Potenze di un endomorfismo e autospazi generalizzati:

Sia $g: V \longrightarrow V$ un endomorfismo.

Possiamo considerare le sue potenze:
$g^2 = g \circ g$, $g^3 = g \circ g \circ g = g \circ g^2$, ecc.

Valgono le seguenti proprietà:

1) $\ker g \subseteq \ker g^2 \subseteq \ker g^3 \subseteq \cdots\cdots$ $(*)$

2) Se $\ker g^k = \ker g^{k+1}$ per un certo $k \geq 1$, da quel momento in poi nella catena $(*)$ sono tutte uguaglianze.

3) Se $v \in V$ è un vettore t.c. $v \in \ker g^k$, allora $g(v) \in g^{k-1}$.

Dim.

1) Se $g(v) = 0$, $g^2(v) = g(g(v)) = g(0) = 0 \Rightarrow v \in \ker g^2$. E così via. Se $v \in \ker g^k \Rightarrow g^k(v) = 0$. Allora $g^{k+1}(v) = g(g^k(v)) = g(0) = 0$.

2) Supp. $\ker g^k = \ker g^{k+1}$ e sia $v \in \ker g^{k+2}$. Allora $g^{k+2}(v) = 0 = g^{k+1}(g(v))$ e perciò $g(v) \in \ker g^{k+1} = \ker g^k$. Dunque $g^k(g(v)) = 0$

ossia $g^{k+1}(v)=0$ e $v\in \operatorname{Ker} g^{k+1}$.

3) Se $g^k(v)=0$, scrivo $0=g^k(v)=g^{k-1}(g(v))$ e ottengo $g(v)\in \operatorname{Ker} g^{k-1}$. ■

Applicheremo queste proprietà nel caso in cui è dato un endomorfismo $f: V\to V$, di cui c'interessa di trovare una forma "canonica", $\lambda\in K$ è un autovalore di $f$, e $g=f-\lambda\, id_V$.

In questo caso $\operatorname{Ker} g = Aut(\lambda)$ e ha dimensione $m_g(\lambda)$.

Vale la seguente

<u>Prop</u> (senza dim.) Sia $g=f-\lambda\, id_V$.

1) Se $m_g(\lambda)=m_a(\lambda)$, nella catena $(*)$ sono tutte uguaglianze.

2) Se $m_g(\lambda)<m_a(\lambda)$ allora

$$Aut(\lambda)=\operatorname{Ker}(f-\lambda\, id_V)=\operatorname{Ker}(g)\subsetneq \operatorname{Ker} g^2$$

e $\dim \operatorname{Ker} g^2\le m_a(\lambda)$.

3) Se $\dim \operatorname{Ker} g^2 = m_a(\lambda)$, da quel momento in poi sono tutte uguaglianze.

Se $\dim \operatorname{Ker} g^2 < m_a(\lambda)$, allora

$$\operatorname{Ker} g \subsetneq \operatorname{Ker} g^2 \subsetneq \operatorname{Ker} g^3 \subseteq \cdots$$

Tutti i sottospazi hanno dim $\leq m_a(\lambda)$, finché si arriva a un sottospazio $\operatorname{Ker} g^k$ dove la catena si stabilizza, e si ha ~~Ker g~~ $\dim \operatorname{Ker} g^k = m_a(\lambda)$.

Poniamo $a = m_a(\lambda)$.

Si usa la notazione:

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Aut}_1(\lambda) = \operatorname{Ker} g = \operatorname{Aut}(\lambda)\\
&\quad \cap\!\!\!\neq\\
&\operatorname{Aut}_2(\lambda) = \operatorname{Ker} g^2\\
&\quad \cap\!\!\!\neq\\
&\quad \vdots\\
&\quad \cap\!\!\!\neq\\
&\operatorname{Aut}_k(\lambda) = \operatorname{Ker} g^k\\
&\quad \vdots \;\; \|\\
&\operatorname{Aut}_a(\lambda) = \operatorname{Ker} g^a
\end{aligned}
$$

: qui la catena si stabilizza certamente ma potrebbe stabilizzarsi prima.

