ANOMALIE DI GRAVITÀ

Per interpretare i valori di gravità g_m, che vengono misurati sulla superficie terrestre, in termini di anomalie locali o regionali, bisogna prima rimuovere certi effetti, comuni a tutte le misure. Supponendo che gli effetti di deriva e calibrazione dello strumento, nonché delle maree terrestri (che vedremo in seguito) siano già stati (se necessario) rimossi, le correzioni (dette anche riduzioni) da applicare sono:

1) Correzione di latitudine (gravità normale)
2) Correzione di aria libera (di Faye)
3) Correzione della piastra (di Bouguer)
4) Correzione topografica
5) Correzione isostatica

Correzione di latitudine

La correzione si ottiene sottraendo dal valore misurato g_m il valore della gravità normale g_φ

$$g_\varphi = g_e(1 + \alpha \sin^2\varphi + \beta \sin^4\varphi)$$

Se la zona della campagna gravimetrica è limitata, si può usare una correzione al primo ordine ottenuta derivando la formula della gravità normale

$$\frac{dg_\varphi}{d\varphi} = 2 g_e \alpha \sin\varphi \cos\varphi$$

$$\frac{dg_\varphi}{dl} = \frac{1}{a}\frac{dg_\varphi}{d\varphi} = \frac{1}{a} g_e \alpha \sin 2\varphi = .814 \sin 2\varphi \ \text{mgal/km}$$

Pertanto

$$\Delta g_\varphi = \frac{dg_\varphi}{dl} \cdot \Delta l$$

ove Δl è lo scostamento in direzione N-S da un punto appropriato in cui la gravità normale è g_0. Avremo

$$g_\varphi = g_0 \pm \Delta g_\varphi$$

Possiamo pertanto esprimere i contributi alla gravità nel punto di misura come

$$g_m = g_\varphi + \varepsilon_1$$

ove con ε_1 indico il contributo di altri fattori. Pertanto

$$\varepsilon_1 = g_m - g_\varphi = g_m - [g_0 \pm \Delta g_\varphi]$$

rappresenta una prima anomalia residua ottenuta (che però non ha nome in quanto di poca utilità).

Correzione di aria libera (di Faye)

Poichè la gravità varia come $1/r^2$, necessita correggere il dato misurato per la differenza di altitudine del punto (stazione) di misura rispetto al geoide. La correzione viene detta di aria libera, in quanto non tiene conto delle masse interposte tra la stazione ed il geoide. Essa viene determinata con grande approssimazione, trascurando la componente centrifuga.

$$g = \frac{GM}{r^2} \quad \rightarrow \quad \frac{dg}{dr} = -\frac{2GM}{r^3} = -\frac{2}{r}\frac{GM}{r^2} = -2g/r \approx -2g_e/a$$

Pertanto la correzione per l'altitudine sarà

$$|\Delta g_{FA}| = \left|\frac{dg}{dr}\right|_e \cdot \Delta h| = |\frac{2g_e}{a}\Delta h| = .3086 \text{ mgal/m}$$

In seconda approssimazione i contributi alla gravità nel punto di misura saranno

$$g_m = g_\varphi - \Delta g_{FA} + \varepsilon_2$$

in cui la correzione per l'altitudine và sottratta se il punto di misura è al di sopra del geoide.

Correggendo i dati solamente per la latitudine e l'altitudine si ottiene un'anomalia (ε_2, che però chiameremo g_{FA}), che risulta utile nelle investigazioni locali e regionali

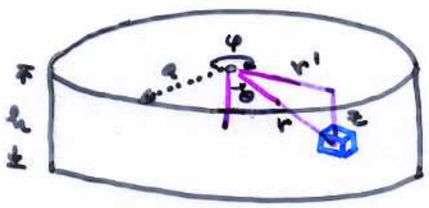
$$g_{FA} = g_m - [g_\varphi - \Delta g_{FA}] = g_m - g_\varphi + \Delta g_{FA}$$

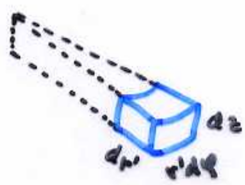
e viene chiamata anomalia all'aria libera (free-air anomaly)

Correzione della piastra (di Bouguer)

Tiene conto dell'attrazione delle masse interposte tra la stazione di misura ad altezza h ed il geoide, che è stato ignorato nella correzione ad aria libera.
Tale effetto può essere approssimato con quello di una piastra (circolare con raggio $a \to \infty$) di altezza h e densità uguale alla densità media degli strati sottostanti
(NB: non nota in genere, per cui nel caso di campi regionali si assume $\rho = 2.67\ g/cm^3$)

Calcoliamo il contributo alla gravità nel punto di misura di un elementino di massa





