Oss. Una norma è indotta da un solo prodotto scalare, infatti vale la formula di polarizzazione che permette di ricostruire $\langle v,w\rangle$ se si conosce la funzione norma.

Su $\mathbb{R}$: $\langle v,w\rangle = \frac{1}{2}(\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2)$

Su $\mathbb{C}$: $\mathrm{Re}\langle v,w\rangle = \frac{1}{2}(\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2)$

$$\mathrm{Im}\langle v,w\rangle = \frac{1}{2}(\|v-iw\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2)$$

(verif. per esercizio). Altra formula di polar. su $\mathbb{C}$:

$\langle v,w\rangle = \frac{1}{4}(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2 + i\|v-iw\|^2 - i\|v+iw\|^2)$ (esercizio)

Angoli

V spazio vettoriale euclideo reale

Da Cauchy-Schwarz segue:

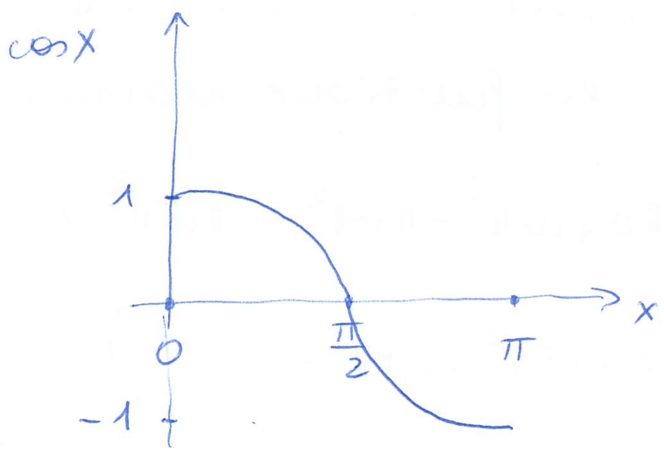
$|\langle v,w\rangle| \le \|v\|\,\|w\|$ valore assoluto

$$-\|v\|\,\|w\| \le \langle v,w\rangle \le \|v\|\,\|w\|$$

se $v\neq 0$ e $w \neq 0$

$$-1 \le \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\,\|w\|} \le 1.$$

La funzione coseno è strettamente decrescente, continua, nell'intervallo $[0,\pi]$.



Perciò $\forall\, y \in [-1,1]$ $\exists!\, x \in [0,\pi]$ t.c. $y = \cos x$.

Allora poniamo def. l'angolo:

<u>Def.</u> siano $v, w \in V$, $v, w \neq 0$

L'angolo convesso di v e w è l'unico $\alpha \in [0,\pi]$ tale che $\cos\alpha = \dfrac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \, \|w\|}$.

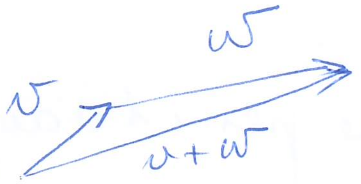
La def. di angolo ha senso solo nel caso reale.
Nel caso complesso $\langle v, w\rangle \in \mathbb{C}$.
In ~~parti~~ generale, sia nel caso reale sia nel caso complesso, si dà la definizione di vettori ortogonali.

<u>Def.</u> V sp. vett. euclideo o unitario.
$v, w \in V$ si dicono <u>ortogonali</u> se e solo se $\langle v, w\rangle = 0$ e si scrive $v \perp w$.

Nel caso <u>euclideo</u>, $v, w \neq 0$ sono ortogonali se e solo se l'angolo vale $\frac{\pi}{2}$.

Interpretazione geometrica ed esempi

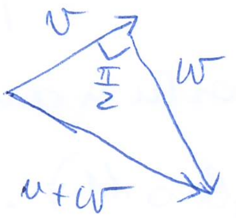
1) Disuguaglianza triangolare:



v, w linearmente indip. sono lati di un triangolo che ha $v+w$ come terzo lato

$\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$ traduce che in un triangolo ogni lato è minore della somma degli altri due.

