CORSO DI GEOMETRIA
APPLICAZIONI ED OPERATORI LINEARI
A.A. 2018/2019
PROF. VALENTINA BEORCHIA

INDICE

1. DEFINIZIONE DI APPLICAZIONE LINEARE E PRIME PROPRIETÀ

Definizione 1.1. *Siano V e W due spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$. Una applicazione lineare da V in W è una funzione $f : V \to W$ che soddisfa le seguenti proprietà:*

- *(AL1) additività: $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$, per ogni $v_1, v_2 \in V$;*
- *(AL2) omogeneità: $f(c \cdot v) = c \cdot f(v)$, per ogni $c \in \mathbb{K}$ e per ogni $v \in V$.*

Una applicazione lineare da V in V:

$$f : V \to V$$

è anche detta un operatore lineare di V.

Una applicazione lineare biettiva $f : V \to W$ si dice isomorfismo.

Osservazione 1.2. *Si osservi che nella proprietà (AL1), la somma $v_1 + v_2$ è quella in V , mentre $f(v_1) + f(v_2)$ è la somma dei vettori $f(v_1)$ e $f(v_2)$ in W. Analogamente, in (AL2), $c \cdot v$ è il prodotto del vettore v per lo scalare c in V, mentre $c \cdot f(v)$ è il prodotto dello scalare c per il vettore $f(v)$ in W. Per questo motivo si dice anche che una applicazione lineare $f : V \to W$ rispetta le operazioni di somma e di prodotto per scalari* di V e W.

Osservazione 1.3. *Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora si ha:*

(1) $f(0_V) = 0_W$. *Infatti possiamo scrivere*

$$0_V = 0 \cdot v,\ 0 \in \mathbb{K},\ v \in V,$$

e per l'omogeneità (AL2) si ha

$$f(0_V) = f(0 \cdot v) = 0 \cdot f(v) = 0_W.$$

(2) Siano $v_1, \dots, v_k$ dei vettori di V. Allora per ogni $v \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$ si ha $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$ per opportuni $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, e per la linearità di f abbiamo

$$f(v) = f(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k) = \alpha_1 f(v_1) + \cdots + \alpha_k f(v_k);$$

quindi $f(v) \in \mathrm{Span}(f(v_1), \dots, f(v_k))$.

In particolare, se $v_1, \ldots, v_n$ è una BASE d V, per ogni $v \in V$ si ha che

$$f(v) \in \operatorname{Span}(f(v_1), \ldots, f(v_n))).$$

Inoltre, è facile verificare che ogni vettore di $\operatorname{Span}(f(v_1), \ldots, f(v_n)))$ è immagine di un vettore di V. Si ha quindi che le immagini dei vettori di una base di V generano il sottospazio immagine $\operatorname{Im}(f)$:

$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Span}(f(v_1), \ldots, f(v_n)))$$

(3) Indichiamo con

$$\operatorname{Hom}(V, W) := \{\text{applicazioni lineari } V \to W\}.$$

In $\operatorname{Hom}(V, W)$ possiamo definire una somma di applicazioni e il prodotto per scalari nel modo usuale (puntualmente). Con queste operazioni $\operatorname{Hom}(V, W)$ risulta uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.

Esempio 1.4. *L'applicazione costante nulla $0 : V \to V$, che associa ad ogni vettore $v \in V$ il vettore nullo 0_W ùn'applicazione lineare.*

Si osservi che tra le applicazioni costanti, quella nulla è l'unica che risulta lineare.

Esempio 1.5. *La funzione identità*

$$\operatorname{Id}_V : V \to V, \quad \operatorname{Id}_V(v) = v$$

è un operatore lineare.

Esempio 1.6. *Fissata una base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ di V, la funzione coordinata*

$$F_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{K}^n, \quad \text{se } v = c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n,$$

$$F_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = n - \text{upla delle coordinate di } v \text{ rispetto a } \mathcal{B}$$

è un'applicazione lineare biiettiiva, cioè un isomorfismo.

Esempio 1.7. *La proiezione*

$$p_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad p_1 \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

è un'applicazione lineare.