Certamente da $\operatorname{Aut}_a(\lambda) = \operatorname{Ker} g^a$ in poi sono tutte uguaglianze.

**Def.** $\operatorname{Aut}_a(\lambda)$ è detto <u>autospazio generalizzato</u> dell'autovalore $\lambda$.

Consideriamo un automorfismo $f: V \to V$ tale che $p_f(x)$ ha tutte le sue radici in K:

$$p_f(x) = (\lambda_1 - x)^{a_1}(\lambda_2 - x)^{a_2} \cdots (\lambda_m - x)^{a_m}$$ con

$a_i = m_a(\lambda_i)$: $f$ è triangolabile.

Si ha: $n = a_1 + a_2 + \cdots + a_m$.

Per ogni autovalore $\lambda_i$ di $f$ consideriamo il suo autospazio generalizzato $Aut_{a_i}(\lambda_i) = \ker (f - \lambda_i id_V)^{a_i}$: ha dimensione $a_i$.

<u>Teorema</u> Sia $f: V \to V$ triangolabile. Allora

$$V = Aut_{a_1}(\lambda_1) \oplus Aut_{a_2}(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus Aut_{a_m}(\lambda_m).$$

V è somma diretta degli autospazi generalizzati degli ~~suoi~~ autovalori di $f$.

(senza dim.)

Questo teorema servirà a costruire una forma canonica per la matrice di $f$.

# Forma normale di Jordan.

Sia $\lambda$ un autovalore di $f: V \to V$.

Un blocco di Jordan relativo a $\lambda$ è una matrice della forma

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ 1 & \ddots & \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$ triangolare inferiore.

Se $J$ è la matrice di $f$ rispetto a una base $B = (v_1 \dots, v_n)$, ciò significa che:

$f(v_1) = \lambda v_1 + v_2$ $\quad$ $(f - \lambda id)(v_1) = g(v_1) = v_2$

$f(v_2) = \lambda v_2 + v_3$ $\quad$ $(f - \lambda id)(v_2) = g(v_2) = g^2(v_1) = v_3$

$\vdots$

$f(v_{n-1}) = \lambda(v_{n-1}) + v_n$ $\quad$ $(f - \lambda id)(v_{n-1}) = g(v_{n-1}) = g^{n-1}(v_1) = v_n$

$f(v_n) = \lambda v_n$ $\quad$ $v_n$ è autovettore di $\lambda$

$g(v_1) = v_2$

$g^2(v_1) = v_3$

$\vdots$

$g^{n-1}(v_1) = v_n$

$$\boxed{\begin{array}{l} g(v_1) = v_2 \\ g(v_2) = v_3 \\ \\ g(v_{n-1}) = v_n \\ g(v_n) = 0 \end{array}}$$

Il teorema seguente dice che, se $f$ ha tutti gli autovalori in $K$, c'è una base rispetto a cui la matrice di $f$ è composta da blocchi di Jordan.

**Teorema** Forma normale di Jordan.

Sia $f: V \to V$ un endomorfismo t.c.
$p_f(x) = (\lambda_1 - x)^{a_1} \cdots (\lambda_m - x)^{a_m} \in K[x]$.

Allora $\exists$ una base $\mathcal{B}$ di $V$, unione di basi degli autospazi generalizzati $Aut_{a_i}(\lambda_i)$, tale che
$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_k \end{pmatrix},$$

matrice a blocchi, dove ogni $J_i$ è un blocco di Jordan relativo a uno degli autovalori. In tal caso $\mathcal{B}$ è detta una <u>base di Jordan</u>. Inoltre:

1) la forma normale di Jordan della matrice di $f$ è unica a meno di permutazione dei blocchi;

2) il numero di blocchi di ogni autovalore $\lambda_i$ è uguale a $m_g(\lambda_i)$;

