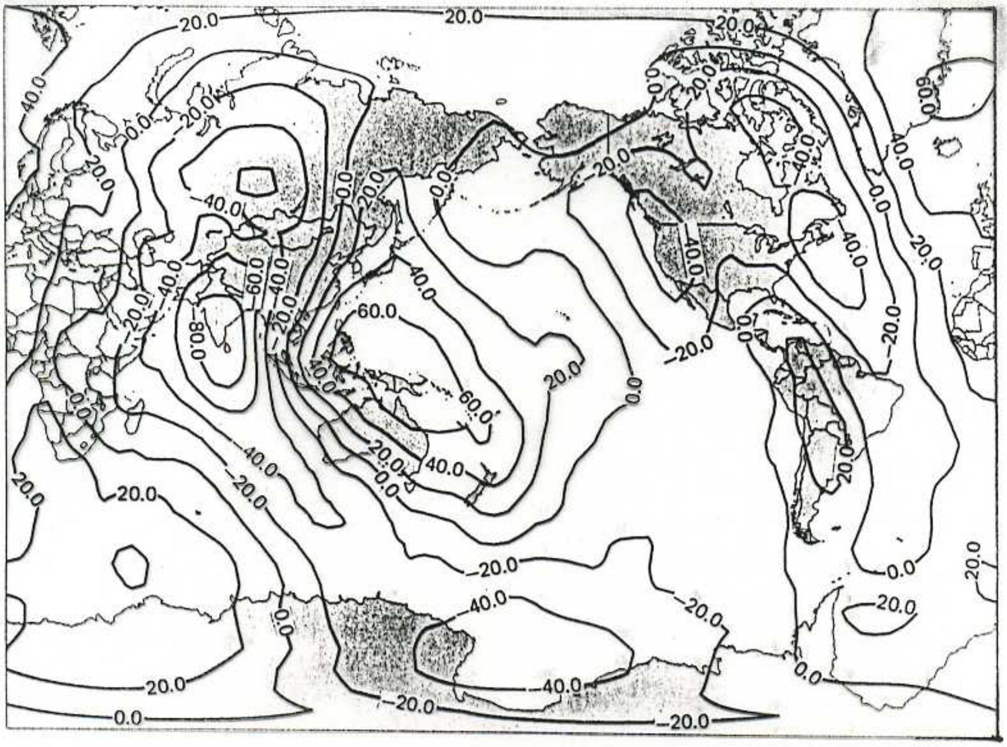
IL GEOIDE

La Terra non è né una sfera perfetta, né un ellissoide di rotazione perfetto. Montagne e fosse oceaniche ad esempio costituiscono deviazioni di vari chilometri. Pertanto la superficie equipotenziale che delimita la massa della Terra, detta geoide, si discosta - sebbene di poco - da quella dell'ellissoide di riferimento. Sopra gli oceani il geoide coincide con il livello medio del mare, mentre sopra i continenti esso può essere visualizzato dal livello medio su cui si disporrebbe l'acqua in una rete di stretti canali scavati attraverso i continenti.

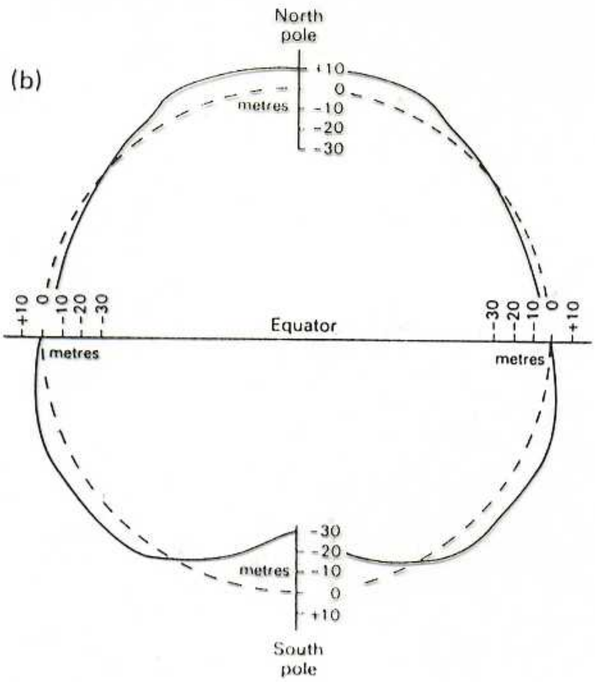
Il geoide è la superficie di riferimento per la navigazione, i rilevamenti, l'altimetria. La "verticale" in un dato luogo non punta "verso il centro della Terra", ma è perpendicolare alla superficie equipotenziale locale, e, se non troppo lontano dal livello del mare, è perpendicolare al geoide.