$dV = r'dr'd\varphi dz$

$$dg = G\frac{dm}{r^2} = G\rho\frac{dV}{(r'^2+z^2)} = G\rho\frac{r'dr'd\varphi dz}{(r'^2+z^2)}$$

$$dg_z = dg\cos\theta = dg\frac{z}{r}$$

$$\Delta g_B = \int dg_z = G\rho\int_{2\pi} d\varphi\int_0^h z\,dz\int_0^{a\to\infty}\frac{r'dr'}{(r'^2+z^2)^{3/2}}$$

$$= 2\pi G\rho\int_0^h z\,dz\underbrace{\int_0^{a\to\infty}\frac{r'dr'}{[r'^2+z^2]^{3/2}}}_{\left[-\frac{1}{\sqrt{r'^2+z^2}}\right]_0^{a\to\infty} = \frac{1}{z}}$$

$$\Delta g_B = 2\pi G\rho\int_0^h dz$$

$$\Delta g_B = 2\pi G\rho h$$

Pertanto l'approssimazione successiva alla gravità nel punto di misura sarà:

$$g_m = g_\varphi - \Delta g_{FA} + \Delta g_B + \epsilon_3$$

La correzione è positiva poiché la piastra attrae con una massa extra il punto di misura rispetto al geoide. La correzione Δg_B risulta (per $\rho = 2.67\ g/cm^3$) di circa $0.112\ mgal/m$

L'anomalia risultante (ϵ_3) viene detta anomalia di Bouguer semplice

Per ottenere l'anomalia di Bouguer in mare si sostituisce all'acqua di densità $1\ g/cm^3$ materiale di densità $2.67\ g/cm^3$ e quindi si somma l'attrazione addizionale (dovuta al contrasto di densità $1.67\ g/cm^3$) del materiale

$$2\pi G\ (1.67\ g/cm^3) \times (\text{profondità})$$

alla gravità in aria libera. La formula dà una correzione di $0.070\ mgal/m$.

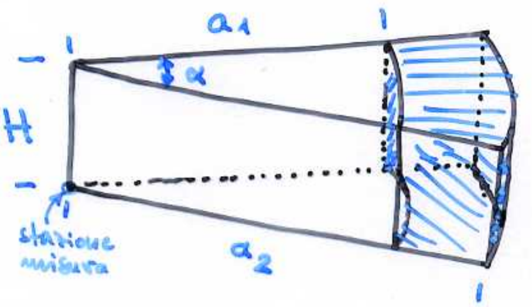
Poiché l'anomalia in aria libera è di solito molto piccola, si ottiene una forte anomalia di Bouguer positiva nella maggior parte delle regioni oceaniche. Pertanto, con dati marini, non ci sono vantaggi nell'usare le anomalie di Bouguer rispetto a quelle in aria libera.

Correzione topografica

Se la stazione di misura non è situata su un altopiano, ma in mezzo a montagne e valli, occorre aggiungere alla correzione di Bouguer quella dovuta alla topografia.

Da notare che la topografia riduce il valore delle misure: infatti aggiunge un'attrazione verso l'alto (colline), ovvero provoca una mancanza di attrazione verso il basso (valli).

Per calcolare la correzione si suddivide la zona circostante la stazione di misura secondo prismi a sezione di settore circolare con una base alla quota di misura ed altezza corrispondente alla quota media del settore.



Il calcolo dell'attrazione gravitazionale è analogo a quello della piastra infinita, solo il limite di integrazione per r' varia da a_1 ad a_2 per cui

$$- \frac{1}{\sqrt{r'^2 + z^2}} \Bigg|_{a_1}^{a_2} \Longrightarrow \int_0^H \left[\frac{1}{\sqrt{a_1^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{a_2^2+z^2}} \right] z\,dz = \sqrt{a_1^2+z^2}\,\Big|_0^H - \sqrt{a_2^2+z^2}\,\Big|_0^H$$

$$= \sqrt{a_1^2+H^2} - \sqrt{a_2^2+H^2} - a_1 + a_2$$

Per cui, variando il limite di integrazione in φ tra 0 ed α, avremo

$$\Delta g_T = G \rho \alpha \left[(a_2 - a_1) + \sqrt{a_1^2+H^2} - \sqrt{a_2^2+H^2} \right]$$

Ovviamente la correzione Δg_T da applicare sarà la somma delle correzioni dovute ad ogni prisma entro un determinato raggio dalla stazione.