3) preso un autovalore $\lambda$, ~~sia~~ $\cancel{B = A - \lambda E_n}$ sia $g = f - \lambda\, id_V$. La massima dimensione di un blocco di Jordan di $f$ è il minimo esponente $k$ per cui $\operatorname{Ker} g^k$ ha dimensione $m_a(\lambda)$. ■

Caso particolare

Se $f$ ha un solo autovalore $\lambda$, con $m_a(\lambda) = n$, la massima dim. di un blocco di J. è il minimo $k$ t.c. $\dim \operatorname{Ker} g^k = n$. Se $f$ corrisponde alla matrice $A$, e $g$ alla matrice $B = A - \lambda E_n$, $\dim \ker g^k = n \iff \ker g^k = V \iff g^k = 0 \iff B^k = O$.

Quindi: la massima dim di un blocco di J. di $\lambda$ è il minimo $k$ t.c. $B^k = O$.

In questo caso $B$ è una matrice detta nilpotente, cioè con una potenza nulla, e $k$ è detto indice di nilpotenza di $B$.

Esempio 1

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{su } \mathbb{R}$$

$P_A(x) = (2-x)^3$, dunque c'è un solo autovalore $\lambda = 2$, con $m_A(2) = 3$; $g = L(A) - 2\, id_{\mathbb{R}^3}$

Sia $B = A - 2E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ : matrice di $g$

$Aut(2) = Aut_1(2) = Ker(B) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid B\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0\}$ ; B ha rango 2 dim $Aut(2) = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x_2 = -x_3 \\ x_1 = 4x_3 - 3x_3 = x_3 \\ (x_3, -x_3, x_3) \end{array}$$

$Ker\, B = \langle (1,-1,1) \rangle = \langle w_1 \rangle$

$Aut_2(2) = Ker\, B^2$

$$B^2 = BB = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$ matrice di $g^2$, ha rango 1, dim $Aut_2(2) = 2$

$Aut_2(2)$: $x_2 + x_3 = 0$.

Costruisco una base di $Aut_2(2)$, formata da

$w_1$ e da un altro vettore $w_2$, per esempio

$w_2 = e_1 = (1,0,0)$.

$Aut_2(2) = \langle (1,-1,1), (1,0,0) \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle$

$$\underset{\dim 1}{Aut_1(2)} \subsetneq \underset{\dim 2 < 3 = m_a(2)}{Aut_2(2)} \subsetneq Aut_3(2).$$

Dunque $Aut_3(2)$ dev'essere tutto $\mathbb{R}^3$.

In effetti $B^3 = BB^2 = O$. Posso completare $w_1, w_2$ a una base di $Aut_3(2)$, per esempio aggiungendo $e_3 = (0,0,1)$.

$$\begin{array}{ll} Aut_1(2) & w_1 = (1,-1,1) \\ \cap\neq & \\ Aut_2(2) & w_1, w_2 = (1,0,0) \\ \cap\neq & \\ Aut_3(2) & w_1, w_2, w_3 = (0,0,1). \end{array}$$

Ora pongo $v_1 = w_3 = (0,0,1)$

$v_2 = g(v_1) = Bv_1 = (3,-1,1)$

$v_3 = g(v_2) = Bv_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} =$

$= (2,-2,2)$ è autovettore.

$\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$

$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = J$ un blocco di Jordan di ordine 3

$$S = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(id_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Si deve avere $J = S^{-1}AS$ ossia $SJ = AS$.

Verifica:

$$SJ = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 4 \\ -1 & -4 & -4 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$AS = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 4 \\ -1 & -4 & -4 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

---

Metodo per costruire una base di Jordan.

Per ogni autovalore $\lambda$ dobbiamo costruire una base di $Aut_a(\lambda)$, dove $a = m_a(\lambda)$.
Costruiamo basi per gli autospazi generalizzati da $Aut_1(\lambda)$ a $Aut_a(\lambda)$, aggiungendo via via vettori.

