MATRICI

DEFINIZIONE

Una matrice è una schiera rettangolare di numeri disposti in righe e colonne soggetta a certe regole di addizione e moltiplicazione.

Le matrici si formano per uno scopo preciso che implica ulteriori derivazioni basate sulle operazioni che vedremo.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Esempio di matrice
(2×4)

Se la matrice consiste in una sola riga o colonna di valori, essa si riduce ad un vettore riga o vettore colonna.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Se il numero di righe di una matrice è uguale al numero di colonne, la matrice è una matrice quadrata.

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Matrice quadrata
(3×3)

La matrice $\underline{\underline{A}}$ ha gli elementi 1, 0, 2 lungo la sua diagonale principale. Una matrice diagonale ha gli elementi non sulla diagonale principale zero.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Una matrice simmetrica ha simmetria negli elementi rispetto alla diagonale principale.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 123 \\ 4 & 2 & -7 \\ 123 & -7 & 3 \end{bmatrix}$$

SOMMA DI DUE MATRICI

Due matrici $(n \times p)$ si sommano sommando gli elementi nella stessa posizione

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \\ -1 & 5 & 4 \\ 6 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}} \quad + \quad \underline{\underline{B}} \quad = \quad \underline{\underline{C}}$$

La stessa regola vale per la SOTTRAZIONE !

E' inoltre evidente che vale $\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{C}}$

Gli elementi di una matrice si indicano con degli indici, es. a_{ij} con i numero di riga e j numero di colonna. Nella somma di sopra $a_{11} = 1$, $b_{23} = 4$, $c_{31} = 6$.

La trasposta di una matrice $\underline{\underline{A}}$ è la matrice $\underline{\underline{A}}^T$ le cui colonne sono uguali alle righe di $\underline{\underline{A}}$, ovvero $a_{ij} = a^T_{ji}$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -2 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{A}}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

ovviamente $(\underline{\underline{A}}^T)^T = \underline{\underline{A}}$

MOLTIPLICAZIONE

La moltiplicazione di una **matrice per un numero** si ottiene moltiplicando tutti gli elementi della matrice per il dato numero:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -2 \end{bmatrix} \qquad 2\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & -2 \\ 0 & 10 & -4 \end{bmatrix} \qquad -\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

La **moltiplicazione di due matrici** si effettua formando una nuova matrice $\underline{\underline{C}}$ con gli elementi

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{t} a_{ik} b_{kj}$$

con t il numero di colonne di $\underline{\underline{A}}$ ed il numero di righe di $\underline{\underline{B}}$ che devono essere uguali! Non tutte le matrici si possono quindi moltiplicare tra di loro!

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

cioè $c_{11} = a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21}$, $c_{12} = a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22}$, ecc.

Metodo pratico per moltiplicare matrici:

$$\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline & B \end{array} \quad = \quad \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 0 & 15 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ \hline & & & 0 & 2 & -1 \\ & & & 5 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 1 & -2 \end{array}$$

Vale inoltre:

Attenzione: $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} \neq \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}$

$AI = IA = A$

$(AB)C = A(BC)$

$(A+B)C = AC + BC$

$A(B+C) = AB + AC$

$(AB)^T = B^T A^T$

Matrice unitaria

= matrice diagonale con tutti elementi 1

$$\underline{\underline{I}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

DETERMINANTI

Risultano utili nella soluzione di equazioni lineari e nel calcolo della matrice inversa.

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2 \end{cases}$$

in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

la soluzione è data da

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

Il determinante di una matrice 2x2 si ottiene sottraendo il prodotto degli elementi non sulla diagonale principale dal prodotto degli elementi sulla diagonale.

$$|\underline{\underline{A}}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

Per definire il determinante di una matrice $(n \times n)$ definiamo prima il minore di un elemento a_{ij} che indicheremo con c_{ij}

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad c_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Il minore di un elemento a_{ij} è pertanto il determinante della matrice ottenuta scartando gli elementi della riga i e colonna j.