Esempio 1.8. *La rotazione di angolo α*

$$F_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad F_\alpha \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) r_1 - \sin(\alpha) r_2 \\ \sin(\alpha) r_1 + \cos(\alpha) r_2 \end{pmatrix}$$

è un'applicazione lineare.

Esempio 1.9. *Data una matrice qualunque*

$$A \in M_{m,n}(\mathbb{K},$$

possiamo definire la seguente applicazione lineare

$$L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, \quad L_A(v) = A \cdot v,$$

dove v è un vettore colonna di $\mathbb{K}^n$ e $A \cdot v$ è la moltiplicazione riga per colonna. La proprietà (AL1) segue dalla proprietà distributiva del prodotto righe per colonne rispetto alla somma, mentre la (AL2) segue dal fatto che la moltiplicazione per scalari commuta con il prodotto righe per colonne.

Esempio 1.10. *Sia $n \in \mathbb{N}$ e sia*

$$V = \mathbb{R}[t]_{\leq n}$$

lo spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ dei polinomi di grado $\leq n$ in una indeterminata t. L'operatore di derivazione

$$D : \mathbb{R}[t]_{\leq n} \to \mathbb{R}[t]_{\leq n}, \quad D\, p(t) = p'(t)$$

è un operatore lineare.

Esempio 1.11. *Sia $n \in \mathbb{N}$ e sia*

$$V = \mathbb{R}[t]_{\leq n}$$

e siano $a \leq b$ due numeri reali. La funzione

$$i : \mathbb{R}[t]_{\leq n} \to \mathbb{R}, \quad i(p(t)) = \int_a^b p(t)\, dt$$

è una applicazione lineare.

Teorema 1.12. Teorema di struttura per le applicazioni lineari

Siano V e W due spazi vettoriali sul campo $\mathbb{K}$. Sia $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di V, e siano $w_1, \ldots, w_n \in W$ dei vettori di W .

Allora esiste un'unica applicazione lineare $f : V \to W$, tale che

$$f(v_1) = w_1, \quad f(v_2) = w_2, \quad \ldots, \quad f(v_n) = w_n.$$

Dimostrazione. **Esistenza** Definiamo una applicazione $f : V \to W$ come segue: per ogni vettore $v \in V$, esso si esprime in modo unico come combinazione lineare dei vettori della base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ di V:

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n,$$

dove $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sono le coordinate di v rispetto alla base data; allora definiamo

$$f(v) := \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n \in W.$$

Si verifica facilmente che tale f è lineare (esercizio) e, per definizione, si ha che $f(v_i) = w_i$, per ogni $i = 1, \ldots, n$.

Unicità Siano f e g due applicazioni lineari che soddisfano la proprietà dell'enunciato $f(v_i) = w_i = g(v_i)$, per ogni $i = 1, \ldots, n$. Dimostriamo che $f = g$,cioè che $f(v) = g(v)$ per ogni $v \in V$. A tale scopo sia $v \in V$ un vettore arbitrario. Scriviamo v come combinazione lineare dei vettori della base $\{v_1, \ldots, v_n\}$:

$$v = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n.$$

Sfruttando le proprietà di linearità (AL1) e (AL2) si ha:

$$f(v) = \beta_1 f(v_1) + \cdots + \beta_n f(v_n) = \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_n w_n =$$
$$= \beta_1 g(v_1) + \cdots + \beta_n g(v_n) = g(\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n) = g(v).$$

□

2. Nucleo e immagine

Definizione 2.1. *Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Il nucleo di f è il sottoinsieme di V*

$$\ker f := \{v \in V \mid f(v) = 0\}.$$

L'immagine di f è il sottoinsieme di W

$$\mathrm{Im}(f) = \{w \in W \mid \exists v \in V : f(v) = w\}.$$

Proposizione 2.2. *Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora si ha:*

(1) $\ker(f)$ è un sottospazio vettoriale di V.
(2) $\mathrm{Im}(f)$ è un sottospazio vettoriale di$W$.
(3) f è iniettiva se e solo se $\ker(f) = \{0\}$.
(4) f è suriettiva se e solo se $\mathrm{Im}(f) = W$.

