Disug. interpolazione

Siano p, q t.c. $1 \le p < q \le \infty$. Sia

$$f \in L^p \cap L^q$$

Allora $f \in L^r \quad \forall \quad r \in [p, q]$, e

$$\|f\|_r \le \|f\|_p^{\alpha} \, \|f\|_q^{1-\alpha}$$

dove α è t.c.: $\displaystyle \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{(1-\alpha)}{q}$.

<u>Dim</u>: $\displaystyle \|f\|_r^r = \int |f|^r = \int |f|^{r\gamma} \, |f|^{r(1-\gamma)}$

per ogni γ, $0 < \gamma < 1$. Siano s, s' esp. coniugati, segue

$$\|f\|_r^r \le \left(\int |f|^{r\gamma s} \right)^{1/s} \left(\int |f|^{r(1-\gamma)s'} \right)^{1/s'}$$

Cerchiamo γ, s t.c.

$$r\gamma s = p \quad , \quad r(1-\gamma)s' = q$$

$$\gamma = \frac{p}{rs} \quad , \quad 1-\gamma = \frac{q}{rs'}$$

Quindi s, s' devono soddisfare:

$$\begin{cases} \dfrac{p}{r}\dfrac{1}{s} + \dfrac{q}{r}\dfrac{1}{s'} = 1 \\[2ex] \dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s'} = 1 \end{cases}$$

Segue:
$$\left(\frac{p}{r} - \frac{q}{r}\right)\frac{1}{s} = 1 - \frac{q}{r}$$

$$\frac{p-q}{r}\frac{1}{s} = \frac{r-q}{r}$$

$$\boxed{\frac{1}{s} = \frac{q-r}{q-p}} \qquad \left(0 < \frac{1}{s} < 1\right).$$

Da cui
$$\gamma = \frac{p}{r}\frac{1}{s} = \frac{p}{r}\frac{(q-r)}{(q-p)}$$

Allora
$$\int |f|^r \le \left(\int |f|^p\right)^{1/s} \left(\int |f|^q\right)^{1/s'}$$
$$\|f\|_r \le \|f\|_p^{\frac{p}{rs}} \, \|f\|_q^{\frac{q}{rs'}} =$$
$$= \|f\|_p^{\gamma} \, \|f\|_q^{1-\gamma}$$

Si prende allora $\alpha = \gamma$ e si ricava
$$\frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q} = \frac{1}{rs} + \frac{1}{rs'} = \frac{1}{r} \qquad \square.$$