I dettagli sulla figura del geoide derivano da dati di satelliti, in particolar modo da misure di altimetria da radar. Le misure hanno definito il geoide marino con un'accuratezza di circa 10 cm. Inoltre le misure da satellite e gravimetriche concordano meglio di ± 50 cm, indicando che la teoria e le assunzioni sono corrette.

(a)



(b)

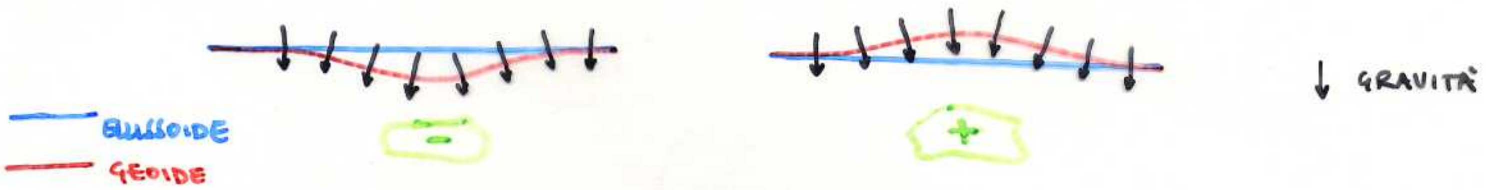


a) anomalie del geoide in altezza sopra (positive) o sotto (negative) l'ellissoide di riferimento (in metri)

b) Figura media della Terra calcolata assumendo la Terra simmetrica attorno all'asse di rotazione. Tratteggiato: l'ellissoide con schiacciamento 1/298.25

Gli scostamenti del geoide dall'Ellissoide Internazionale sono di alcune decine di metri, comunque entro i ±70 m, in accordo col fatto che gli scostamenti dallo equilibrio idrostatico sono dell'ordine di f^2.

Un'anomalia del geoide negativa si trova in una regione con deficit di massa (depressione nel fondale oceanico), mentre un'anomalia positiva si trova in una regione con un eccesso di massa (montagna nel fondale oceanico).



L'anomalia Δh in altezza del geoide è legata all'anomalia nel potenziale gravitazionale misurata sull'ellissoide

$$g\,\Delta h = \Delta V$$

con g l'accelerazione di gravità sull'ellissoide.

Gli scostamenti sono dovuti sia alle inomogeneità nella stratificazione terrestre, sia al fatto che la Terra non è in perfetto equilibrio idrostatico. Erosione, movimenti tettonici, l'accumularsi e lo sciogliersi dei ghiacci sono cause di lente ma continue variazioni della forma del geoide.

Si potrebbe supporre che le deviazioni del geoide siano legate alla topografia (la montagna esercita un'attrazione supplementare), ma in realtà l'altezza del geoide non è correlata ad essa. Vedremo più avanti che ciò è dovuto al fatto che le regioni continentali sono isostaticamente compensate, cioè la maggior attrazione dovuta alla topografia è compensata in profondità da un deficit di massa: i continenti a densità più bassa galleggiano nel substrato a densità più alta sotto la crosta terrestre come giganteschi iceberg nei mari polari.

