FOGLIO 12

Esercizio 5 Mostriamo la procedura per una generica $f: V \to W$.

Se $f = L_A$ allora $r = \text{rango } A$

1) Determinare una base $u_1, \dots, u_k$ di $\text{Ker}(f)$
2) prolungare a una base $v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_k$ di V
3) L'immagine di una base è la base dell'immagine:

$$f(v_1), \dots, f(v_r) \text{ sono base di } \operatorname{Im} f$$

(nota che $f(u_1) = \dots = f(u_k) = 0$ per hp)

4) Prolunga a una base $f(v_1), \dots, f(v_r), w_1, \dots, w_l$ di W
5) Assisti alla magia: per definizione

$$M_B^A(f) = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & 1 & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right) \\ f(v_1) \dots f(v_r) \; f(u_1) \dots f(u_k) \end{array} \begin{array}{c} f(v_1) \\ \vdots \\ f(v_r) \\ w_1 \\ \vdots \\ w_l \end{array}$$

RICORDA CHE NON È MOLTIPL MA NOTAZIONE

Procediamo ora all'esempio numerico.

Determiniamo una base di $\mathrm{Ker}\, L_A$ tramite l'algoritmo di Gauss:

$$\begin{matrix} -2 & 3 & 2 & 3 \\ -3 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -2 \end{matrix} \xrightarrow[1^\circ \text{ e } 3^\circ]{\text{scambio}} \begin{matrix} -1 & 2 & -2 & -2 \\ -3 & 5 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 & 3 \end{matrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{matrix} -1 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 6 & 7 \\ 0 & -1 & 6 & 7 \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} -1 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

rango $= 2$ $\qquad$ # par liberi $= 4 -$ rango $= 2$

Scelgo come param liberi x_3 e x_4. Allora

$$x_2 = 6x_3 + 7x_4$$

$$x_1 = 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 2(6x_3 + 7x_4) - 2x_3 - 2x_4 \overset{!}{=} 10x_3 + 12x_4$$

e un generico vettore soluz del Ker è

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10x_3 + 12x_4 \\ 6x_3 + 7x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} x_3 + \underbrace{\begin{pmatrix} 12 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} x_4$$

base del Ker.

Chiamiamo (seguendo la notaz. iniziale):

$$v_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 12 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Estendiamo adesso v_1, v_2 a una base di $\mathbb{R}^4$.
Chiaramente basta prendere $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

così che

$$V_1 | V_2 | v_1 | v_2 = \begin{matrix} 1 & 0 & 10 & 12 \\ 0 & 1 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

è in forma di Gauss e il rango è massimo.

Calcoliamo adesso ~~$f(v_1)$ e $f(v_2)$~~ $L_A(v_1)$ e $L_A(v_2)$.

$$L_A(v_1) = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 & 3 \\ -3 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$L_A(v_2) = \quad " \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Estendiamo adesso questi a una base di $\mathbb{R}^3$.
Ci serve un vettore $(a\ b\ c)$ tale che

$$\det \begin{pmatrix} -2 & 3 & a \\ -3 & 5 & b \\ -1 & 2 & c \end{pmatrix} \neq 0$$

Un veloce conto con Laplace ti convincerà che $(a\ b\ c) = (1\ 0\ 0)$ va bene. Allora

$w_1 = (1\ 0\ 0)$ e le basi sono

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Verifichiamo per scrupolo

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(L_A) = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{C}}(id_{\mathbb{R}^3})\, M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(L_A)\, M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(id_{\mathbb{R}^4})$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -3 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 & 3 \\ -3 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 & 12 \\ 0 & 1 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

~~fidati~~ prova a fare questi conti per conto tuo

$$= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3 Esiste $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che

$$f\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \text{ ?}$$

Il modo più facile è pensare a f come una matrice 2×2 del tipo $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ con $a,b,c,d \in \mathbb{R}$.

La domanda allora si traduce in: esistono a,b,c,d tali che

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

?

Questo è un enorme sistema lineare in a,b,c,d infatti:

$$\begin{cases} -2a = 1 \\ -2c = 1 \\ a+b = 3 \\ c+d = 0 \\ 2a+b = 0 \\ 2c+d = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}-2 & 0\\ 1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$$

è facile vedere che questo sistema non è compatibile

$\Downarrow$

a,b non esistono

$\Downarrow$

f non esiste

Esercizio 4 Procediamo come nel caso precedente.
Determiniamo se esiste una matrice t.c.