Il determinante di una matrice $(n \times n)$ è dato dalla seguente espressione

$$|\underline{A}| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} c_{ij}$$

Il valore del determinante <u>non</u> dipende dal valore di i!

Esempio

$$|\underline{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31}$$

MATRICE INVERSA

La matrice inversa di $\underline{\underline{A}}$ si scrive $\underline{\underline{A}}^{-1}$ e soddisfa la

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{I}}$$

Per una matrice (2x2)

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}{ad-bc}$$

Esempio:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/6 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Infatti:

$$\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ \hline & & 2/3 & -1/3 \\ & & -1/6 & 1/3 \end{array}$$

Un metodo generale per ottenere l'inversa di una matrice è il seguente. Definendo il cofattore a_{ij}^{c} dell'elemento a_{ij} di una matrice $\underline{\underline{A}}$ come $(-1)^{i+j}$ volte il minore di a_{ij}, possiamo formare la matrice cofattore $\underline{\underline{A}}^{c}$.

Si può dimostrare che

$$\underline{\underline{A}}\,(\underline{\underline{A}}^{c})^{T} = |\underline{\underline{A}}|\,\underline{\underline{I}}$$

da cui dividendo per $|\underline{\underline{A}}|$ e premoltiplicando per $\underline{\underline{A}}^{-1}$ si ottiene

$$\boxed{\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{(\underline{\underline{A}}^{c})^{T}}{|\underline{\underline{A}}|}}$$

Si può provare che vale

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$(A^{-1})^{T} = (A^{T})^{-1}$$

Se $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}}$, allora $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{C}}$

EQUAZIONI LINEARI

La risoluzione di un sistema di equazioni lineari è un esempio in cui è utile il calcolo matriciale.

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots a_{1n} x_n = c_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots a_{2n} x_n = c_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots a_{nn} x_n = c_n \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{A}}\,\underline{X} = \underline{C}$$

La soluzione può venire espressa da $\underline{X} = \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{C}$

Esempio:
$$\begin{cases} 36 x_1 + 16 x_2 + 4 x_3 = 8 \\ 15 x_1 + 9 x_2 + 3 x_3 = 3 \\ 6 x_1 + 4 x_2 + 2 x_3 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 36 & 16 & 4 \\ 15 & 9 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Invertendo con il metodo descritto la matrice, si ottiene

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/8 & -1/3 & 1/4 \\ -1/4 & 1 & -1 \\ 1/8 & -1 & 7/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Se il sistema di equazioni lineari è omogeneo

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = 0 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n = 0 \end{cases}$$

cioè $$\underline{\underline{A}}\,\underline{X} = \underline{0}$$

una soluzione ovvia al problema è $\underline{X} = \underline{0}$.

Usando l'espressione matriciale per la soluzione

$$\underline{X} = \frac{\underline{0}}{|\underline{\underline{A}}|}$$

si vede che il vettore $\underline{X}$ può avere elementi non nulli solo se $|\underline{\underline{A}}| = 0$!

ESEMPIO

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 0 \\ 9x_1 + 15x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{e si ha: } |\underline{\underline{A}}| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 15 \end{vmatrix} = 0$$

Ambedue le equazioni portano alla relazione

$$x_1 = -\frac{5}{3} x_2$$

Assegnando un valore arbitrario a x_2 $(x_2 = 6)$ otteniamo $x_1 = -10$. Una soluzione è pertanto $\begin{bmatrix} -10 \\ 6 \end{bmatrix}$.

$$\therefore \quad \underline{X} = k \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

con k che può prendere qualunque valore (zero compreso).

AUTOVALORI ED AUTOVETTORI

Nella risoluzione dell'equazione $\underline{\underline{A}}\,\underline{X} = \underline{B}$ gli elementi del vettore $\underline{B}$ sono combinazioni lineari delle incognite x_i.
Il cosiddetto problema agli autovalori si pone, quando l'intero vettore $\underline{B}$ è proporzionale all'incognita $\underline{X}$, cioè

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{X} = \lambda\,\underline{X} \qquad \lambda = \text{cost.}$$

Si può risalire al vettore $\underline{X}$ risolvendo

$$(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}})\,\underline{X} = 0$$

Soluzioni non triviali di quest'equazione omogenea esistono solo se il determinante della matrice è nullo:

$$|\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Quest'equazione è un polinomio di grado n in λ. I valori di λ che soddisfano l'equazione si dicono autovalori e le corrispondenti soluzioni per X autovettori.

$$\lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + p_0 = 0$$

Il polinomio è chiamato equazione caratteristica di A.

