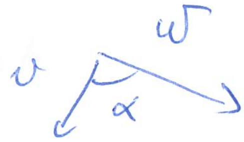
PRODOTTI SCALARI

La nozione di prodotto scalare in uno spazio vettoriale sta alla base di tutti i concetti di carattere metrico: lunghezza, angolo, distanza, ortogonalità. Si lavora su $\mathbb{R}$ o su $\mathbb{C}$.

Esempi fondamentali

1) Prodotto scalare canonico (o standard) in $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^n$ in generale.

La seguente formula è usata in geometria elementare e in fisica:



$$\langle v, w \rangle = |v||w| \cos \alpha$$

prodotto scalare — lunghezze dei vettori — angolo di v e w

Altro modo per introdurlo:

se $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$\langle v, w \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 = {}^t v \, w = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

prod. righe per colonne

Questo si può estendere a $\mathbb{R}^n$:

$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ $\quad \langle v, w \rangle = {}^t v w = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

2) prodotto scalare canonico (o standard) su $\mathbb{C}^n$

$v, w \in \mathbb{C}^n$, $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

$$\langle v, w \rangle = \bar{x}_1 y_1 + \bar{x}_2 y_2 + \dots + \bar{x}_n y_n = \sum \bar{x}_i y_i$$

dove $\bar{x}_i$ denota il coniugato di x_i.

Ponendo $\bar{v} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}$, si ha $\langle v, w \rangle = {}^t\bar{v}\, w$.

Ricordiamo che il coniugio è un'applicazione

$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ $\mathbb{R}$-lineare ma antilineare su $\mathbb{C}$.

$z \longrightarrow \bar{z}$

$z_1 + z_2 \longrightarrow \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

$\lambda z \longrightarrow \overline{\lambda z} = \bar{\lambda} \bar{z}$

Se denoto $J : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ il coniugio, osservo che

$J(z_1 + z_2) = J(z_1) + J(z_2)$ conserva la somma

$J(\lambda z) = \bar{\lambda} J(z)$ non conserva il prodotto per uno scalare di $\mathbb{C}$.

<u>Definizione</u> di prodotto scalare

Sia V un K-spazio vettoriale, con $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Un prodotto scalare su V è un'applicazione

$\langle\ ,\ \rangle : V \times V \longrightarrow K$ tale che

$(v, w) \longrightarrow \langle v, w \rangle \in K$

1) se $K = \mathbb{R}$:

a) è <u>bilineare</u> cioè $\forall\, v, v', w, w' \in V,\ \lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$

$$\langle v, \lambda w + \lambda' w' \rangle = \lambda \langle v, w \rangle + \lambda' \langle v, w' \rangle ;$$

$$\langle \lambda v + \lambda' v', w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle + \lambda' \langle v', w \rangle ;$$

b) è <u>simmetrica</u> cioè $\forall\, v, w \in V$

$$\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle ;$$

c) è <u>definita positiva</u>, cioè $\forall\, v \in V$

$\langle v, v \rangle \geq 0$ e $\langle v, v \rangle = 0$ se e solo se

$v = 0$.

Dunque il prodotto scalare nel caso reale è una forma bilineare simmetrica definita positiva.

Oss. che dalla bilinearità segue che

$$\langle v, 0 \rangle = 0 = \langle 0, v \rangle \quad \forall\, v \in V.$$

2) se $K = \mathbb{C}$:

a) è sesquilineare cioè $\forall\, v, v', w, w' \in V,\ \lambda, \lambda' \in \mathbb{C}$

$$\langle v, \lambda w + \lambda' w' \rangle = \lambda \langle v, w \rangle + \lambda' \langle v, w' \rangle$$

$$\langle \lambda v + \lambda' v', w \rangle = \bar{\lambda} \langle v, w \rangle + \bar{\lambda}' \langle v', w \rangle$$

è lineare nel ~~primo~~ secondo argomento e antilineare nel primo;

b) è <u>hermitiana</u> cioè $\forall\, v, w \in V$

$$\langle w, v \rangle = \overline{\langle v, w \rangle};$$

osserviamo che di conseguenza

$$\langle v, v \rangle = \overline{\langle v, v \rangle} \text{ e perciò } \langle v, v \rangle \in \mathbb{R} \ \forall v.$$

c) è definita positiva, ossia $\forall v \in V$

$\langle v, v \rangle \geq 0$ e $\langle v, v \rangle = 0$ se e solo se $v = 0$.