2)

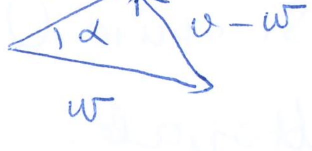


v, w ortogonali: sono i cateti di un triangolo rettangolo, di cui $v+w$ è l'ipotenusa.

$$\|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w\rangle = \langle v,v\rangle + 2\underbrace{\langle v,w\rangle}_{0} + \langle w,w\rangle = \|v\|^2 + \|w\|^2:$$

è il Teorema di Pitagora.

3)

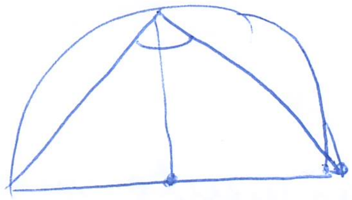


Triangolo qualunque.

$$\|v-w\|^2 = \langle v-w, v-w\rangle = \langle v,v\rangle - 2\langle v,w\rangle + \langle w,w\rangle = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\|v\|\|w\|\cos\alpha.$$

È il teorema del coseno.

4) Teorema di Talete: l'angolo opposto al diametro in un triangolo inscritto in una semicirc f è retto.



5) I due teoremi di Euclide per i triangoli rettangoli.

6) Le 3 altezze di un triangolo si incontrano in un punto.

Queste tre ultime proprietà si possono dimostrare scegliendo opportunamente dei vettori (esercizio foglio 11).

Questi teoremi valgono in tutti gli spazi euclidei.

V spazio vettoriale euclideo o unitario

Def. Siano $U, W \subseteq V$ sottospazi vettoriali.

1) U, W si dicono ortogonali se $\forall u \in U, w \in W$ si ha $\langle u, w \rangle = 0$. Si scrive $U \perp W$.

2) Sia $W \subseteq V$ sottospazio vettoriale.

$$W^{\perp} \stackrel{def.}{=} \{ v \in V \mid \langle v, w \rangle = 0 \ \forall w \in W \}$$

è detto complemento ortogonale di W.

<u>Oss.</u> $W^\perp$ è un sottospazio vettoriale di V.

Infatti $\langle 0, w\rangle = 0 \quad \forall w \in W \Rightarrow 0 \in W^\perp$.

Se $v_1, v_2 \in W^\perp$, $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ si ha $\forall w \in W$:

$$\langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w\rangle = \lambda_1 \underset{0}{\underset{\parallel}{\langle v_1, w\rangle}} + \lambda_2 \underset{0}{\underset{\parallel}{\langle v_2, w\rangle}} =$$

$$= 0 \Rightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in W^\perp.$$

3) Una famiglia di vettori di V $\{v_i\}_{i\in I}$ si dice <u>ortogonale</u> se

$v_i \perp v_j \quad \forall i \neq j,\ i,j \in I$ (a 2 a 2 ortogonali)

4) Una famiglia di vettori di V $\{v_i\}_{i\in I}$ si dice <u>ortonormale</u> se

è ortogonale e $\|v_i\| = 1 \quad \forall i \in I$

(norma associata a $\langle\ ,\ \rangle$). Ogni v_i è un <u>versore</u>. $\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}$.

5) Una base ortonormale di V è una base t.c. è una famiglia ortonormale.

Normalizzare $v \neq 0$ significa prendere $\frac{v}{\|v\|}$ di norma 1.

<u>Esempi</u> i) Per il prodotto scalare standard, la base canonica è ortonormale.

2) In $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{C}^2$, con prod. scalare standard, $v_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $v_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ formano una base ortonormale.

<u>Prop.</u> Sia $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ una base ortonormale di V.

Allora ogni vettore di V si scrive

$$v = \langle v_1, v \rangle v_1 + \dots + \langle v_n, v \rangle v_n .$$

<u>Dim.</u> $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n$ t.c. $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$.