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(NB) Qui "i" è una variabile in $\mathbb{R}$ e non l'unità immaginaria in $\mathbb{C}$.

Dalle prime righe di queste 3 condizioni abbiamo

$$\begin{cases} 1a + 0b + 0c = 2 \\ 0a + 1b + 0c = 1 \\ 0a - b - c = 2 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$a = 2 \quad b = 1 \quad c = -3$$

Dalle seconde righe delle condiz iniziali ho

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \longrightarrow d = -1 \quad e = 1 \quad f = -3$$

Dalla terza ho

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow g = 0 \quad h = 0 \quad i = -2$$

Deduco allora che tale applicaz lineare esiste e rispetto alla base canonica la sua matrice è

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo adesso $\operatorname{Ker} f$

$$\begin{matrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3/2 & -9/2 \\ 0 & 0 & -2 \end{matrix}$$

~~è banale no?~~

Chiaramente $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ ~~and~~ e $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$
Possiamo quindi dire che non ci sono equazioni cartesiane.

<u>Esercizio 7</u> Iniziamo a capire in che senso $\mathcal{B}$ è una base dello spazio: i vettori di $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ sono polinomi di grado ≤ 2 in t, ossia espressioni del tipo $p(t) = a + bt + ct^2$

Se consideriamo $a, b, c \in \mathbb{R}$ e ~~per~~ notiamo che 1, t e t^2 sono polinomi allora

$$p(t) = a \cdot 1 + bt + ct^2$$

(è come se fosse $p = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$)

L'applicazione derivata agisce così sulla base

~~$D(a+bt+ct^2) = b+2ct$~~

~~polin. di grado ≤ 2~~ ~~polinomio di grado~~

$$D1 = 0 = 0 \cdot 1 + 0t + 0t^2$$

$$Dt = 1 = 1 \cdot 1 + 0t + 0t^2$$

$$Dt^2 = 2t = 0 \cdot 1 + 2t + 0t^2$$

Per definizione di $M_B^B(D)$ allora

$$M_B^B(D) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ t \\ t^2 \end{array} \\ \begin{array}{l} D1 \qquad\qquad\qquad \end{array} \end{array}$$

Capiamo concretamente cosa significa. In generale sappiamo che la derivata di un polinomio è

$$D(a+bt+ct^2) = b+2ct \qquad (*)$$

Identifichiamo adesso

$$a+bt+ct^2 = (a,b,c)_B$$

$$b+2ct = (b,2c,0)_B$$

Allora noto che

$$M_B^B(D)\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b\\2c\\0\end{pmatrix}$$

che è esattamente (*) sotto un'altra luce.

Proseguiamo adesso l'esercizio e calcoliamo $\operatorname{Ker}(D)$ e $\operatorname{Im} D$,

- $\operatorname{Ker} D$: bisogna risolvere il sistema omogeneo

$$M_B^B(D)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

ossia

$$\begin{pmatrix}y\\2z\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}y=0\\2z=0\end{cases}$$

rango 2

Il sistema ci dice che ~~[illegible]~~ Ker ha dimensione

$$\#\text{var} - \text{rango} = 3-2=1$$

e in effetti ovviamente un vettore $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ è soluz. se e solo se è della forma: $\begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

Quindi una base di $\operatorname{Ker} D$ è data da $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_B$

Cosa significa concretamente?
Siccome

$$(1\ 0\ 0)_B = 1\cdot 1 + 0t + 0t^2 = 1$$

significa che gli unici vettori (= polinomi di grado ≤ 2) che annullano D sono le costanti (= polinomi costanti).

L'immagine invece è determinata dalle colonne di $\Pi_B^B(D)$ corrispondenti ai pivot dopo l'algoritmo di Gauss: in questo caso $\Pi_B^B(D)$ è già a gradini allora l'immagine è ~~della forma~~ generata da

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_B = \cancel{1\cdot 1 + 0t} \quad e \quad \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}_B$$

Quindi ha dimensione 2.
Concretamente sono tutti i vettori (polinomi)

$$p(t) = a\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_B + b\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}_B =$$

$$= a(1\cdot 1 + 0t + 0t^2) + b(0\cdot 1 + 2t + 0t^2)$$

$$= a + 2bt$$

ossia tutti i polinomi di grado ≤ 1.