Base

$\mathrm{Aut}_1(\lambda)$ $\quad w_1, \dots, w_{b_1}$

$\qquad b_1 = m_g(\lambda)$

$\cap \neq$

$\mathrm{Aut}_2(\lambda)$ $\quad w_1, \dots, w_{b_1} \mid w_{b_1+1}, \dots, w_{b_2}$

$\qquad b_2 = \dim \mathrm{Aut}_2(\lambda)$

$\cap \neq$

$\vdots \qquad \vdots$

$\cap \neq$

$\mathrm{Aut}_k(\lambda)$ $\quad w_1, \dots, w_{b_1} \mid w_{b_1+1}, \dots, w_{b_2} \mid \dots \mid \quad \mid \dots w_a$

$\shortparallel$

$\mathrm{Aut}_a(\lambda)$

$w_a \to g(w_a) \to g^2(w_a) \to \cdots \to g^{k-1}(w_a)$

dà un blocco di J.

Ora partiamo dall'ultimo: $w_a$ e lo chiamiamo $v_1$, e consideriamo

$v_1, g(v_1), g^2(v_1), \dots, g^{k-1}(v_1)$ : così andiamo indietro di uno a ogni passo; l'ultimo è un autovettore

Questi vettori danno un blocco di J. di ordine k

Ora cancello da ogni riga un vettore, e ricomincio dal basso, fino a esaurire tutti i vettori. Sono $b_1$ blocchi di J.

Esempio 2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$P_A(x) = (2-x)^2(3-x)^2$

$\lambda_1 = 2, \quad a_1 = 2$

$\lambda_2 = 3, \quad a_2 = 2$

Sia $B = A - 2E_4$, $\quad C = A - 3E_4$.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ha rg 3

$\Rightarrow mg(2) = 4-3 = 1$

$\Rightarrow$ un blocco di J. di ordine 2, per $\lambda_1 = 2$.

$$C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ ha rg 3

$\Rightarrow mg(3) = 1$

$\Rightarrow$ un blocco di J. di ordine 2 per $\lambda_2 = 3$.

Quindi la forma normale di J. di A è

$$J = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & & \\ 1 & 2 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline & & 3 & 0 \\ \multicolumn{2}{c|}{0} & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Base di Jordan:

$Aut(2) = \langle (1,0,0,0) \rangle = \langle e_1 \rangle$

$\cap$

$Aut_2(2) = \langle e_1, e_2 \rangle$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$e_2 = v_1$, $v_2 = Bv_1 = (-1,0,0,0)$

$Aut(3) = \langle (1,0,1,0) \rangle$

$\cap$

$Aut_2(3) = \langle (1,0,1,0), (-2,1,0,1) \rangle$

$$C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 + x_3 \\ x_2 = x_4 \end{cases}$$

$(-2x_4 + x_3, x_4, x_3, x_4) =$

$= x_3(1,0,1,0) + x_4(-2,1,0,1)$

$v_3 = (-2,1,0,1)$

$v_4 = Cv_3 = (1,0,1,0)$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id)$$

VERIFICARE

Esempio 3    $A$ $4\times 4$, $\lambda$ autovalore con $m_a(\lambda)=4$

Le possibilità per la forma canonica di J. di $A$ sono:

a) $m_g(\lambda)=m_a(\lambda)=4 \Rightarrow$ $A$ è diagonalizzabile:

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} \lambda & & & \\ \hline & \lambda & & \\ \hline & & \lambda & \\ \hline & & & \lambda \end{array}\right)$$

