Insieme e funzione di Cantor

Definiamo l'insieme di Cantor C come l'insieme dei numeri $x \in [0,1]$ che hanno almeno una rappresentazione ternaria

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 3^{-n}$$

$a_n \in \{0,1,2\}$

con coefficienti $a_n \neq 1 \ \forall n$.

Osserviamo che, se $x \in C$ ha doppia rappresentazione ternaria, solo una delle due rappresentazioni ha i tutti i coefficienti diversi da 1: sappiamo infatti che x deve essere della forma $x = q3^{-N}$ con q, N interi e le due rappresentazioni sono

$$x = \sum_{n=1}^{N-1} a_n 3^{-n} + a_N 3^{-N} \ ,$$

$$x = \sum_{n=1}^{N-1} a_n 3^{-n} + (a_N - 1)3^{-N} + \sum_{n=N+1}^{\infty} 2 \cdot 3^{-n} \ ,$$

quindi a_N può assumere solo i valori 1 e 2 , perchè deve essere $a_N - 1 \geq 0$. Se $a_N = 1$, solo la seconda rappresentazione può avere tutti i coefficienti diversi da 1, e viceversa se $a_N = 2$.

Osserviamo inoltre che se $x \in C$ ha due rappresentazioni ternarie, quella con un coefficiente $=1$ ha tutti i restanti diversi da 1 (ovvero: se $x \in [0,1]$ ha una rappresentazione ternaria con almeno due coefficienti $=1$, allora $x \notin C$).

Proveremo le seguenti proprietà dell'insieme di Cantor:

(I) C coincide con l'insieme che si ottiene col seguente procedimento: si suddivide $[0,1]$ in tre segmenti uguali e se ne rimuove quello di mezzo: $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$, si suddivide gli intervalli che restano ciascuno in tre parti uguali e si rimuovono quelle di mezzo: $(\frac{1}{9},\frac{2}{9})$ e $(\frac{7}{9},\frac{8}{9})$, e così via. In altre parole:

$$[0,1] \setminus C = (\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3}) \cup (\tfrac{1}{9},\tfrac{2}{9}) \cup (\tfrac{7}{9},\tfrac{8}{9}) \ldots \ .$$

(II) C è un chiuso e $\mu(C) = 0$.

(III) Ogni punto $x\in C$ è di accumulazione per C .

(IV) C non ha punti interni.

(V) C ha la cardinalità del continuo.

Dimostrazione di (I) Supponiamo $x\in[0,1]\setminus C$, quindi ogni rappresentazione ternaria di x ha almeno un coefficiente $=1$, sia M il minimo indice tale che $a_M=1$. Osserviamo che se $x=q3^{-N}$, e quindi ha due rappresentazioni ternarie, risulta che M non dipende dalla rappresentazione scelta e vale $M<N$, infatti se così non fosse si otterrebbe $x\in C$. Quindi, in ogni caso, x si può scrivere

$$x=\sum_{n=1}^{M-1} a_n3^{-n}+3^{-M}+r_M ,$$

dove $a_1,\ldots,a_{M-1}$ hanno valore 0 o 2 e:

$$r_M=\sum_{n=M+1}^{\infty} a_n3^{-n} \text{ con } a_n\in\{0,1,2\} .$$

Osserviamo che se i coefficienti di r_M fossero tutti 0 o tutti 2 si avrebbe $x\in C$, pertanto: $0<r_M<3^{-M}$. In altre parole, posto

$$\sum_{n=1}^{M-1} a_n3^{-n}=3^{1-M}\sum_{n=1}^{M-1} a_n3^{M-1-n}=p3^{1-M} ,$$

abbiamo

$$x\in(p3^{1-M}+3^{-M},p3^{1-M}+2\cdot3^{-M}) .$$

Cioè, fatta la partizione di $[0,1]$ in intervallini di ampiezza 3^{1-M} , x sta nel terzo di mezzo di uno di questi intervallini, e quindi, in uno degli intervalli che si rimuovono nel procedimento illustrato prima. Viceversa, se x sta in uno degli intervalli rimossi, si ha

$$x\in(p3^{1-M}+3^{-M},p3^{1-M}+2\cdot3^{-M})$$

per opportuni interi p, M . Pertanto si può procedere a ritroso e ottenere che $x\notin C$.□

Dimostrazione di (II) C è il complementare, nel chiuso $[0,1]$, di una unione di intervalli aperti, quindi è chiuso e quindi è anche misurabile. Per la proprietà di additività numerabile della misura, abbiamo:

$$mC = m([0,1]) - m((\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3})) - m((\tfrac{1}{9},\tfrac{2}{9})) - m((\tfrac{7}{9},\tfrac{8}{9})) - \dots \ .$$