Questo ha senso perché $\langle v, v \rangle$ è reale.

Come nel caso reale, dalla sesquilinearità segue che $\langle v, 0 \rangle = 0 = \langle 0, v \rangle$.

<u>Osservazione</u> La linearità nel secondo argomento + proprietà hermitiana sono sufficienti a provare la sesquilinearità nel primo argomento:

$$\langle \lambda v + \lambda' v', w \rangle = \overline{\langle w, \lambda v + \lambda' v' \rangle} = \overline{\lambda \langle w, v \rangle + \lambda' \langle w, v' \rangle} =$$

$$= \bar{\lambda}\, \overline{\langle w, v \rangle} + \bar{\lambda}'\, \overline{\langle w', v' \rangle} = \bar{\lambda} \langle v, w \rangle + \bar{\lambda}' \langle v', w' \rangle.$$

Dunque il prodotto scalare di due vettori è un <u>numero</u>.

Def. <u>Spazio vettoriale euclideo</u> è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ dotato di un prodotto scalare. Analogamente, <u>spazio vettoriale unitario</u> è uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ dotato di un prodotto scalare.

<u>Esercizio</u> I prodotti scalari canonici su $\mathbb{R}$ e su $\mathbb{C}$ sono prodotti scalari secondo la defin.

Rappresentazione matriciale

Le forme bilineari, su $\mathbb{R}$, e quelle sesquilineari, su $\mathbb{C}$, si possono rappresentare mediante matrici, una volta fissata una base.

Sia $b : V \times V \longrightarrow K$ una tale forma, con $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Sia $B = (v_1, \ldots, v_n)$ una base di V.

Def. matrice di b rispetto alla base B è la matrice $n \times n$ $M_B(b) = \left(b(v_i, v_j) \right)_{i,j=1,\ldots,n}$:

al posto d'indici i,j c'è $b(v_i, v_j)$.

Se
$v = x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n$,
$w = y_1 v_1 + \ldots + y_n v_n$,

si ha nel caso complesso (quello reale è caso partic.)

$$b(v,w) = b\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i, \sum_{j=1}^{n} y_j v_j\right) = \text{sesquilinearità}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \bar{x}_i y_j b(v_i, v_j) = \sum_{i,j=1}^{n} \bar{x}_i b(v_i,v_j) y_j .$$

Siano $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ i vettori colonna delle coordinate di v e w rispetto alla base B.

Si ha: $\quad {}^t\bar{x} M_B(b) y = \underbrace{(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}_{1\times n} \underbrace{M_B(b)}_{n\times n} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{n\times 1} =$

$$= \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i b(v_i,v_1), \dots, \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i b(v_i,v_n)\right)}_{1\times n} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{n\times 1} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \bar{x}_i b(v_i,v_j) y_j = b(v,w).$$

> Dunque $b(v,w) = {}^t\bar{x} M_B(b) y$,
> dove x, y sono ~~le~~ i vettori colonna delle coordinate di v e w rispetto a B.

Se $K = \mathbb{R}$ si ottiene $b(v,w) = {}^t x M_B(b) y$.

Se la forma considerata b è simmetrica reale (risp. hermitiana complessa), la matrice $M_B(b)$ gode di particolari proprietà.

Ricordiamo che una matrice quadrata A è detta simmetrica se ${}^tA = A$.

Def. Una matrice quadrata complessa si dice hermitiana se ${}^t\bar{A} = A$ o, equivalentemente, ${}^tA = \bar{A}$ (dove $\bar{A}$ denota la matrice dei coniugati degli elementi di A).