L'approssimazione successiva alla gravità nel punto di misura sarà pertanto

$$g_m = g_\varphi - \Delta g_{FA} + \Delta g_B - \Delta g_T + \epsilon_4$$

Dicesi anomalia di Bouguer (completa) l'anomalia (ϵ_4) che si ottiene da quella in aria libera correggendola per l'effetto della piastra e della topografia:

$$g_B = g_m - g_\varphi + \Delta g_{FA} - \Delta g_B + \Delta g_T$$

Se la Terra non avesse variazioni di densità laterali tutte le misure di gravità, corrette per gli effetti descritti sopra, sarebbero identiche. Pertanto le differenze residue riscontrabili ϵ_4 costituiscono un'anomalia di gravità g_B che è il risultato di variazioni laterali di densità.

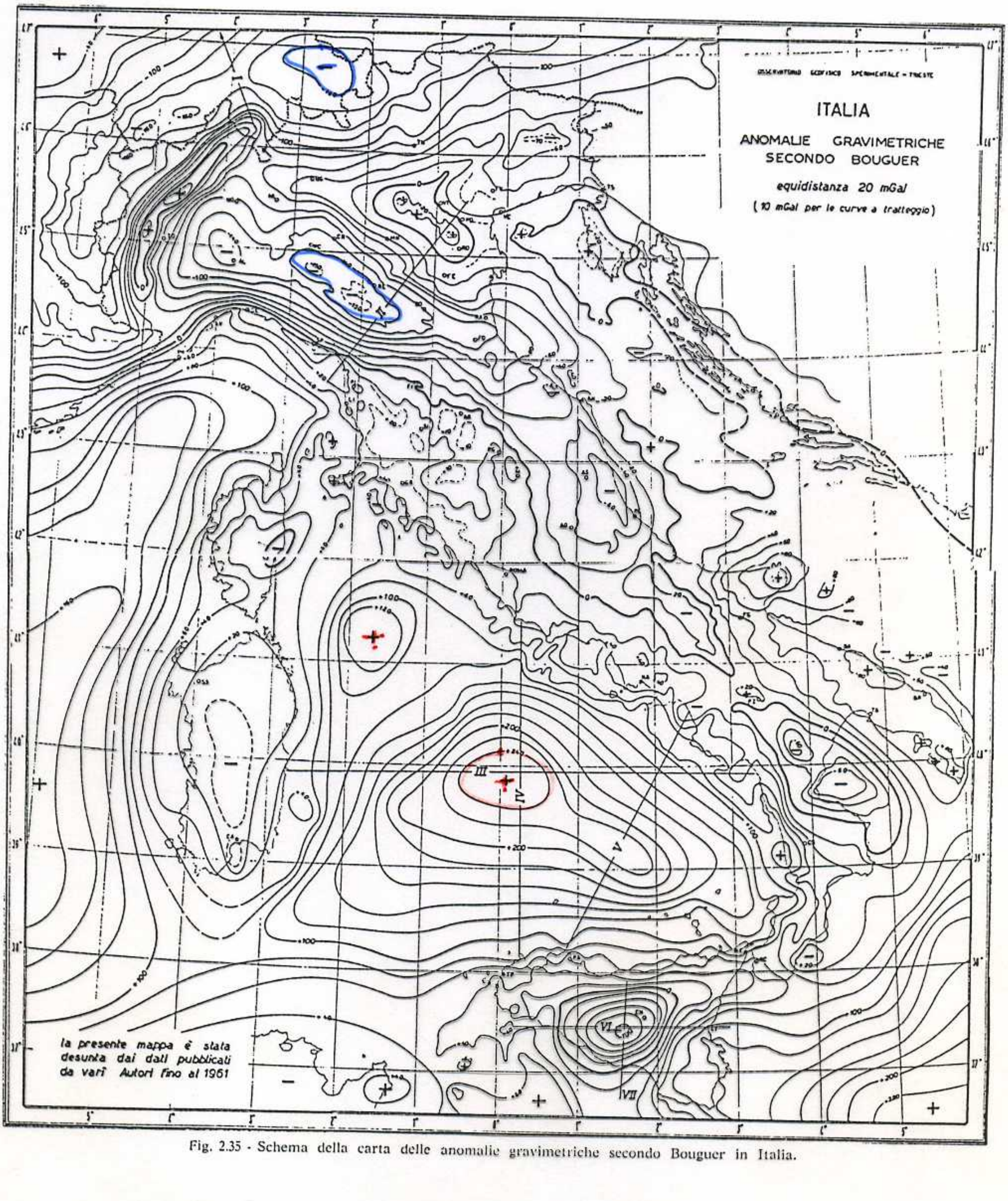


Fig. 2.35 - Schema della carta delle anomalie gravimetriche secondo Bouguer in Italia.

CORREZIONE DI EÖTVÖS

Tutte le correzioni precedenti assumono che il punto di osservazione (nel quale si fà la misura) sia fisso su un punto della Terra (e perciò ruoti con esso).

Quest'assunzione è violata nelle prospezioni marine ed aeree, poichè il punto di osservazione avrà una velocità angolare diversa da quella predetta dalla gravità normale per quella latitudine.