Allora $\langle v_j, v \rangle = \cancel{\langle \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n, v \rangle =}$

$$= \langle v_j, \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \rangle = \lambda_1 \langle v_j, v_1 \rangle + \dots + \lambda_n \langle v_j, v_n \rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle v_j, v_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{ji} = \lambda_j .$$ ∎

Questa prop. mostra l'utilità di lavorare con basi ortonormali. Il coeff. di v_i è $\langle v_i, v \rangle = \frac{\cos \theta_i}{\|v\|}$, dove θ_i è l'angolo tra v e v_i.

<u>Oss.</u> Sia $\{v_i\}_{i \in I}$ una famiglia ortogonale con $v_i \neq 0$ $\forall i$.

Allora:

1) i vettori $\{v_i\}_{i\in I}$ sono lin. indip.

2) $\left\{\frac{v_i}{\|v_i\|}\right\}_{i\in I}$ è una famiglia ortonormale.

Dim. $\sum_{i\in I} \lambda_i v_i = 0 \implies$

somma finita

$$\langle v_j, \sum \lambda_i v_i \rangle = \langle v_j, 0\rangle = 0$$

$$\| $$

$$\sum \lambda_i \underbrace{\langle v_j, v_i\rangle}_{=0 \text{ se } j\neq i} = \lambda_j .$$

Perciò $\forall j\in I \quad \lambda_j = 0$.

2) $\left\| \frac{v_i}{\|v_i\|} \right\| = \left| \frac{1}{\|v_i\|}\right| \|v_i\| = \frac{1}{\|v_i\|}\|v_i\| = 1.$

è >0

Se $i\neq j \quad \left\langle \frac{v_i}{\|v_i\|}, \frac{v_j}{\|v_j\|}\right\rangle = \frac{1}{\|v_i\|\|v_j\|}\langle v_i, v_j\rangle = 0.$

—— · ——

Basi ortonormali esistono in ogni spazio vettoriale euclideo o unitario di dim finita grazie al seguente teorema.

Teorema Algoritmo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt.

V sp. vettoriale euclideo o unitario

$W \subseteq V$ sottospazio vettoriale, $\dim V = n$, $\dim W = m$

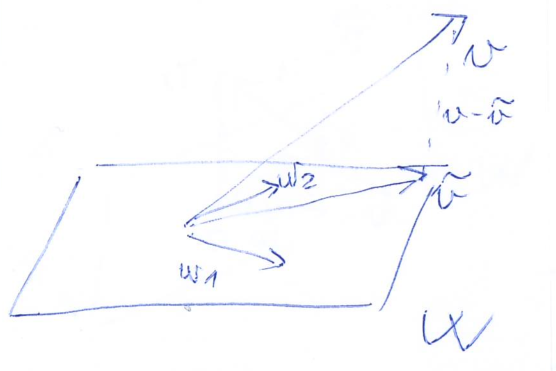
Ogni base ortonormale $(w_1, \dots, w_m)$ di W si prolunga a una base ortonormale di V.

Dim: Per induzione su $n-m$.

Base dell'induzione: $n-m=0$, allora $W=V$, la tesi è verificata.

Passo induttivo: sia $n-m>0$ e supp. vero il teorema per $n-m-1$.