Esempi

$\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$ è hermitiana, $\begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 2i & i \end{pmatrix}$ è simmetrica non hermitiana, $\begin{pmatrix} 2 & i+1 & 7-i \\ 1-i & 1 & 0 \\ 7+i & 0 & 0 \end{pmatrix}$ è hermitiana.

Prop. Se b è una forma bilineare simmetrica, $M_B(b)$ è simmetrica. Se b è sesquilineare hermitiana, $M_B(b)$ è hermitiana.

Dim. Nel primo caso $b(v_i, v_j) = b(v_j, v_i)$, nel secondo $b(v_i, v_j) = \overline{b(v_j, v_i)}$.

Ogni matrice simmetrica reale (risp. hermitiana complessa) induce una forma bilineare simmetrica (risp. sesquilineare hermitiana).

Infatti:

Prop. Sia A una matrice quadrata.

1) A è simmetrica reale se e solo se

$b: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ t.c. $b(x,y) = {}^t x A y$

è una forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^n$.

2) A è hermitiana complessa se e solo se

$b: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ tale che $b(x,y) = {}^t\overline{x} A y$

è una forma sesquilin. hermitiana.

Dim. Caso 2) (il caso 1) si può vedere come caso particolare). Un'implicazione è stata già fatta.

Sia A matrice hermitiana, verifichiamo che b è sesquil. hermitiana.

- 2° argomento: linearità

$b(x, \lambda y + \mu y') = {}^t\overline{x} A (\lambda y + \mu y') =$ prop. distrib.

$= {}^t\overline{x} A(\lambda y) + {}^t\overline{x} A (\mu y') =$ prop. prod. di matrici

$= \lambda({}^t\overline{x} A y) + \mu({}^t\overline{x} A y') =$

$= \lambda\, b(x,y) + \mu\, b(x,y').$

- 1° argomento

$$b(\lambda x+\mu x', y) = {}^t\overline{(\lambda x+\mu x')}\, A y \overset{\text{prop. coniugio}}{=}$$

$$= {}^t(\bar\lambda \bar x + \bar\mu \bar x')\, A y \underset{\text{prop. distrib.}}{=} \bar\lambda\, {}^t\bar x A y + \bar\mu\, {}^t\bar x' A y =$$

$$= \bar\lambda\, b(x,y) + \bar\mu\, b(x',y)$$

- hermitiana

$$b(y,x) = {}^t\bar y A x \underset{\substack{\text{matrice } 1\times 1 \text{ coincide} \\ \text{con la sua trasposta}}}{=} {}^t({}^t\bar y A x) = {}^t x\, {}^t A\, \bar y \underset{\bar{\bar z} = z}{=}$$

$$= \overline{{}^t\bar x\, {}^t\bar A\, y} \underset{A \text{ è herm.}}{=} \overline{{}^t\bar x A y} = \overline{b(x,y)}.$$

<u>Oss.</u> Se B, A sono matrici h.c.
${}^t\bar x B y = {}^t\bar x A y \quad \forall\, x, y \in \mathbb{C}^n$, allora $B = A$.

<u>Dim.</u> Sia $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonica.

Allora $\quad {}^t\bar e_i B e_j = b_{ij}$
$\qquad\qquad\quad \parallel$
$\qquad\quad {}^t\bar e_i A e_j = a_{ij}$.

Si ha dunque biezioni tra matrici simm. (o herm.) e forme bilin. simm. (o sesq. herm.) su $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$. Analogo su V se è fissata una base.

Esempi

1) Se $\mathcal{B}$ è la base canonica (di $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$) e b il prodotto scalare standard:

$b(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ e dunque $M_{\mathcal{B}}(b) = E_n$.

2) Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ simmetrica reale.