Dimostrazione. (1) Abbiamo già osservato che si ha sempre $0_V \in \ker(f)$. Dimostriamo ora che $\ker(f)$ èchiuso per la somma e per il prodotto per scalari.

Siano $v, \tilde{v} \in \ker(f)$; quindi $f(v) = 0_W$ e $f(\tilde{v}) = 0_W$. Per il vettore somma $v + \tilde{v}$, usando l'additività (AL1) di f, si ha che

$$f(v + \tilde{v}) = f(v) + f(\tilde{v}) = 0_W + 0_W = 0_W,$$

quindi anche $v + \tilde{v} \in \ker(f)$. Supponiamo infine $v \in \ker(f)$ e sia $c \in \mathbb{K}$ arbitrario. Per il vettore $c \cdot v$ si ha:

$$f(c \cdot v) = c\, f(v) = c \cdot 0_W = 0_W$$

per l'omogeneità (AL2) di f, quindi $v \cdot v \in \ker(f)$.

(2) Siccome $0_W = f(0_V)$, il vettore nullo $0_W \in \mathrm{Im}(f)$. Supponiamo ora che $w, \tilde{w} \in \mathrm{Im}(f)$. Allora esistsono due vettori $v, \tilde{v}\, inV$ tali che

$$w = f(v), \quad \tilde{w} = f(\tilde{v}).$$

Per il vettore somma si ha che

$$w + \tilde{w} = f(v) + f(\tilde{v}) = f(v + \tilde{v})$$

per l'additività (AL1) di f, quindi anche $w + \tilde{w} \in \mathrm{Im}(f)$.

Infine sia $w \in \mathrm{Im}(f)$ e $c \in \mathbb{K}$ arbitrario. Allora esiste un $v \in V$ tale che

$$w = f(v),$$

da cui

$$c \cdot w = c \cdot f(v) = f(c \cdot v)$$

per l'omogeneità (AL2) di f, allora $cw \in \mathrm{Im}(f)$.

(3) Supponiamo f iniettiva. Siccome $f(0_V) = 0_W$ e f è iniettiva, non possono esistere altri vettori che abbiano la stessa immagine di 0_V. Quindi $\ker(f) = \{0_V\}$.

Viceversa, supponiamo $\ker(f) = \{0_V\}$, cioè 0_V è l'unico vettore che abbia immagine nulla 0_W. Siano $v, \tilde{v} \in V$ due vettori diversi:

$$v \neq \tilde{v}.$$

Allora $v - \tilde{v} \neq 0_V$, da cui

$$f(v - \tilde{v}) \neq 0_W,$$

per l'ipotesi $\ker(f) = \{0_V\}$. Per la linearità si ha

$$f(v - \tilde{v}) = f(v) - f(\tilde{v}) \neq 0_W,$$

cioè

$$f(v) \neq f(\tilde{v}),$$

che è proprio la definizione di iniettività.

(4) f è suriettiva se e solo se $\operatorname{Im}(f) = W$: questa è semplicemente la definizione di suriettività.

□

Definizione 2.3. *Sia $f : V \to W$ una applicazione lineare. Il rango di f è la dimensione dell'immagine di f e si indica con rg(f):*

$$\operatorname{rg}(f) := \dim(\operatorname{Im}(f)).$$

Osservazione 2.4. *Consideriamo una matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ e sia*

$$L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$$

l'applicazione lineare associata. Per l'Osservazione 1.3 (2), se in $\mathbb{K}^n$ fissiamo la base canonica $\{e_1, \ldots, e_n\}$, abbiamo che

$$\operatorname{Im}(L_A) = \operatorname{Span}(L_A(e_1), \ldots, L_A(e_n)).$$

Osserviamo ora che

$$L_A(e_1) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = A^{(1)}, \ldots, L_A(e_n) = A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = A^{(n)},$$

cioé le immagini dei vettori della base canonica tramite L_A coincidono con le colonne di A. Questo implica che

$$\operatorname{rg}(L_A) \dim \operatorname{Im}(L_A) = \dim \operatorname{Span}(L_A(e_1), \ldots, L_A(e_n)) = \dim \operatorname{Span}(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}) = \operatorname{rg}(A).$$