$n-m>0 \Rightarrow \exists \ v \in V \setminus W$



Consideriamo il vettore

$$\tilde{v} = \langle w_1, v\rangle w_1 + \dots + \langle w_m, v\rangle w_m \in W$$

$\tilde{v}$ è la proiezione ortogonale di v su W, infatti

$v-\tilde{v}$ è ortogonale a W; per verificarlo basta verificare che $v-\tilde{v}$ è ortogonale a w_i, $\forall i = 1, \dots, m$.

$$\langle w_i, v-\tilde{v}\rangle = \langle w_i, v - \sum_{j=1}^{m} \langle w_j, v\rangle w_j\rangle = \text{bilin. o sesquil.}$$

$$= \langle w_i, v \rangle - \sum_{j=1}^{m} \langle w_j, v \rangle \underbrace{\langle w_i, w_j \rangle}_{=\delta_{ij}} =$$

$$= \langle w_i, v \rangle - \langle w_i, v \rangle = 0.$$

Siccome $v \notin W$ e $\tilde{v} \in W \Rightarrow v - \tilde{v} \notin W$, in particolare $v - \tilde{v} \neq 0$. Allora possiamo definire

$$w_{m+1} = \frac{v - \tilde{v}}{\|v - \tilde{v}\|} \qquad \text{"}v - \tilde{v} \text{ normalizzato"}$$

Otteniamo che $w_{m+1} \perp w_i$ $\forall i = 1, \dots, m$ e $\|w_{m+1}\| = 1$.

Consideriamo il sottospazio

$W' = \langle w_1, \dots, w_m, w_{m+1} \rangle$: $w_1, \dots, w_{m+1}$ è una sua base ortonormale. Allora

$\dim V - \dim W' = n - m - 1$.

Per ip. induttiva posso prolungare $w_1, \dots, w_{m+1}$ a una base ortonormale di V. ■

Nella pratica, aggiungo un vettore alla volta fino ad arrivare a n vettori.

<u>Corollario</u> Ogni spazio vettoriale euclideo o unitario ha una base ortonormale.

Se $V = \{0\}$, base $\emptyset$.

Se $V \neq \{0\}$, c'è $v \neq 0$, lo normalizzo

$\frac{v}{\|v\|} = w_1$ e applico il teorema a

$W = \langle w_1 \rangle$.

<u>Osservazione importante</u>

Il prodotto scalare $\langle \, , \rangle$ espresso rispetto a una base ortonormale assume la forma del prodotto scalare standard.

$B = (v_1, \dots, v_n)$ ortonormale

$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ coordinate risp. a B

$$\langle v, w \rangle = \langle \sum x_i v_i , \sum y_j v_j \rangle =$$

$$= \sum \bar{x}_i y_j \underbrace{\langle v_i , v_j \rangle}_{= \delta_{ij}} = {}^t\bar{x} y.$$

La matrice $M_B(\langle \, , \rangle) = E_n$ se B è ortonormale.

Def. V è somma ortogonale di suoi sottospazi vettoriali $V_1, \dots, V_k$, e si ~~scrive~~ scrive $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k$, se

1) $V = V_1 + \dots + V_k$
2) $V_i \perp V_j \quad \forall i \neq j$.

Oss. che una somma ortogonale è diretta perché $V_i \perp \sum_{j \neq i} V_j$ e quindi $V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j = \{0\}$.

Prop. V sp. vett. euclideo o unitario. Sia $W \subseteq V$ un sottosp. vett., $\dim V = n$.

Allora $V = W \oplus W^\perp$. In particolare

$$\boxed{\dim V = \dim W + \dim W^\perp}.$$

Dim. Sia $w_1, \dots, w_m$ una base ortonormale di W, la prolungo a una base ortonormale di V, con Gram-Schmidt: $(w_1 \dots w_m, v_{m+1}, \dots, v_n)$.

$$\forall v \in V \qquad v = \overbrace{\langle w_1, v\rangle w_1 + \dots + \langle w_m, v\rangle w_m}^{\in W} + \underbrace{\langle v_{m+1}, v\rangle v_{m+1} + \dots + \langle v_n, v\rangle v_n}_{\in W^\perp}$$

$\in W^\perp$ perché la base è ortonorm.

Allora $V = W + W^\perp$, ma $W \perp W^\perp \Rightarrow$ la somma è ortogonale.

Oss. in partic. che $v_{m+1}, \dots, v_n$ sono base di $W^\perp$.