La forma bilineare corrisp. risp. a $\mathcal{B}$ su $\mathbb{R}^3$ è t.c. $b(e_1, e_1) = 2$, $b(e_1, e_2) = 1 = b(e_2, e_1)$,

$b(e_1, e_3) = 0 = b(e_3, e_1)$, $b(e_2, e_2) = 1$,

$b(e_2, e_3) = 0 = b(e_3, e_2)$, $b(e_3, e_3) = 3$.

$$b((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = \sum_{i,j=1}^{3} x_i y_j b(e_i, e_j) =$$

$$= 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 + 3x_3y_3 \; ;$$

per vedere se è un prodotto scalare consideriamo

$$b((x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3)) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 3x_3^2 =$$

$$= x_1^2 + (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) + 3x_3^2 =$$

$$= x_1^2 + (x_1 + x_2)^2 + 3x_3^2 \; : \; \text{è} \geq 0 \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

È $= 0 \iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow b$ è un prodotto scalare.

3) Sia $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; definisce

$$\langle x, y \rangle = {}^t x S y = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3,$$

$$\langle x, x \rangle = x_1^2 + 2 x_1 x_2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 0 \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

$$\langle x, x \rangle = 0 \iff \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \iff$$

$\iff (x_1, x_2, x_3) \in \langle (1, -1, 0) \rangle$

sottospazio generato da $(1, -1, 0)$.

Non è definito positivo.

4) Sia $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; B definisce

$$b(x, y) = x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_3 y_3$$

$b(x, x) = 2 x_1 x_2 + x_3^2$: non è sempre ≥ 0

infatti per esempio $b(e_1, e_1) = 0$

$b((1, -1, 0), (1, -1, 0)) = -2$.

Non è def. pos.

5) $V = \mathbb{R}[t]$ polinomi a coeff. reali, $p, q \in V$.

$\langle p, q \rangle \overset{\text{def.}}{=} \int_0^1 p(t) q(t) \, dt$: è un prodotto scalare su V.

6) Sia $V = M(m \times n, \mathbb{R})$.

Def. $b: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ ponendo

$b(A, B) = tr({}^tB A)$ traccia del prodotto.

Verif. che è bilineare simm.

$b(A, A) = tr({}^tA A)$

Al posto d'indici ii ${}^tAA$ ha $(a_{1i} \cdots a_{ni}) \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} =$

$= a_{1i}^2 + a_{2i}^2 + \dots + a_{ni}^2$.

Dunque $b(A, A) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$: è la somma dei quadrati di tutti gli elementi di A. Dunque b è un prodotto scalare.

Sia V un K-spazio vettoriale, $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

<u>Def.</u> un'applicazione $\| \cdot \| : V \longrightarrow \mathbb{R}$, $v \longrightarrow \|v\|$

è una <u>norma</u> su V se:

1) $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$, $\forall \lambda \in K$, $v \in V$

2) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ disuguaglianza triangolare

3) $\|v\| = 0 \iff v = 0$.

<u>Oss.</u> Dalla def. segue subito che $\|v\| \geq 0$

$\forall$ vettore v.

Infatti $\|v - v\| = \|0\| = 0$ per la 3).

Ma $0 = \|v - v\| \underset{\text{per la 2)}}{\leq} \|v\| + \|-v\| \underset{\text{per la 1)}}{=} \|v\| + |-1|\,\|v\| =$

$= 2\|v\| \implies \|v\| \geq 0$.

Esempi in $\mathbb{R}^n$

1) norma euclidea

$\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$

dim. poi che è una norma

2) norma 1:

$\|(x_1, \dots, x_n)\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$

somma dei valori assoluti.

Per dim. che è una norma, si usa se

$|x+y| \leq |x| + |y|$.

3) norma ∞:

$\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \{|x_i|\}$ massimo dei valori assoluti

In $\mathbb{C}^n$:

La norma standard:

$\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2} = \sqrt{\bar{x}_1 x_1 + \dots + \bar{x}_n x_n}$.

e ~~ee~~

Relazione fra prodotto scalare e norma:
a ogni prodotto scalare si può associare una norma ma non tutte le norme vengono da un prodotto scalare (solo se vale la legge del parallelogramma, si vedrà in Analisi).

Prop. Sia $\langle\,,\,\rangle$ un prodotto scalare su V, su $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Allora $\|v\| \overset{def.}{=} \sqrt{\langle v,v\rangle}$ è una norma su V.