Osserviamo, procedendo per induzione, che per ottenere C , al passo n-simo si rimuovono 2^{n-1} intervallini di lunghezza 3^{-n} , $n=1,2,\dots$. Pertanto:

$$mC = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}3^{-n} = 1 - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{3}\right]^n = 1 - \frac{1}{2}\,\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 0 \ .\square$$

<u>Dimostrazione</u> <u>di</u> <u>(III)</u> Sia $x \in C$ e sia $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 3^{-n}$ la rappresentazione ternaria con tutti i coefficienti diversi da 1. Per ogni intero N poniamo $c_N = 0$ se $a_N = 2$, $c_N = 2$ se $a_N = 0$, e definiamo

$$x_N = \sum_{n=1}^{N-1} a_n 3^{-n} + c_N 3^{-N} + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n 3^{-n} \ ,$$

ovviamente, abbiamo: $x_N \in C$, inoltre $x - x_N = (a_N - c_N) = \pm 2\cdot 3^N$ e quindi: $x_N \neq x$ $\forall N$, $x_N \to x$ per $N \to \infty$.□

<u>Dimostrazione</u> <u>di</u> <u>(IV)</u> La facciamo in due modi diversi:

<u>1ª</u> <u>versione</u> se C avesse un punto interno x_0 , esisterebbe $r>0$ tale che l'intervallo $I_r = (x_0 - r, x_0 + r)$ è contenuto in C , pertanto: $2r = m(I_r) \leq m(C)$, il che è assurdo perchè C ha misura nulla.

<u>2ª versione</u> proviamo che $F = [0,1]\setminus C$ è denso in $[0,1]$. Dato che F è aperto è sufficiente provare che F è denso in C . Se arrestiamo il procedimento di costruzione di F al passo n-simo, osserviamo che C è contenuto nell'unione di 2^n intervallini chiusi disgiunti di ampiezza 3^{-n}, quindi, $\forall x \in C$, $\forall n$, si trova $y_n \in F$ che dista da x per meno di 3^{-n} , cioè: $C \subseteq \bar{F}$.□

<u>Esercizio</u> Definiamo D come l'insieme ottenuto da $[0,1]$ rimuovendo l'intervallo di centro $\frac{1}{2}$ di ampiezza $\frac{1}{10}$, e poi rimuovendo, dai due intervalli che restano, gli intervallini <u>con</u> <u>gli</u> <u>stessi</u> <u>centri</u> e che hanno lunghezza $\frac{1}{100}$, e così via. Abbiamo:

χ_D è mis
disc in ogni punto
di D

(*i*) D è un chiuso e vale: $m(D) = \frac{7}{8}$.
La dimostrazione procede come per il punto (II).

(*ii*) $[0,1]\setminus D$ è denso in $[0,1]$ e quindi D è privo di punti interni.
La dimostrazione si modella sulla $2^{\underline{a}}$ *versione della dimostrazione di (IV): come in quel caso si osserva che* $\forall n$ D *è contenuto nell'unione di* 2^n *intervallini di lunghezza infinitesima per* $n \to \infty$. *Più precisamente si può dimostrare che hanno ampiezza*

$$\frac{1+7\cdot 5^n}{8\cdot 10^n} \quad .$$

Per dimostrare il punto (V) introduciamo la cosiddetta funzione di Cantor. Sia $x \in [0,1]$ e sia

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 3^{-n}$$

una sua rappresentazione ternaria, poniamo $M = \infty$ se $a_n \neq 1$ $\forall n$, altrimenti sia M il minimo indice n tale che $a_n = 1$. Se $M = \infty$ poniamo

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2} 2^{-n} ,$$

se $M < \infty$ poniamo

$$f(x) = \sum_{n=1}^{M-1} \frac{a_n}{2} 2^{-n} + 2^{-M} ,$$

osserviamo che le somme a secondo membro sono rappresentazioni in base 2 (binarie) di numeri in $[0,1]$. Questa funzione è definita in modo non ambiguo anche se x ha due rappresentazioni ternarie: se $x = q3^{-N}$ con q,N interi, le due rappresentazioni sono

$$x = \sum_{n=1}^{N-1} a_n 3^{-n} + a_N 3^{-N} ,$$

$$x = \sum_{n=1}^{N-1} a_n 3^{-n} + (a_N - 1)3^{-N} + \sum_{n=N+1}^{\infty} 2\cdot 3^{-n} ,$$

ora, se $x \notin C$ sappiamo che c'è almeno un indice $n < N$ tale che $a_n = 1$, quindi $M < N$

e $f(x)$ si calcola in base ai primi $M-1$ coefficienti che sono uguali per le due rappresentazioni. Sia $x \in C$ e $a_N = 1$, allora per la prima rappresentazione otteniamo