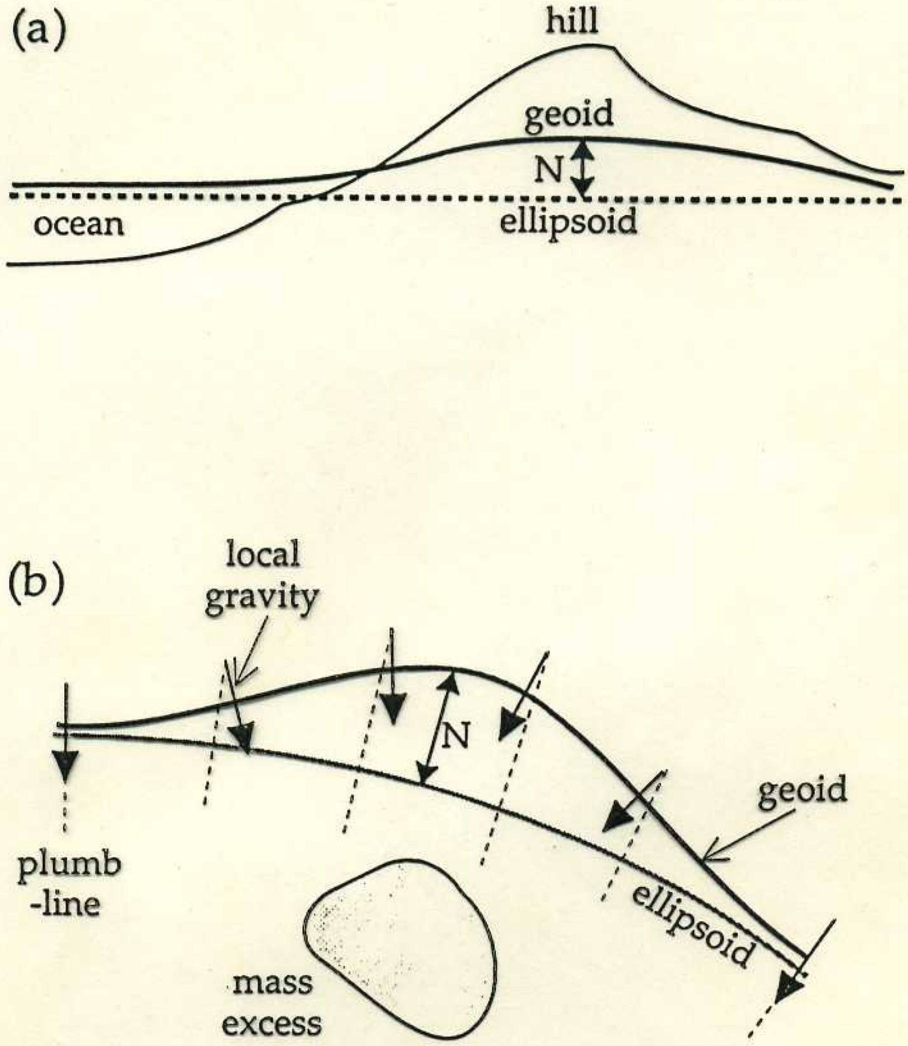
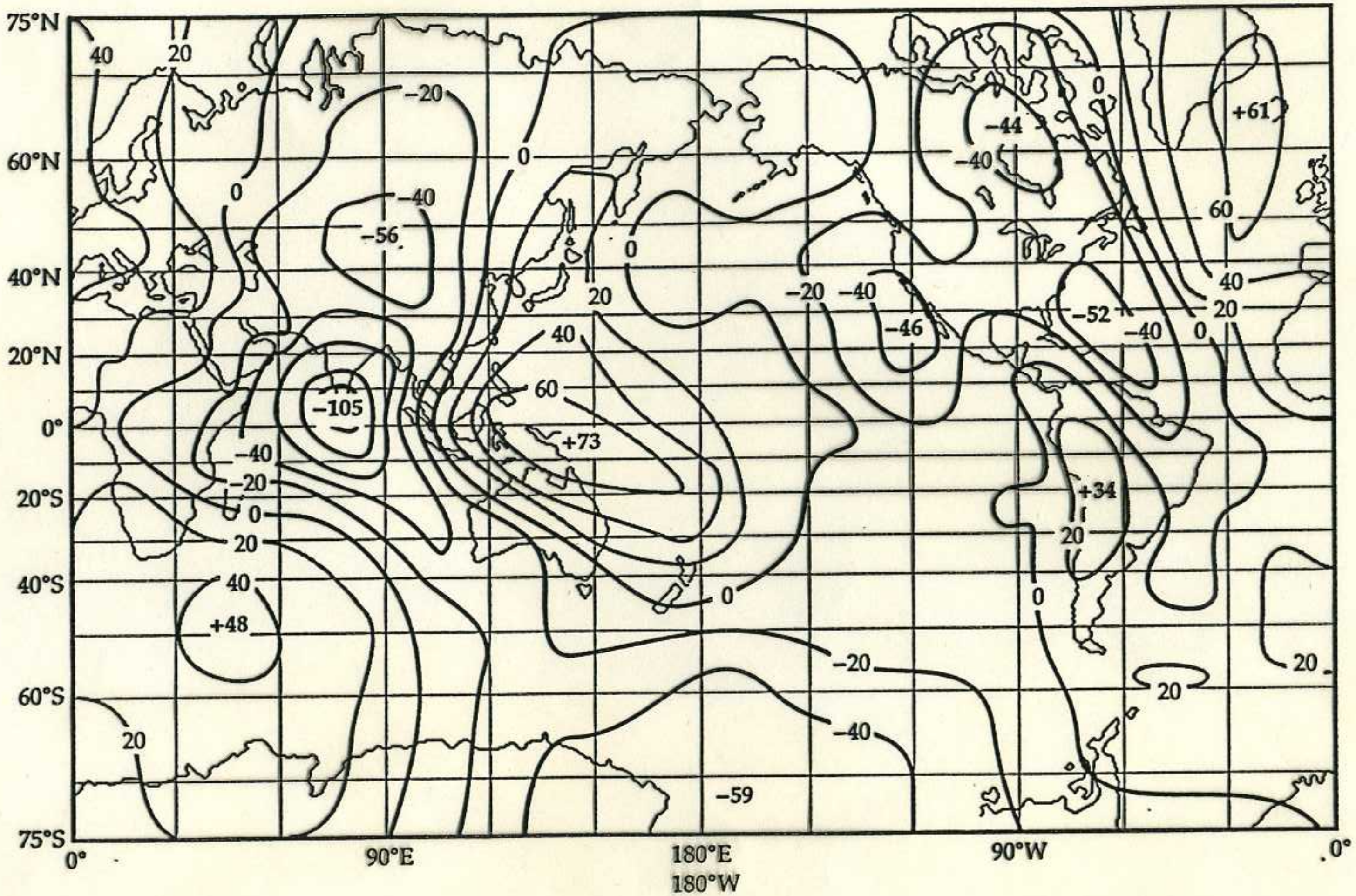