Equazione caratteristica di una matrice 2x2.

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

La sua equazione caratteristica è:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ovvero:

$$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{12}a_{21} = 0$$

$$\lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$$

$$\lambda^2 + p_1\lambda + p_0 = 0$$

L'equazione ha due radici

$$\lambda_{1,2} = \frac{-p_1 \pm \sqrt{p_1^2 - 4p_0}}{2}$$

Esempio

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -6 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \quad \begin{matrix} 3 \\ -1 \end{matrix}$$

Per trovare gli autovettori:

$$(\underline{\underline{A}} - \lambda_1 \underline{\underline{I}})\underline{x}_1 = \begin{bmatrix} 5-3 & 2 \\ -6 & -3-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = 0$$

Le equazioni omogenee da risolvere sono

$$\begin{cases} 2x_{11} + 2x_{12} = 0 \\ -6x_{11} - 6x_{12} = 0 \end{cases}$$

Ponendo x_{11} arbitrariamente a 1, ne segue $x_{12} = -1$

$$\underline{x}_1 = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Analogamente, per $\lambda_2 = -1$ si trova

$$\underline{x}_2 = k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Gli autovettori di una matrice formano le colonne della **matrice modale** $\underline{\underline{V}} = [\underline{x}_1 \ \underline{x}_2 \dots \underline{x}_n]$

Per l'esempio precedente

$$\underline{\underline{V}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

con il primo elemento di ogni autovettore posto a 1

oppure

$$\underline{\underline{V}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{10}\sqrt{10} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{3}{10}\sqrt{10} \end{bmatrix}$$

con gli autovettori normalizzati a 1 (somma elementi al quadrato = 1)

DIAGONALIZZAZIONE DI UNA MATRICE

Ognuno degli n autovettori della matrice A soddisfa ad un equazione

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x}_i = \lambda_i \underline{x}_i$$

Definendo la matrice diagonale $\underline{\underline{\Lambda}}$

$$\underline{\underline{\Lambda}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

le n equazioni si possono scrivere come

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{V}} = \underline{\underline{V}}\,\underline{\underline{\Lambda}}$$

con $\underline{\underline{V}}$ matrice modale. Moltiplicando da destra con V^{-1}

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{V}}\,\underline{\underline{\Lambda}}\,\underline{\underline{V}}^{-1}$$

forma canonica di $\underline{\underline{A}}$

Moltiplicando la $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{V}} = \underline{\underline{V}}\,\underline{\underline{\Lambda}}$ da sinistra con V^{-1} otteniamo invece

$$\underline{\underline{V}}^{-1}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{V}} = \underline{\underline{\Lambda}}$$

diagonalizzazione di $\underline{\underline{A}}$

ESEMPIO

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -6 & -3 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{\Lambda}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{V}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

e quindi

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -6 & -3 \end{bmatrix}$$

Una matrice $\underline{\underline{A}}$ per la quale $\underline{\underline{A}}^T = \underline{\underline{A}}^{-1}$ è detta ortogonale!

Una matrice simmetrica ha solo autovalori reali!

La somma degli elementi diagonali di una matrice $\underline{\underline{A}}$ è detta traccia di $\underline{\underline{A}}$ e si nota come $tr(\underline{\underline{A}})$. Si può dimostrare che

$$tr(\underline{\underline{A}}) = \sum_{1}^{n} a_{ii} = \sum_{1}^{n} \lambda_i$$

Si può inoltre dimostrare che il determinante di una matrice è uguale al prodotto dei suoi autovalori.

$$|\underline{\underline{A}}| = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$$