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{a_n}{2} 2^{-n} + 2^{-N} ,$$

e per la seconda

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{a_n}{2} 2^{-n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{a_n}{2} 2^{-n} + 2^{-N} ,$$

cioè il risultato è lo stesso. Analogamente, se $a_N = 2$, dalla prima rappresentazione otteniamo

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{2} 2^{-n} ,$$

e per la seconda

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{a_n}{2} 2^{-n} + 2^{-N} = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{a_n}{2} 2^{-n} + \frac{a_N}{2} 2^{-N} .$$

La funzione $f:[0,1] \to [0,1]$ così definita prende il nome di funzione di Cantor. Proveremo che verifica le seguenti proprietà.

(A) $f: C \subseteq [0,1] \to [0,1]$ è suriettiva.

(B) $f:[0,1] \to [0,1]$ è continua.

(C) $f:[0,1] \to [0,1]$ è nondecrescente.

Prima di procedere alla dimostrazione di questi enunciati, osserviamo che (A) implica (V).

<u>Dimostrazione</u> <u>di</u> <u>(V)</u> (A) implica che la cardinalità di C è maggiore o uguale a quella di $[0,1]$, d'altra parte C è un sottoinsieme di $[0,1]$ e quindi la sua cardinalità è minore o uguale a quella di $[0,1]$.

<u>Dimostrazione di (A)</u> $\forall y \in [0,1]$ sia

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} b_n 2^{-n}$$

una sua rappresentazione binaria, $b_n \in \{0,1\}$, allora

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (2 \cdot b_n) 3^{-n}$$

appartiene a C e vale $f(x) = y$.□

Osserviamo che i punti $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$ stanno in C ed f assume lo stesso valore, $\frac{1}{2}$, su entrambi i punti. Quindi f non è iniettiva su C .

Proviamo ad individuare i punti di C che hanno la stessa immagine mediante f . Siano $x,z \in C$, $x \neq z$, e siano

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 3^{-n} \ , \ z = \sum_{n=1}^{\infty} c_n 3^{-n}$$

le loro rappresentazioni ternarie con coefficienti $a_n, c_n \in \{0,2\}$. Supponiamo che $y = f(x) = f(z)$, quindi

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2} 2^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2} 2^{-n}$$

ovvero y ha due rappresentazioni binarie distinte. Pertanto si trova q,N interi tali che $y = q \cdot 2^{-N}$ e le due rappresentazioni binarie di y si possono scrivere:

$$y = \sum_{n=1}^{N-1} b_n 2^{-n} + b_N 2^{-N} \ ,$$

$$y = \sum_{n=1}^{N-1} b_n 2^{-n} + (b_N - 1) 2^{-N} + \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} \ ,$$

dove $b_n \in \{0,1\}$ $\forall n$ e $b_N = 1$. Quindi, a meno di scambiare x con z , avremo:

$$a_n = 2 \cdot b_n \ \forall \ n \leq N \ , \ a_n = 0 \ \forall \ n > N \ ,$$

$$c_n = 2 \cdot b_n \ \forall \ n \leq N-1 \ , \ c_N = 0 \ , \ c_n = 2 \ \forall \ n > N \ ,$$

cioè otteniamo la seguente rappresentazione per due punti di C che hanno la stessa immagine mediante f:

$$x=\sum_{n=1}^{N-1}(2\cdot b_n)3^{-n}+2\cdot 3^{-N} ,$$

$$z=\sum_{n=1}^{N-1}(2\cdot b_n)3^{-n}+0+\sum_{n=N+1}^{\infty} 2\cdot 3^{-n}=\sum_{n=1}^{N-1}(2\cdot b_n)3^{-n}+3^{-N}.$$

In altre parole, z e x sono gli estremi di uno degli intervalli aperti che si rimuovono nella costruzione di C data in (I).
Osserviamo infine che se $u\in(x,z)$ allora $f(u)=y$, cioè f è costante su ogni intervallo che compone il complementare di C: una rappresentazione ternaria di u ha la forma

$$u=\sum_{n=1}^{N-1}(2\cdot b_n)3^{-n}+3^{-N}+\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n3^{-n} ,$$

quindi, per u abbiamo $M=N$ e $f(u)=\sum_{n=1}^{N-1} b_n2^{-n}+2^{-N}=y$.