Notiamo, inoltre, che se $\widetilde{A}$ é ottenuta da A per mezzo di operazioni elementari, allora sappiamo che $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(\widetilde{A})$, ma in generale

$$\operatorname{Im}(L_A) \neq \operatorname{Im}(L_{\widetilde{A}}).$$

Teorema 2.5. Teorema di Dimensione *Siano V e W due spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$, con V di dimensione finita. Sia $f : V \to W$ una applicazione lineare. Allora vale la seguente uguaglianza:*

$$\dim(V) = \dim(\ker(f)) + \operatorname{rg}(f).$$

Dimostrazione. Poiché V ha dimensione finita e $\ker(f)$ è un sottospazio vettoriale di V, anche $\ker(f))$ ha dimesnione finita. Fissiamo dunque una base

$$\{v_1, \ldots, v_k\} \quad \text{di } \ker(f),$$

e completiamola a una base di V:

$$\{v_1, \ldots, v_k, u_{k+1}, \ldots, u_n\}.$$

Affermiamo che

$$\{f(u_{k+1}), \ldots, f(u_n)\}$$

è una base di $\mathrm{Im}(f)$ ed osserviamo che da questo segue l'enunciato, perché avremmo

$$\mathrm{rg}(f) = n - k,$$

quindi

$$\dim(V) = n = k + (n - k) = \dim(ker(f)) + \mathrm{rg}(f).$$

Dalla Osservazione 1.3 (2) sappiamo che

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Span}(f(v_1), \ldots, f(v_k), f(u_{k+1}), \ldots, f(u_n)) = \mathrm{Span}(f(u_{k+1}), \ldots, f(u_n))$$

perché $v_1, \ldots, v_k \in \ker(f)$. Dunque i vettori $\{f(u_{k+1}), \ldots, f(u_n)\}$ sono un insieme di generatori.

Ci rimane da dimostrare che $\{f(u_{k+1}), \ldots, f(u_n)\}$ sono linearmente indipendenti.

Consideriamo una combinazione lineare che dia il vettore nullo:

$$c_{k+1} f(u_{k+1}) + \cdots + c_n f(u_n) = 0_W. \tag{2.1}$$

Per linearitá possiamo scrivere

$$0_W = c_{k+1} f(u_{k+1}) + \cdots + c_n f(u_n) = f(c_{k+1} u_{k+1} + \cdots + c_n u_n).$$

Segue che il vettore

$$w = c_{k+1} u_{k+1} + \cdots + c_n u_n \in \ker(f).$$

Come ogni vettore di $\ker(f)$, w si puó esprimere come combinazione lineare dei vettori della base $\{v_1, \ldots, v_k\}$ di $\ker(f)$:

$$w = a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k.$$

In definitiva abbiamo due espressioni di w come combinazione lineare di vettori linearmente indipendenti:

$$w = c_{k+1} u_{k+1} + \cdots + c_n u_n = a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k.$$

Portando le ultime due espressioni allo stesso membro troviamo

$$a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k - c_{k+1} u_{k+1} - \cdots - c_n u_n = 0_V,$$

cioé una combinazione lineare dei vettori della base di V che dá il vettore nullo, e per l'indipendenza lineare dei vettori di una base, tutti i coefficienti sono necessariamente nulli:

$$a_1 = 0, \ldots, a_k = 0, c_{k+1} = 0, \ldots, c_n = 0,$$

in particolare i coefficienti nell'espressione (2.1) sono tutti nulli, quindi $f(u_{k+1}), \ldots, f(u_n)$ sono linearmente indipendenti.