Gli errori che ne derivano sono grandi specie se la velocità relativa, V, del punto di osservazione ha una componente nella direzione est-ovest.

La correzione di Eötvös è data dalla formula:

$$E = 7.508\, V \cos\phi \sin\Theta + V^2/R$$

con V velocità del punto di osservazione, in nodi
ϕ latitudine in gradi
Θ direzione della velocità in gradi dal N
R raggio della Terra, in metri, alla latitudine ϕ.

INTERPRETAZIONE DELLE ANOMALIE DI BOUGUER

Nell' interpretazione delle anomalie di gravità ci si trova a dover risolvere un "problema inverso": dati i valori della gravità in superficie, determinare le caratteristiche del corpo perturbante sottostante. Il problema nei suoi termini generali non è risolubile, nel senso che infinite sono le distribuzioni di massa che possono dare gli stessi valori di gravità in superficie.

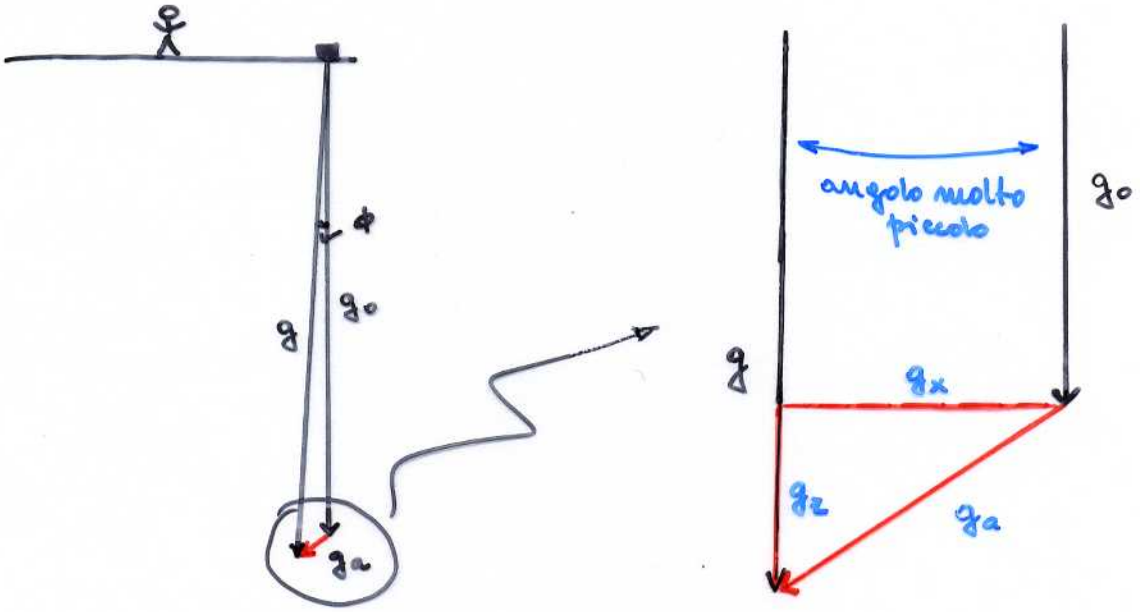
Le informazioni che si possono ottenere dall' esame delle anomalie di gravità in superficie sono:

1. Forma geometrica del corpo perturbante
2. Dimensioni geometriche
3. Densità di contrasto con il materiale circostante
4. Profondità

I punti 2 e 3 non possono essere risolti indipendentemente, mentre il punto 4 è generalmente risolto con buona approssimazione.

Al fine di ottenere una buona interpretazione della struttura sottostante in esame è necessario vincolare l' interpretazione gravimetrica con dati indipendenti di altra natura (geologia, perforazioni, geometria del corpo ricavata in base ad esperimenti di sismica attiva ....)

Data l'entità piccola dell'anomalia gravimetrica locale rispetto al valore di gravità, i gravimetri misurano la componente verticale del campo gravitazionale anomalo sommato alla gravità attesa.



Andiamo pertanto a calcolare la componente verticale della gravità nel caso di corpi perturbanti con geometria semplice.