Fig. 2.22 (a) A mass outside the ellipsoid or (b) a mass excess below the ellipsoid elevates the geoid above the ellipsoid. *N* is the geoid undulation.

Fig. 2.23 World map of geoid undulations relative to a reference ellipsoid of flattening $f=1/298.257$ (after Lerch *et al.*, 1979).



EFFETTI SULLA GRAVITÀ DELLA CONVEZIONE NEL MANTELLO SUPERIORE

(McKenzie et al., 1980)

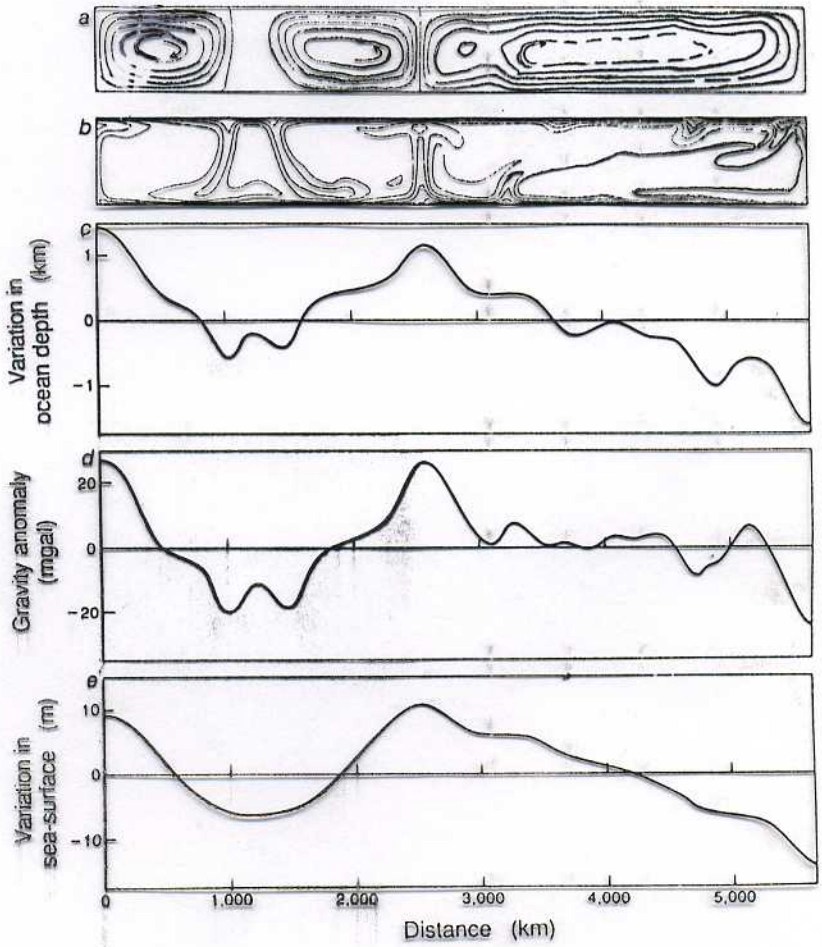
Celle di convezione

Temperature (intervalli di 100°C)

Variazioni nella profondità dei fondali oceanici

Anomalia di gravità dovuta alla convezione

Anomalia nella altezza del geoide causa convezione



MAPPA DELLA GRAVITÀ IN MARE SEASET

(da W. Haxby)