$\square$

Osservazione 2.6. *Sia $f : V \to W$ un' applicazione lineare. Ricordiamo che per ogni vettore $w \in W$, $f^{-1}(w)$ denota la pre-immagine di w tramite f, cioè*

$$f^{-1}(w) = \{v \in V \mid f(v) = w\}.$$

Allora si ha che

$$f^{-1}(w) = \tilde{v} + \ker(f),$$

dove $\tilde{v}$ è un qualsiasi elemento di $f^{-1}(w)$. Questo segue, ad esempio, tramite una dimostrazione analoga a quella del Teorema di Struttura per le soluzioni di un sistema lineare (la verifica è lasciata come esercizio). Dal Teorema della dimensione si ha che $\dim(\ker(f)) = \dim(V) - \mathrm{rg}(f)$.

Si osservi che in questo modo, nel caso in cui

$$V = \mathbb{K}^n, \ W = \mathbb{K}^m, \ f = L_A,$$

per qualche $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, si ritrova il Teorema di Struttura per le soluzioni di un sistema lineare ed il teorema di Rouché-Capelli.

Il seguente risultato segue immediatamente dal Teorema della Dimensione.

Corollario 2.7. *Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ e sia $W = \{v \in \mathbb{K}^n \mid A \cdot v = 0\}$, lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $A \cdot X = 0$.*

Allora si ha

$$n = \dim W + \mathrm{rg}\, A.$$

Corollario 2.8. *Siano V e W due spazi vettoriali di dimensione finita su un campo $\mathbb{K}$. Supponiamo che*

$$\dim(V) = \dim(W).$$

Sia $f : V \to W$ una applicazione lineare. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(1) $\ker(f) = \{0\}$*, cioè f è iniettiva;*
(2) $\mathrm{Im}(f) = W$*, cioè f è suriettiva;*
(3) f è un isomorfismo.

Dimostrazione. Se $\ker(f) = \{0\}$, allora $\dim(\ker(f)) = 0$. Per il Teorema della Dimensione si ha

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(V) - \dim(\ker(f)) = \dim(V) - 0 = \dim(V).$$

Per ipotesi $\dim(V) = \dim(W)$, ne segue che $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(W)$, e poiché $\mathrm{Im}(f)$ è un sottospazio vettoriale di W, quest'ultima condizione è equivalente a $\mathrm{Im}(f) = W$. Quindi 1. e 2. sono equivalenti tra di loro.

Supponiamo ora che valga la condizione 2. (oppure la 1.). Per quanto appena dimostrato, vale anche la condizione 1. (rispettivamente la 2.), quindi f è un isomorfismo. Viceversa, se f è un isomorfismo, è iniettiva e suriettiva per definizione, quindi valgono 1. e 2. □

Definizione 2.9. *Due spazi vettoriali V e W su un campo $\mathbb{K}$ si dicono isomorfi se esiste un isomorfismo*

$$f : V \to W.$$

In tal caso si scrive $V \cong W$.

Osservazione 2.10. *L'isomorfismo è una relazione di equivalenza tra gli spazi vettoriali su uno stesso campo $\mathbb{K}$.*

Teorema 2.11. *Siano V e W due spazi vettoriali di dimensione finita su un campo $\mathbb{K}$. Allora $V \cong W$ se e solo se $\dim(V) = \dim(W)$.*

Dimostrazione. Sia $f : V \to W$ un isomorfismo. Per il precedente corollario abbiamo $\ker(f) = \{0\}$ ed $\mathrm{Im}(f) = W$, quindi per il Teorema della Dimensione $\dim(V) = \mathrm{rg}(f) = \dim(W)$.

Viceversa, supponiamo ora che $\dim(V) = \dim(W) = n$. Fissiamo una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ di V ed una base $\{w_1, \dots, w_n\}$ di W. Per il Teorema di Struttura per le applicazioni lineari esiste un' unica applicazione lineare $f : V \to W$ tale che $f(v_i) = w_i$ per ogni $i = 1, \dots, n$. Essendo $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Span}(f(v_1), \dots, f(v_n)) = \mathrm{Span}(w_1, \dots, w_n) = W$, quindi f è suriettiva. Dal precedente Corollario abbiamo che f è un isomorfismo, quindi $V \cong W$. $\square$

Corollario 2.12. *Se $n \neq m$, gli spazi vettoriali $\mathbb{K}^n$ e $\mathbb{K}^m$ non sono isomorfi.*