Sfera

Abbiamo già visto che il campo gravitazionale della sfera è dato da

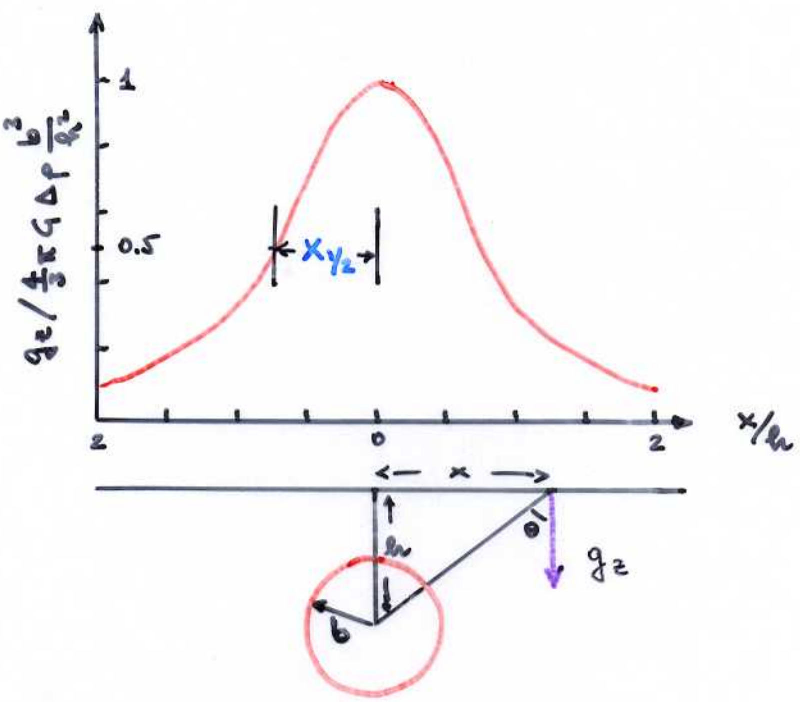
$$g = \frac{GM}{r^2}$$

per cui la sua componente verticale sarà

$$g_z = g\cos\theta = \frac{GM}{r^2}\frac{h}{r} = \frac{GMh}{(x^2+h^2)^{3/2}}$$

con h la profondità del centro della sfera. Se il contrasto di densità con il mezzo circostante è $\Delta\rho$ ed il raggio della sfera è b, avremo che l'anomalia sarà

$$g_z = \frac{4\pi G h \Delta\rho b^3}{3(x^2+h^2)^{3/2}} = \frac{4\pi G \Delta\rho b^3}{3h^2\left[\left(\frac{x}{h}\right)^2+1\right]^{3/2}}$$



L'anomalia è simmetrica rispetto al centro della sfera ed essenzialmente confinata entro un raggio uguale due o tre volte la profondità del centro della sfera.

NB: $2\pi G \simeq 42$ mgal/km/(gr/cm^3)

La semilarghezza $x_{1/2}$ di un'anomalia simmetrica è definita come la distanza tra il centro dell'anomalia (valore massimo) ed il punto in cui l'anomalia ha valore metà del massimo

$$g_z(x_{1/2}) = \frac{1}{2} g_{max}$$

$$\frac{1}{2} = \left[1 + \left(\frac{x_{1/2}}{h}\right)^2\right]^{-3/2}$$

$$x_{1/2} = \left[2^{2/3} - 1\right]^{1/2} h$$

$$h = 1.305\, x_{1/2}$$

Quest'ultima relazione è molto utile per una rapida determinazione della profondità delle sorgenti anomale approssimativamente equidimensionali.

Esempio:

Un duomo salino forma una struttura favorevole per giacimenti di petrolio o gas naturale. Se modelliamo tale struttura come una sfera di raggio 4 km centrata a 6 km di profondità, con un contrasto di densità di $-0.2\ gr/cm^3$ rispetto ai sedimenti circostanti, il picco di gravità direttamente sopra il duomo salino avrà il valore di

$$g_{max} = \frac{4\pi G\, \Delta\rho\, b^3}{3 h^2}$$

$$g_{max} = \frac{2}{3} \cdot 42\ mgal/km/(gr/cm^3) \cdot (-0.2\ gr/cm^3)(4\ km)^3/(6\ km)^2$$

$$= -10\ mgal$$

$d = 1.3\, x_{1/2}$ (10.5.15)

Esempio: Cavità sferica.

