ESERCIZI DI GEOMETRIA 1, FOGLIO 10

Trieste, 16 dicembre 2018

1. Dimostrare che la matrice reale

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile, poi trovare una matrice S tale $S^{-1}AS$ sia diagonale. S è unica?

2. Sia A una matrice triangolare della forma

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a & b \\ 0 & \lambda_2 & c \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Determinare quali dei coefficienti a, b, c devono essere nulli affinché la matrice A sia diagonalizzabile, nei seguenti casi:

- tutti i λ_i sono distinti;
- tutti i λ_i sono uguali;
- $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$;
- $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$.

.

3. Delle seguenti matrici, dire quali sono in forma normale di Jordan, e quali non lo sono:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$H = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

4. (i) Per ciascuna delle seguenti matrici A, determinare la forma normale di Jordan, una base di Jordan e una matrice S tale $S^{-1}AS$ sia in forma normale di Jordan:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(ii) Stessa domanda del punto (i) per ciascuna delle seguenti matrici, dove a, b, c sono parametri reali:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & b \\ 0 & 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Dare condizioni necessarie e sufficienti sui coefficienti $a, \ldots, f$ affinchè la forma normale di Jordan della seguente matrice abbia un unico blocco di Jordan. In tale caso determinare anche una base di Jordan e la matrice S del cambiamento di base come negli esercizi precedenti:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$