4 blocchi di J. $1\times 1$

b) $m_g(\lambda)=3 \Rightarrow$ 3 blocchi di J. di ordini 1, 1, 2

$$\left(\begin{array}{c|c|cc} \lambda & & & \\ \hline & \lambda & & \\ \hline & & \lambda & 0 \\ & & 1 & \lambda \end{array}\right)$$

c) $m_g(\lambda)=2 \Rightarrow$ 2 blocchi di J. di ordini 2, 2 opp. 1, 3

c1)
$$\left(\begin{array}{cc|cc} \lambda & 0 & & \\ 1 & \lambda & & \\ \hline & & \lambda & 0 \\ & & 1 & \lambda \end{array}\right)$$

c2)
$$\left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & & & \\ \hline & \lambda & & \\ & 1 & \lambda & \\ & 0 & 1 & \lambda \end{array}\right)$$

Per capire in che situazione ci si trova bisogna calcolare $B$ e le sue potenze. Si det. il minimo $h$ t.c. $B^h=0$: $h$ è il massimo ordine di un blocco di J.

a) $B^2=0$, c2) $B^2\neq 0$, $B^3=0$

d) $m_g(\lambda)=1 \Rightarrow$ 1 blocco di J

$$\begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ 1 & \lambda & & \\ & 1 & \lambda & \\ 0 & & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Caso numerico:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad m_a(2) = 4$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad m_g(2) = 4 - \operatorname{rg} B = 2$$

Siamo in uno dei casi c)

$$B^2 = \begin{pmatrix} & & \\ & 0 & \\ & & \end{pmatrix} \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} B^2 = 4$$

$$\operatorname{Ker} B = \langle \underset{w_1}{\overset{\shortparallel}{e_1}}, \underset{w_2}{\overset{\shortparallel}{(0,1,1,0)}} \rangle$$

$\cap$

$$K^4 = \operatorname{Ker} B^2 = \langle w_1, w_2, \underset{w_3}{\overset{\shortparallel}{e_3}}, \underset{w_4}{\overset{\shortparallel}{e_4}} \rangle$$

Base di $J_B$: $v_1 = e_4$, $v_2 = B e_4 = (0,1,1,0)$ : I blocco

$v_3 = e_3$, $v_4 = B e_3 = (1,0,0,0) = e_1$ II blocco

Allora $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & & \\ 1 & 2 & & \\ \hline & & 2 & 0 \\ & & 1 & 2 \end{array}\right)$.

Si potevano scambiare i primi 2 con i secondi 2 vettori di base.

<u>Altro esempio</u>

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad p_A(x) = (1-x)^4 : \lambda = 1$$

con $a = 4$.

$$B = A - E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$ ha rg 2, $mg(1) = 4-2$ $\Rightarrow$ 2 blocchi.

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$ ha rg 1

$\dim Aut_2(1) = 3$

$$B^3 = 0$$

$Aut_1(1)$: $\quad w_1 = (3,2,3,0) \quad w_2 = \cancel{(-3,-2,0,+3)}$

$Aut_2(1)$: $\quad w_1, \cancel{w_2} \mid \cancel{w_3 = (0,1,0,0)}$

$Aut_3(1)$ $\quad w_1, \cancel{w_2} \mid \cancel{w_3} \mid \cancel{w_4 = (1\ 0\ 0\ 0)}$

blocco $3\times 3$ $\begin{cases} v_1 = w_4 \\ v_2 = B w_4 = (1\ 1\ 1\ 0) \\ v_3 = B v_2 = (0\ 0\ -1\ -1) \end{cases}$ devo cancellare un vettore da $Aut_2$ e da $Aut_1$.

blocco $1\times 1$ $[\ v_4 = w_1$ : l'unico rimasto; è un autovettore.

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Verifica: $J = S^{-1} A S$ ossia $SJ = AS$.