raggio a=50m densità di contrasto: $\delta\rho$ = - 2.67g/cm^3

profondità d_1=60m, d_2=120m

G=6.67 10^{-8} cm^3/gs^2

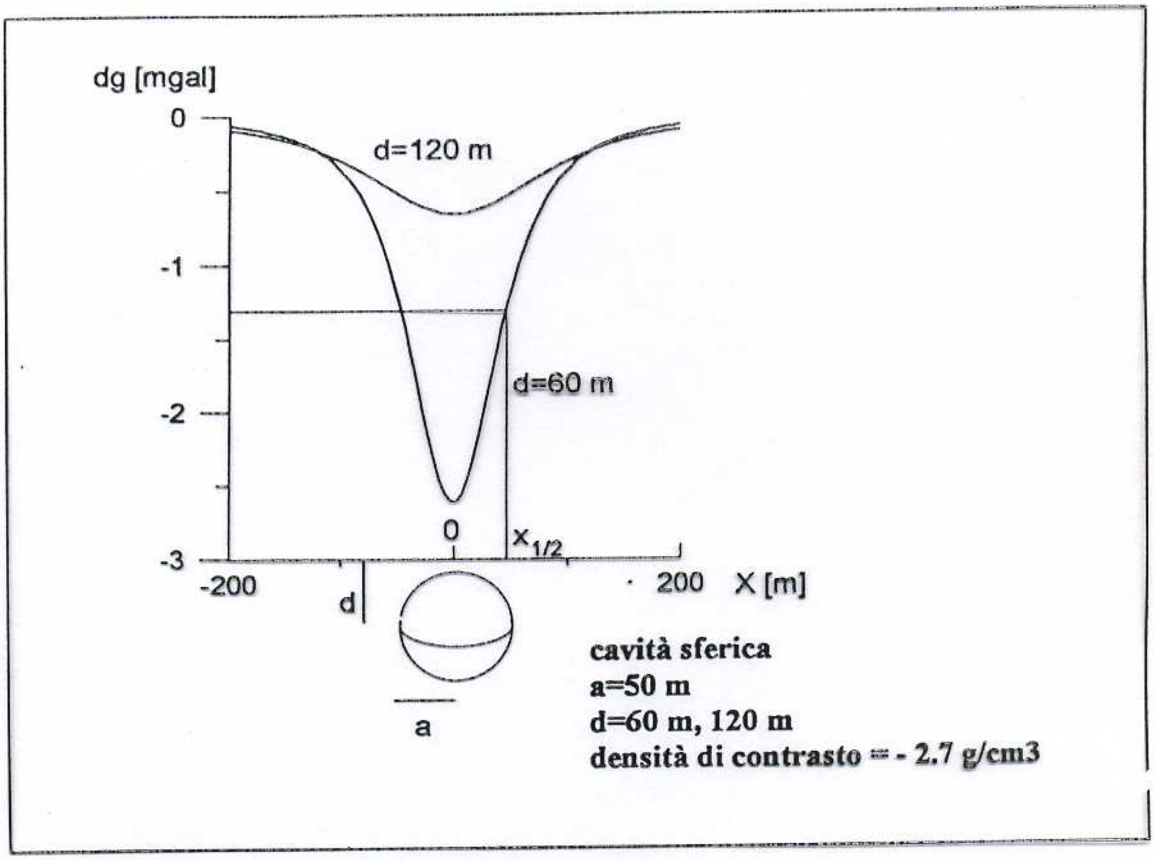


Fig. 10.16 - Effetto gravimetrico prodotto da una cavità sferica di raggio=a posta alla profondità d1 e d2

Effetto gravimetrico in x=0:

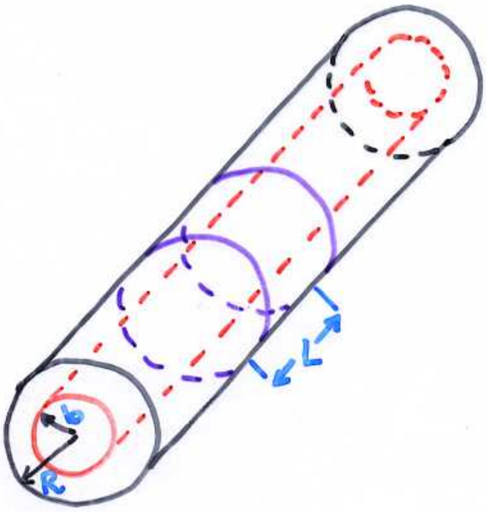
per $d = d_1$ = 60 m $\delta g_1(0) = G\, 4/3\, \pi\, \rho\, r^3/d^2$ = 2.6 mgal

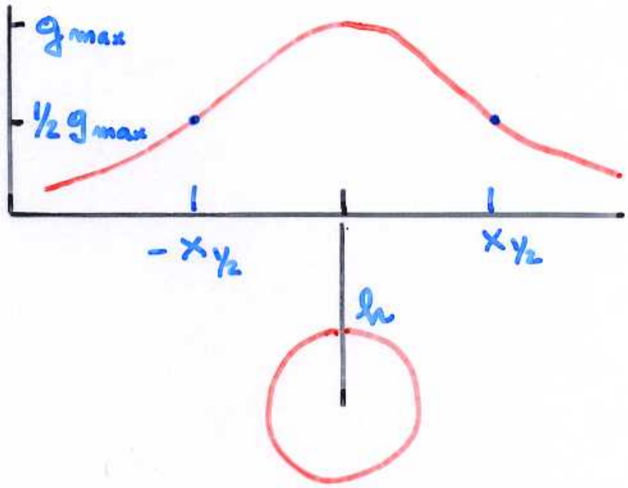
per $d = d_2$ =120m $\delta g_2(0) = G\, 4/3\, \pi\, \rho\, r^3/d^2$= 0.65 mgal