<u>Dimostrazione</u> <u>di</u> <u>(B)</u> Siano $x,y\in[0,1]$ $x<y$ e sia N intero tale che $3^{-N-1}\leq y-x<3^{-N}$. Posti $u=p\cdot 3^{-N}$, $v=(p+1)3^{-N}$, $w=(p+2)3^{-N}$ (tre punti consecutivi della partizione di $[0,1]$ in 3^N intervalli di pari lunghezza) tali che $u\leq x<v$ otteniamo: $u\leq x<y<w$ e ci sono due casi $y<v$ oppure $y\geq v$. Nel primo usiamo la maggiorazione:

$$|f(x)-f(y)|\leq|f(x)-f(u)|+|f(y)-f(u)|$$

nel secondo invece:

$$|f(x)-f(y)|\leq|f(x)-f(u)|+|f(y)-f(v)|+|f(v)-f(u)| .$$

Osserviamo che i coefficienti delle rappresentazioni ternarie di u , x e v coincidono fino all'indice N ,

$$u=\sum_{n=1}^{N} a_n3^{-n}$$

$$x=\sum_{n=1}^{N} a_n3^{-n}+\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n3^{-n} ,$$

$$v=\sum_{n=1}^{N} a_n 3^{-n}+3^{-N}=\sum_{n=1}^{N} a_n 3^{-n}+\sum_{n=N+1}^{\infty} 2\cdot 3^{-n} ,$$

se ne deduce:

$$|f(x)-f(u)| \, , \, |f(v)-f(u)|\leq 2^{-N}$$

inoltre, con lo stesso ragionamento, si ricava che, se $y<v$, abbiamo

$$|f(y)-f(u)|\leq 2^{-N}$$

mentre, nel caso $y\geq v$, vale

$$|f(y)-f(v)|\leq 2^{-N} .$$

Pertanto, otteniamo che in ogni caso vale:

$$|f(x)-f(y)|\leq 3\cdot 2^{-N} .$$

Ora, abbiamo scelto N di modo che: $3^{-N-1}\leq y-x$, ovvero

$$2^{-N}\leq[3(y-x)]^{log_3 2}$$

e quindi

$$|f(x)-f(y)|\leq 3[3|x-y|]^{log_3 2} ,$$

e ne segue la continuità di f.□

Osserviamo che $f(v)-f(u)$ può assumere solo i valori 0 e 2^{-N} . Infatti: se nella rappresentazione ternaria di u c'è un coefficiente $a_n=1$ con $n\leq N$, allora abbiamo $f(v)=f(u)$, mentre nel caso contrario si calcola $f(v)=f(u)+2^{-N}$.

Dimostrazione di (C) Per i punti del tipo $u=p\cdot 3^{-N}$, $v=(p+1)3^{-N}$ abbiamo appena visto che $0 \leq f(v) - f(u)$. Quindi f è nondecrescente sull'insieme $E = \{x = p \cdot 3^{-N} :$ $p, N \geq 0$ interi, $p < 3^N\}$. E è un sottoinsieme denso di $[0,1]$, quindi per la continuità di f , f è nondecrescente su tutto $[0,1]$.□

~~Ohla~~ **Prop.** $\exists$ g continua $g : [0,2] \to [0,1]$ ed $\exists$ E misurabile $\subset [0,2]$ t.c. $g^{-1}(E)$ non è misurabile. E non è boreliano.

Dim. Sia f la funz. di Cantor,

$h(x) = f(x) + x$. h è continua e strett. crescente $h : [0,1] \to [0,2]$ quindi $g = h^{-1}$ è continua.

$[0,2] \setminus h(C) = h([0,1] \setminus C)$ è aperto ed è unione disgiunta degli intervalli aperti immagine degli intervalli terzi di mezzo, su ciasc. di questi intervalli g è una traslazione quindi

$$\mu([0,2] \setminus h(C)) = \mu([0,1] \setminus C) = 1$$

Quindi $\mu(h(C)) = 1 > 0$

Sia $F \subset h(C)$ un insieme non misurabile ed $E = g(F) = h^{-1}(F)$, $E \subset C$ e quindi è mis. $F = g^{-1}(E)$ no.

Se $E \in \mathcal{B}$ avremmo $g^{-1}(E) \in \mathcal{L}$. ! $\square$

Prop. Tale ins. E è mis. secondo Lebesgue ~~che~~ ma non è di Borel.

Dim. Se g è continua e $E \in \mathcal{B}$

$g^{-1}(E)$ è mis. $\square$.