Dim.
1) e 3) sono facili, vediamo la 1) nel caso complesso.

$$\|\lambda v\| = \sqrt{\langle \lambda v, \lambda v\rangle} = \sqrt{\bar{\lambda}\lambda\langle v,v\rangle} = \sqrt{|\lambda|^2\langle v,v\rangle} =$$

$$\overset{|\lambda| \geq 0}{=} |\lambda| \cdot \sqrt{\langle v,v\rangle} = |\lambda|\,\|v\|.$$

Per dim. la 2) serve il seguente teorema.

Teorema (disuguaglianza di CAUCHY-SCHWARZ)
Sia $\langle\,,\,\rangle$ un prodotto scalare su V.
Allora $\forall\, v,w \in V$ si ha:

$$|\langle v,w\rangle| \leq \|v\|\,\|w\|.$$

- valore assoluto su $\mathbb{R}$
- modulo su $\mathbb{C}$

Inoltre vale l'uguaglianza se e solo se v, w sono linearmente dipendenti.

Dim. caso complesso (quello reale è un caso particolare di questo).

- Se $w = 0$: $\underbrace{|\langle v, 0\rangle|}_{=0} \leq \|v\| \|0\| = 0$:

è vero con uguaglianza.

- Sia $w \neq 0$. consideriamo $\lambda := \dfrac{\langle v, w\rangle}{\underbrace{\langle w, w\rangle}_{\neq 0}}$.

Si ha:

$$0 \leq \langle v - \lambda w, v - \lambda w\rangle \underset{\text{sesquilinearità}}{=} \langle v, v\rangle - \lambda \langle v, w\rangle -$$

$$- \bar{\lambda}\langle w, v\rangle + \bar{\lambda}\lambda\langle w, w\rangle = \text{ sostituisco il valore di } \lambda$$

$$= \langle v, v\rangle - \frac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle}\langle v, w\rangle - \frac{\overline{\langle v, w\rangle}}{\underset{\langle w,w\rangle \in \mathbb{R}}{\langle w, w\rangle}}\overline{\langle w, w\rangle} +$$

$$+ \frac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle}\frac{\overline{\langle v, w\rangle}}{\cancel{\langle w, w\rangle}}\cancel{\langle w, w\rangle} = \|v\|^2 - \frac{|\langle v, w\rangle|^2}{\|w\|^2}$$

Moltiplico per $\|w\|^2$ che è > 0 :

$0 \leq \|v\|^2 \|w\|^2 - |\langle v, w\rangle|^2$ ossia

$$|\langle v,w\rangle|^2 \le \|v\|^2\|w\|^2$$

$$|\langle v,w\rangle| \le \|v\|\,\|w\|.$$

Vale l'uguaglianza se e solo se

$\langle v-\lambda w, v-\lambda w\rangle = 0 \iff v-\lambda w = 0$

$\iff v,w$ sono lin. dipendenti.

Ora dim. della 2) della norma, disug. triang.:

$\|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w\rangle = \langle v,v\rangle + \langle v,w\rangle +$

$+ \langle w,v\rangle + \langle w,w\rangle = \|v\|^2 + \langle v,w\rangle + \overline{\langle v,w\rangle} + \|w\|^2 =$

$= \|v\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle v,w\rangle + \|w\|^2 \le$ (*)

$\le \|v\|^2 + 2|\langle v,w\rangle| + \|w\|^2 \le$ Cauchy-Schwarz

$\le \|v\|^2 + 2\|v\|\,\|w\| + \|w\|^2 =$

$= (\|v\| + \|w\|)^2$ da cui la tesi.

Abbiamo usato che se $z = a+ib \in \mathbb{C}$, allora $\mathrm{Re}(z) \le |z|$. Infatti:

$\mathrm{Re}(z) = a \le |a| = \sqrt{a^2} \le \sqrt{a^2+b^2} = |z|.$

Vale l'= sse z è reale e positivo.

Dunque $\|v+w\| = \|v\| + \|w\|$ se v,w sono lin. dip. con $\langle v,w\rangle$ reale e >0.