Variazione geoidica: Come esempio di interesse speculativo viene calcolata la variazione geoidica massima prodotta dalla sfera. La variazione geoidica h in x=0 viene calcolata dalla variazione del potenziale e dal valore

Cilindro infinito

Molte forme geologiche hanno una direzione pronunciata e sono a sezione quasi costante (anticlinali, valli sedimentarie in profondità nel basamento, intrusioni estese...). La gravità di una struttura cilindrica infinita si ottiene rapidamente mediante la legge di Gauss





Considerando una superficie cilindrica di raggio R e lunghezza L attorno al corpo, la gravità sarà radiale e perpendicolare alla superficie. Non ci sarà flusso attraverso le estremità. La massa nel cilindro sarà $\rho \pi b^2 L$ e la legge di Gauss dà:

$$\oint g \, dS = 2\pi R L g = 4\pi G M$$

$$g = \frac{2GM}{RL} = 2\pi G \Delta\rho \frac{b^2}{R}$$

La componente verticale di gravità sarà

$$g_z = \frac{2\pi G \Delta\rho \, b^2 h}{(x^2 + h^2)} = \frac{2\pi G \Delta\rho \, b^2}{h \left[\left(\frac{x}{h}\right)^2 + 1\right]}$$

Anche questa anomalia è simmetrica e si trova che

$$h = x_{1/2}$$

Piastra infinita

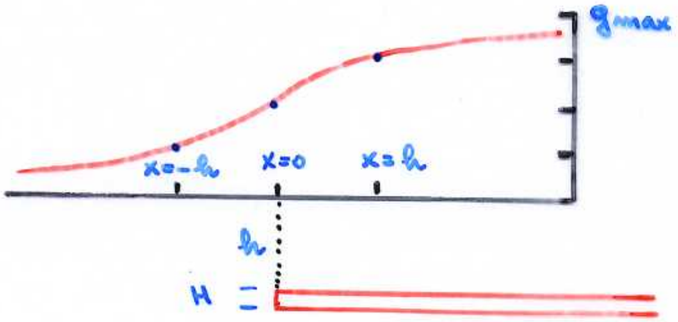
Già calcolato il campo nel caso della correzione di Bouguer

$$g_z = 2\pi G \rho H$$

con H spessore della piastra. Da notare che l'attrazione non dipende dalla posizione! Applicabile in regioni a strutture piane e dà una buona stima dello spessore (per un particolare contrasto di densità) necessario a spiegare una certa anomalia.

Piastra semi-infinita

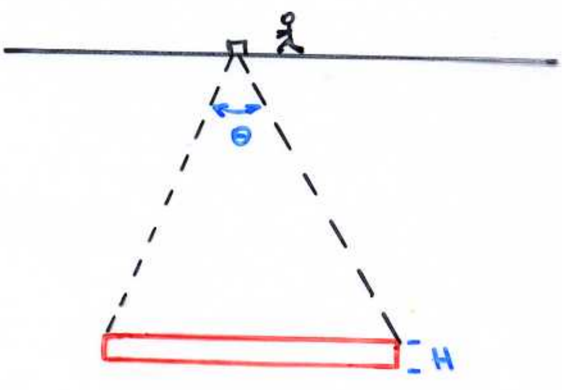
Ad esempio una struttura piana interrotta da una faglia verticale (l'altra metà erosa o a grande profondità)



$$g_z = 2G\rho H\left[\pi/2 + \operatorname{atan}\left(\frac{x}{h}\right)\right]$$