__Esercizio__

Mostrare che le seguenti matrici sono simili, determinando la forma canonica di J.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio

Diagonalizzare, se possibile, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad p_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 1 \\ -1 & -x \end{vmatrix} = x^2+1 = (x+i)(x-i).$$

$$J = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Aut}(i) = \left\{ (x,y) \,\middle|\, \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1+i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x + iy = 0$ $\qquad \mathrm{Aut}(i) = \langle (-i, 1) \rangle = \langle (i, -1) \rangle$

$$\mathrm{Aut}(-i): \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1+i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad x - iy = 0$$

$(i, 1)$

$$J = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = S^{-1}AS, \text{ con } S = \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\det(S) = i + i = 2i \qquad S^{-1} = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{-i}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i & -1 \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

## Esercizio

Diagonalizzare, se possibile, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad p_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 1 \\ -1 & -x \end{vmatrix} = x^2 + 1 = (x+i)(x-i).$$

$$J = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Aut}(i) = \left\{ (x,y) \,\middle|\, \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1+i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x + iy = 0 \qquad \mathrm{Aut}(i) = \langle (-i, 1) \rangle = \langle (i, -1) \rangle$

$$\mathrm{Aut}(-i): \quad \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1+i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad x - iy = 0$$

$(i, 1)$

$$J = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = S^{-1} A S, \quad \text{con } S = \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\det(S) = i + i = 2i \qquad S^{-1} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{-i}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & -1 \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

## Esercizio  Tema d'esame 26/11/18

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & b & c \\ 0 & 2 & 1 & d \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \lambda = 2,\ m_a(\lambda) = 4$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad rg B = \begin{cases} 3 & \text{se } a \neq 0 \\ 2 & \text{se } a = 0 \end{cases}$$

$$\dim Aut(2) = m_g(2) = \begin{cases} 1 & \text{se } a \neq 0 \\ 2 & \text{se } a = 0 \end{cases}$$

Caso $a \neq 0$ : un blocco di $J$

$$J = \begin{pmatrix} 2 & & & 0 \\ 1 & 2 & & \\ 0 & 1 & 2 & \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad Aut(2) = \langle e_1 \rangle$$

~~poss~~

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & ad+b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ha } rg\ 2$$

$Aut_2(2) : x_3 = x_4 = 0 \qquad Aut_2(2) = \langle e_1, e_2 \rangle$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Aut_3(2) = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$$

$B^4 = 0 \qquad Aut_4(2) = \mathbb{R}^4 = \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle$

$\mathcal{B}$ :

$v_1 = e_4$

$v_2 = Be_4 = (c, d, 1, 0)$

$v_3 = Bv_2 = (ad+b, 1, 0, 0)$

$v_4 = Bv_3 = (a, 0, 0, 0)$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & c & ad+b & a \\ 0 & d & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Caso $a = 0$ ; 2 blocchi di $J$.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b & c \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Aut(2) = \langle e_1, \cancel{e_2} \rangle$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Aut_2(2) = \langle e_1, e_2, \cancel{e_3} \rangle$$

$$B^{3} = 0 \quad \to \text{indice di nilpotenza}$$

$$Aut_3(2) = \langle e_1, e_2, e_3, \cancel{e_4} \rangle$$

$B$: $v_1 = e_4$

$v_2 = Be_4 = (c, d, 1, 0)$

$v_3 = Bv_2 = (b, 1, 0, 0) \in Aut(2)$

danno il 1° blocco

$v_4 = e_1$

$$J = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & 1 & \\ \hline & & & 1 \end{array}\right) \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & c & b & 1 \\ 0 & d & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Esercizio** Tema d'esame 11/7/18 e 5/9/18

Siano $1 \le m \le n$. Dare un esempio di una matrice $n \times n$ che abbia un autovalore $\lambda$ ~~di~~ con $m_a(\lambda) = n$ e $m_g(\lambda) = m$.

$m_g(\lambda) = m \Rightarrow m$ blocchi di $J$.

Per es. $m-1$ blocchi $1 \times 1$

1 blocco $n - m + 1$

$$\begin{array}{c} \\ m-1 \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right. \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{c|c|c|ccc} \lambda & & & & & \\ \hline & \lambda & & & & \\ \hline & & \ddots \; \lambda & & & \\ \hline & & & \lambda & & \\ & & & 1 & \ddots & \\ & & & 0 & 1 & \lambda \end{array}\right)$$