Piastra finita

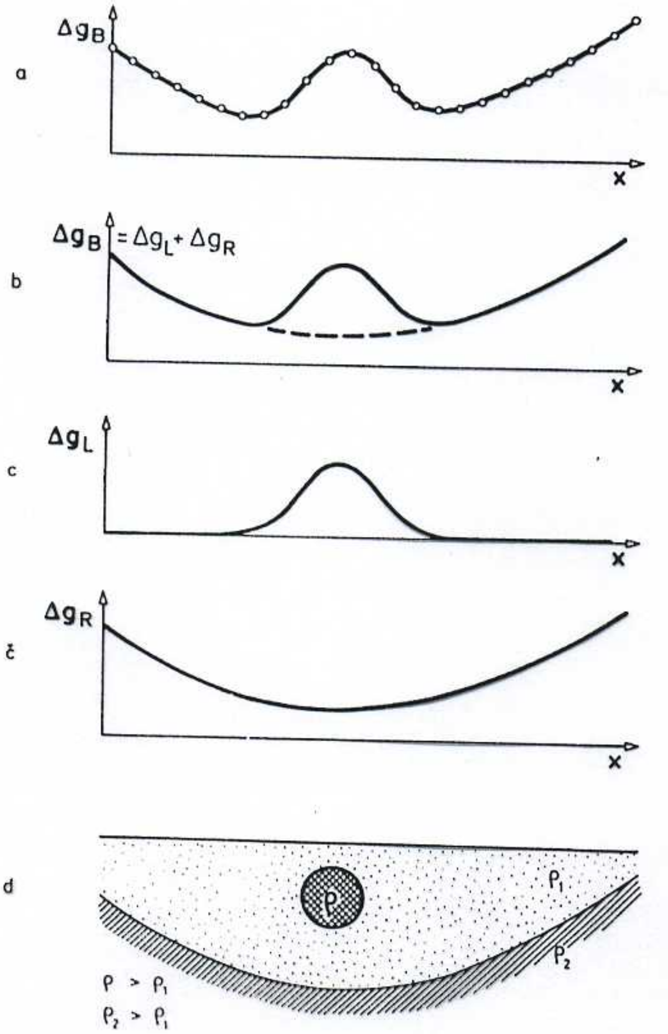
L'anomalia di gravità è proporzionale all'angolo sotteso dalle estremità nel punto di osservazione ed allo spessore della piastra



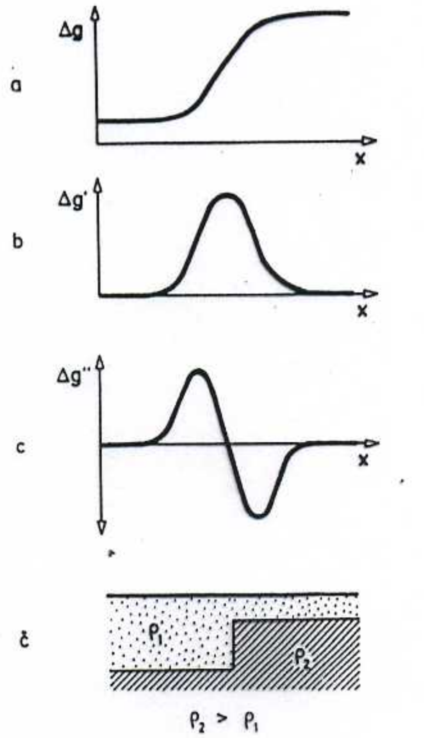
$$g_z = 2\rho G H \theta$$

$$g_z = 2\rho G H\left[\operatorname{atan}\frac{x_1}{h} - \operatorname{atan}\frac{x_2}{h}\right]$$

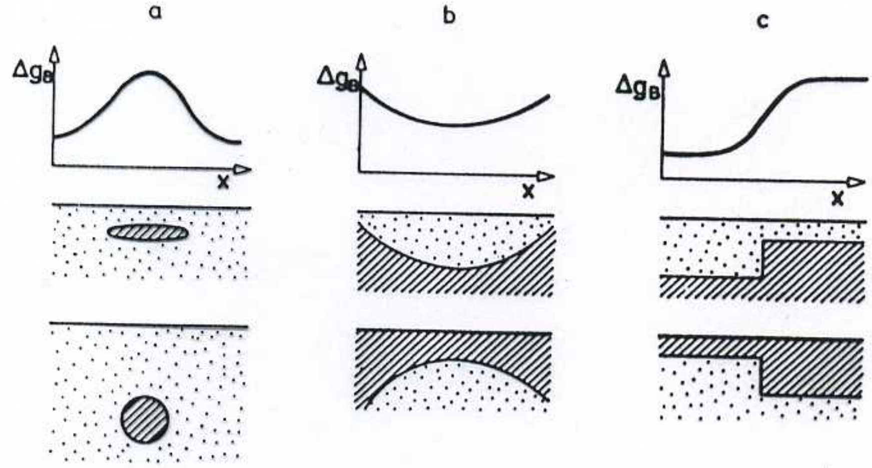
Interpretazione anomalie di gravità



Scomposizione anomalia in campo regionale e locale



Uso della derivata prima e seconda nell'interpretazione del campo di gravità



Esempi di non-univocità nell'interpretazione

Stima della massa totale anomala (massa di contrasto)

Avendo a disposizione i valori delle anomalie di gravità su un'area sufficientemente vasta della superficie terrestre, ove sia stata isolata l'anomalia locale di gravità, si può ricavare il valore della massa sottostante M che la produce, ricorrendo al teorema di Gauss nell'ipotesi semplificata di una superficie piana

$$\int_{\text{superficie}} g_z \, dS = 2\pi G M$$

La formula può essere applicata rapidamente ponendo una griglia sulla mappa dell'anomalia di gravità e sommando l'anomalia cella per cella